$$\langle W_1[X]\rangle_э = \int_{X_н}^{X} \langle w_1(Y)\rangle_э \, dY =$$

$$= \begin{cases} 0, \quad X < X_н : \\ \sum_{r=1}^{l-1} \langle P(x_r)\rangle + \left[\langle P(x_l)\rangle \dfrac{X - x_l + \Delta_к}{2\Delta_к}, x_l - \Delta_к \le X \le x_l + \Delta_к \right], \qquad T_0 < \tau_0; \\ \dfrac{\tau_0}{T_0} \left\{ \sum_{r=1}^{l-1} \left(\langle P(x_r)\rangle + \dfrac{T_0 - \tau_0}{\tau_0 L} \right) + \left[\left(\langle P(x_l)\rangle + \dfrac{T_0 - \tau_0}{\tau_0 L} \right) \dfrac{X - x_l + \Delta_к}{2\Delta_к}, x_l - \Delta_к \le X \le x_l + \Delta_к \right] \right\}, T_0 \ge \tau_0; \\ 1, \quad X_в < X. \end{cases}$$

а ее погрешность

$$\Delta[X]_э = \langle W_1(X)\rangle_э - W[X] =$$

$$= \begin{cases} \sum_{r=1}^{l-1} \left(\langle P(x_r)\rangle - 1/L \right) + \left[\left(\langle P(x_l)\rangle - 1/L \right) \dfrac{X - x_l + \Delta_к}{2\Delta_к}, x_l - \Delta_к \le X \le x_l + \Delta_к \right], \ 0 \le T_0 < \tau_0; \\ \dfrac{\tau_0}{T_0} \left\{ \sum_{r=1}^{l-1} \left(\langle P(x_r)\rangle - \dfrac{1}{L} \right) + \left[\left(\langle P(x_l)\rangle - \dfrac{1}{L} \right) \dfrac{X - x_l + \Delta_к}{2\Delta_к}, x_l - \Delta_к \le X \le x_l + \Delta_к \right] \right\}, \tau_0 \le T_0; \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Мультипликативная составляющая погрешности $\Delta[X]_э$ по отношению $\sum_{r=1}^{l-1} \left(\langle P(x_r)\rangle - 1/L \right) + \left(\langle P(x_l)\rangle - 1/L \right) \dfrac{X - x_l + \Delta_к}{2\Delta_к}$ равна 1 при $0 \le T_0 < \tau_0$ и τ_0/T_0 при $\tau_0 \le T_0$. Аддитивная составляющая равна $-[\Delta(2l-1) + X - x_l]/2\Delta_к L$ при $0 \le T_0 < \tau_0$ и $-\tau_0[\Delta(2l-1) + X - x_l]/T_0 2\Delta_к L$ при $\tau_0 \le T_0$.

А.И. Заико

ОЦЕНКА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ ЭРГОДИЧЕСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА СО СТУПЕНЧАТОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИЕЙ. Ч.2. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

(Уфимский государственный авиационный технический университет)

Интерполяция. При интерполяции реализации $x(t)$ случайного процесса восстановление осуществляется по двум соседним отсчетам x_l и x_k. При равномерных распределениях случайного процесса и погрешности квантования условные плотности вероятности при восстановлении по двум отсчетам также равномерны. Так, условная плотность вероятности $w_1[X|\lambda; x_l, x_k]$ при $0 \le \lambda \le T_0$ равна [3, 7]

$$w_1[X|\lambda;x_l,x_k]=\left\{2\Delta_к\left[L\left(1-\frac{\rho(\lambda)+\rho(T_0-\lambda)}{1+\rho(T_0)}\right)+\frac{\rho(\lambda)+\rho(T_0-\lambda)}{1+\rho(T_0)}\right]\right\}^{-1}.$$

В зависимости от соотношения T_0 и τ_0 возможны три варианта интерполяции реализации процесса при: $0\le T_0<\tau_0$, $\tau_0\le T_0<2\tau_0$, и $2\tau_0\le T_0$.

При $0\le T_0<\tau_0$ и $l=k=1,2,...,L$

$$w_1[X|\lambda;x_l,x_k]=\begin{cases} w_1[X|\lambda;x_l]=1/2\Delta_к, & x_l-\Delta_к\le X\le x_l+\Delta_к,\ 0\le\lambda\le T_0;\\ 0, \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

При $\tau_0\le T_0<2\tau_0$ и $l,k=1,2,...,L$

$$w_1[X|\lambda;x_l,x_k]=$$

$$=\begin{cases} w_1[X|\lambda;x_l]=1/2\Delta_к, & x_l-\Delta_к\le X\le x_l+\Delta_к, \quad 0\le\lambda\le T_0-\tau_0;\\ \left[w_1[X|\lambda;x_l]+w_1[X|\lambda;x_k]\right]/2=\left[\left(1/4\Delta_к,\ x_l-\Delta_к\le X\le x_l+\Delta_к\right)+\right.\\ \quad\left.+\left(1/4\Delta_к,\ x_k-\Delta_к\le X\le x_k+\Delta_к\right)\right], & T_0-\tau_0\le\lambda\le\tau_0;\\ w_1[X|\lambda;x_k]=1/2\Delta_к, & x_k-\Delta_к\le X\le x_k+\Delta_к, \quad \tau_0\le\lambda\le T_0;\\ 0, \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

При $2\tau_0\le T_0$ и $l,k=1,2,...,L$

$$w_1[X|\lambda;x_l,x_k]=$$

$$=\begin{cases} w_1[X|\lambda;x_l]=1/2\Delta_к, & x_l-\Delta_к\le X\le x_l+\Delta_к, \quad 0\le\lambda\le\tau_0;\\ w_1[X]=1/2\Delta_к L, & X_н\le X\le X_в, \quad \tau_0\le\lambda\le T_0-\tau_0;\\ w_1[X|\lambda;x_k]=1/2\Delta_к, & x_k-\Delta_к\le X\le x_k+\Delta_к,\ T_0-\tau_0\le\lambda\le T_0;\\ 0, \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Подставив эти значения, получим оценку плотности распределения вероятности при $l,k=1,2,...,L$

$$\langle w_1[X]\rangle_и=\frac{1}{2\Delta_к}\begin{cases} \langle P(x_l)\rangle, \quad x_l-\Delta_к\le X\le x_l+\Delta_к, & T_0<\tau_0;\\ \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\langle P(x_l)\rangle, & x_l-\Delta_к\le X\le x_l+\Delta_к\\ \langle P(x_k)\rangle, & x_k-\Delta_к\le X\le x_k+\Delta_к\end{bmatrix}, & \tau_0\le T_0<2\tau_0;\\ \frac{\tau_0}{T_0}\begin{bmatrix}\langle P(x_l)\rangle+\frac{T_0-2\tau_0}{2\tau_0 L},\ x_l-\Delta_к\le X\le x_l+\Delta_к\\ \langle P(x_k)\rangle+\frac{T_0-2\tau_0}{2\tau_0 L},\ x_k-\Delta_к\le X\le x_k+\Delta_к\end{bmatrix}, & T_0\ge 2\tau_0;\\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Абсолютная погрешность $\delta[X]_и$ оценки $\langle w_1[X]\rangle_и$ при $l,k=1,2,...,L$

$$\delta[X]_{и} = \langle w_1[X]\rangle_{и} - w_1[X] =$$

$$= \frac{1}{2\Delta_{к}} \begin{cases} \langle P(x_l)\rangle - 1/L, \quad x_l - \Delta_{к} \le X \le x_l + \Delta_{к}, \quad 0 \le T_0 < \tau_0; \\ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \langle P(x_l)\rangle - 1/L,\, x_l - \Delta_{к} \le X \le x_l + \Delta_{к} \\ \langle P(x_k)\rangle - 1/L,\, x_k - \Delta_{к} \le X \le x_k + \Delta_{к} \end{bmatrix}, \tau_0 \le T_0 < 2\tau_0; \\ \frac{\tau_0}{T_0}\begin{bmatrix} \langle P(x_l)\rangle - 1/L,\, x_l - \Delta_{к} \le X \le x_l + \Delta_{к} \\ \langle P(x_k)\rangle - 1/L,\, x_k - \Delta_{к} \le X \le x_k + \Delta_{к} \end{bmatrix}, 2\tau_0 \le T_0; \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Мультипликативная составляющая погрешности $\delta[X]_{и}$ равна 1 относительно $\langle P(x_l)\rangle / 2\Delta_{к}$ при $0 \le T_0 < \tau_0$ и относительно $(\langle P(x_l)\rangle + \langle P(x_k)\rangle)/4\Delta_{к}$ при $\tau_0 \le T_0 \le 2\tau_0$. При $2\tau_0 \le T_0$ она равна $2\tau_0/T_0$. Аддитивная составляющая погрешности равна $-1/2\Delta_{к}L$ при $0 \le T_0 < 2\tau_0$ и $-2\tau_0/T_0 2\Delta_{к}L$ при $2\tau_0 \le T_0$.

Аналогично оценка одномерного распределения вероятности при интерполяции

$$\langle W_1[X]\rangle_{и} = \int_{X_н}^{X} \langle w_1(Y)\rangle_{и}\, dY =$$

$$= \begin{cases} 0, \quad X < X_{н}; \\ \sum_{r=1}^{l-1}\langle P(x_r)\rangle + \left[\langle P(x_l)\rangle \frac{X - x_l + \Delta_{к}}{2\Delta_{к}},\, x_l - \Delta_{к} \le X \le x_l + \Delta_{к}\right] \qquad 0 \le T_0 < \tau_0; \\ \frac{1}{2}\left\{\begin{matrix} \sum_{r=1}^{l-1}\langle P(x_r)\rangle + \left[\langle P(x_l)\rangle \frac{X - x_l + \Delta_{к}}{2\Delta_{к}},\, x_l - \Delta_{к} \le X \le x_l + \Delta_{к}\right] + \\ + \sum_{r=1}^{k-1}\langle P(x_r)\rangle + \left[\langle P(x_k)\rangle \frac{X - x_k + \Delta_{к}}{2\Delta_{к}},\, x_k - \Delta_{к} \le X \le x_k + \Delta_{к}\right] \end{matrix}\right\}, \qquad \tau_0 \le T_0 < 2\tau_0; \\ \frac{\tau_0}{T_0}\left\{\begin{matrix} \sum_{r=1}^{l-1}\left(\langle P(x_r)\rangle + \frac{T_0 - 2\tau_0}{2\tau_0 L}\right) + \left[\left(\langle P(x_l)\rangle + \frac{T_0 - 2\tau_0}{2\tau_0 L}\right)\frac{X - x_l + \Delta_{к}}{2\Delta_{к}},\, x_l - \Delta_{к} \le X \le x_l + \Delta_{к}\right] + \\ + \sum_{r=1}^{k-1}\left(\langle P(x_r)\rangle + \frac{T_0 - 2\tau_0}{2\tau_0 L}\right) + \left[\left(\langle P(x_k)\rangle + \frac{T_0 - 2\tau_0}{2\tau_0 L}\right)\frac{X - x_k + \Delta_{к}}{2\Delta_{к}},\, x_k - \Delta_{к} \le X \le x_k + \Delta_{к}\right] \end{matrix}\right\}, 2\tau_0 \le T_0; \\ 1, \quad X_{в} < X. \end{cases}$$

а ее погрешность

$$\Delta[X]_{\text{и}} = \langle W_1(X)\rangle_{\text{и}} - W[X] =$$

$$= \begin{cases} \sum_{r=1}^{l-1}\left(\langle P(x_r)\rangle - \frac{1}{L}\right) + \left[\left(\langle P(x_l)\rangle - \frac{1}{L}\right)\frac{X - x_l + \Delta_{\text{к}}}{2\Delta_{\text{к}}}, x_l - \Delta_{\text{к}} \le X \le x_l + \Delta_{\text{к}}\right], & 0 \le T_0 < \tau_0; \\ \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} \sum_{r=1}^{l-1}\left(\langle P(x_r)\rangle - \frac{1}{L}\right) + \left[\left(\langle P(x_l)\rangle - \frac{1}{L}\right)\frac{X - x_l + \Delta_{\text{к}}}{2\Delta_{\text{к}}}, x_l - \Delta_{\text{к}} \le X \le x_l + \Delta_{\text{к}}\right] + \\ + \sum_{r=1}^{k-1}\left(\langle P(x_r)\rangle - \frac{1}{L}\right) + \left[\left(\langle P(x_k)\rangle - \frac{1}{L}\right)\frac{X - x_k + \Delta_{\text{к}}}{2\Delta_{\text{к}}}, x_k - \Delta_{\text{к}} \le X \le x_k + \Delta_{\text{к}}\right] \end{array}\right\}, & \tau_0 \le T_0 < 2\tau_0; \\ \frac{\tau_0}{T_0}\left\{\begin{array}{l} \sum_{r=1}^{l-1}\left(\langle P(x_r)\rangle - \frac{1}{L}\right) + \left[\left(\langle P(x_l)\rangle + -\frac{1}{L}\right)\frac{X - x_l + \Delta_{\text{к}}}{2\Delta_{\text{к}}}, x_l - \Delta_{\text{к}} \le X \le x_l + \Delta_{\text{к}}\right] + \\ + \sum_{r=1}^{k-1}\left(\langle P(x_r)\rangle - \frac{1}{L}\right) + \left[\left(\langle P(x_k)\rangle - \frac{1}{L}\right)\frac{X - x_k + \Delta_{\text{к}}}{2\Delta_{\text{к}}}, x_k - \Delta_{\text{к}} \le X \le x_k + \Delta_{\text{к}}\right] \end{array}\right\}, & 2\tau_0 \le T_0; \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Мультипликативная составляющая погрешности $\Delta[X]_{\text{и}}$ равна 1 относительно $\sum_{r=1}^{l-1}\langle P(x_r)\rangle + \langle P(x_l)\rangle\frac{X - x_l + \Delta_{\text{к}}}{2\Delta_{\text{к}}}$ при $0 \le T_0 < \tau_0$ и $\frac{1}{2}\left[\sum_{r=1}^{l-1}\langle P(x_r)\rangle + \langle P(x_l)\rangle\frac{X - x_l + \Delta_{\text{к}}}{2\Delta_{\text{к}}} + \sum_{r=1}^{k-1}\langle P(x_r)\rangle + \langle P(x_k)\rangle\frac{X - x_k + \Delta_{\text{к}}}{2\Delta_{\text{к}}}\right]$ при $\tau_0 \le T_0 < 2\tau_0$. Для $2\tau_0 \le T_0$ в последнем случае она равна $2\tau_0/T_0$. Аддитивная составляющая погрешности равна $-[\Delta_{\text{к}}(2l-1) + X - x_l]/2\Delta_{\text{к}}L$ при $0 \le T_0 < \tau_0$, $-[\Delta_{\text{к}}(l+k-1) + X - (x_l + x_k)/2]/2\Delta_{\text{к}}L$ при $\tau_0 \le T_0 < 2\tau_0$ и $-2\tau_0[\Delta_{\text{к}}(l+k-1) + X - (x_l + x_k)/2]/T_0 2\Delta_{\text{к}}L$ при $2\tau_0 \le T_0$.

Анализ полученных выражений показал, что переход от экстраполяции к интерполяции реализации $x(t)$ процесса между соседними отсчетами позволяет повысить точность оценки $\langle w_1[X]\rangle$ или увеличить шаг дискретизации T_0. Так, при $\langle P(x_l)\rangle = \langle P(x_k)\rangle$ шаг дискретизации T_0 можно увеличить в 2 раза сохранив при этом++++++++++++++++++++++++++++++ погрешность измерений $\delta[X]_{\text{и}}$. Аналогично для распределений вероятности при $\sum_{r=1}^{l-1}\langle P(x_r)\rangle + \langle P(x_l)\rangle\frac{X - x_l + \Delta_{\text{к}}}{2\Delta_{\text{к}}} = \sum_{r=1}^{k-1}\langle P(x_r)\rangle + \langle P(x_k)\rangle\frac{X - x_k + \Delta_{\text{к}}}{2\Delta_{\text{к}}}$ шаг дискретизации T_0 можно увеличить в 2 раза с сохранением погрешности измерений $\Delta[X]_{\text{и}}$. Аддитивная погрешность при экстраполяции уменьшается в T_0/τ_0 раз при $0 \le T_0 \le \tau_0$, а при интерполяции уменьшается в T_0/τ_0 раз при $0 \le T_0 \le 2\tau_0$.

Кроме того, при $X_{\text{н}} = x_1 - \Delta_{\text{к}}$ и $X_{\text{в}} = x_L + \Delta_{\text{к}}$ выполняются также условия нормировки:

$$\int_{X_н}^{X_н} \langle w_1(Y)\rangle_э dY = \langle W[X_н]\rangle_э = \int_{X_н}^{X_н} \langle w_1(Y)\rangle_и dY = \langle W[X_н]\rangle_и = 0;$$

$$\int_{X_н}^{X_в} \langle w_1(Y)\rangle_э dY = \langle W[X_в]\rangle_э = \int_{X_н}^{X_в} \langle w_1(Y)\rangle_и dY = \langle W[X_в]\rangle_и = 1.$$

Выводы. Таким образом, традиционная гистограмма и вытекающий из нее алгоритм вычисления распределения вероятности являются *корректными оценками одномерной плотности вероятности* $\langle w_1[X]\rangle$ *и распределения вероятности* $\langle W_1[X]\rangle$ *эргодического случайного процесса с равномерным законом распределения и ступенчатой корреляционной функцией* $\rho(\tau)$ *при экстраполяции сигнала между отсчетами, шаге дискретизации* T_0 *равном интервалу корреляции* τ_0 *и равномерном распределении погрешности квантования по уровню*.

Переход к интерполяции сигнала между отсчетами позволяет почти вдвое повысить точность измерения $\langle w_1[X]\rangle_и$ или во столько же раз увеличить шаг дискретизации T_0. Полученная оценка $\langle w_1[X]\rangle_и$ также обладает большей точностью, поскольку полнее учитывает взаимодействие влияющих на результат измерения факторов.

Для нахождения характеристик погрешностей оценок $\langle w_1[X]\rangle$ и $\langle W_1[X]\rangle$ необходим комплексный подход к их определению [9]. Приведенные результаты позволяют не только оценить достоверность измерений плотности распределения вероятности и распределения вероятности эргодических случайных процессов, но и оптимизировать их с учетом указанных факторов.

Литература

1. Губарев В. В. Вероятностные модели: справ. в 2-х частях. Ч.2. Новосибирск: Новосиб. электротехн. ин-т. 1992, 183 с.

2. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория случайных процессов. 5-е издание. М.: КноРус. 2011, 311 с.

3. Заико А. И. Теория точности статистических и спектральных измерений // Вестник УГАТУ. 2000. № 2. С. 175–182.

4. Заико А. И. Случайные процессы. Модели и измерения: учеб. пособие. М.: Изд-во МАИ, 2006, 207 с.

5. Заико А. И. Комплексный подход к определению погрешностей // Датчики и Системы. 2007. № 8. С. 52–59.

6. Свид. 72200700005. Случайный процесс Заико А.И. с равномерным законом распределения. Математическая модель // Заико А.И.; Зарег. ФГУП «ВНТИЦ» 28.02.07 г. 10 с.

7. Заико А. И. Случайный процесс Заико с равномерным законом распределения // Вестник УГАТУ. 2008. Т.11. № 1(28). С. 188–193.

8. Заико А. И. Случайный сигнал с равномерным законом распределения // Измерительная техника.–1999. № 1. С. 9–11./Zaiko A. I. Random signal with uniform distribution // Measurement Techniques. 1999. V. 42. June. P. 11–13.

9. Заико А. И., Нагаев О. Н. Измерение плотности вероятности эргодического случайного процесса // Труды междунар. научно-технич. конф. «Перспективные информационные технологии (ПИТ 2015)». Т.1. Самара: СНЦ РАН, 2015. С. 54–60.

А.А. Зайнуллина, А.Ф. Атнабаев

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПРОТОТИПА ГИС ДЛЯ МОНИТОРИНГА РАБОТЫ ГОРОДСКОЙ ЛИВНЕВОЙ КАНАЛИЗАЦИИ

(Уфимский государственный авиационный технический университет)

Система подземных коммуникаций играет важную роль в обеспечении благоприятных условий проживания, как в мегаполисах, так и в небольших городах.

В настоящее время в мире наблюдается нестандартное проявление природных явлений (резкие оттепели, продолжительные снегопады, ливни и т.п.), в том числе выпадение кратковременных осадков, превышающих среднестатистические данные в сотни раз, что приводит к чрезвычайным последствиям для городской инфраструктуры (в том числе подземным коммуникациям).

Стихийные погодные условия, количество осадков, превышающих норму – всё это наносит как экологический, так и экономический ущерб для населения. Управление и поддержание целостности системы водоотведения требует серьезных вложений на обслуживание и ремонтные работы. Использование и внедрение инновационных технологий позволит снизить затраты. Таким образом для обеспечения бесперебойной работы городской ливневой канализации необходимо разрабатывать комплекс мер и систем поддержки принятия решений, позволяющих снизить затраты на ликвидацию возможных последствий от чрезвычайных ситуаций, вызванных природными стихиями.

На сегодняшний день зачастую поддержание инфраструктуры ливневой канализации в рабочем состоянии решается лишь устранением фактических нарушений (неисправные колодцы, прочистка и т.п.), а также мало уделяется внимание системам мониторинга и прогнозирования возможных чрезвычайных ситуаций. Поэтому выявленная задача является актуальной.

Объектом в исследовании является пространственно-распределенные данные, описывающие инфраструктуру систем ливневых канализаций. Предметом исследования является информационная поддержка принятия решений для обеспечения бесперебойной работоспособности ливневой канализации в повседневной жизни, в том числе и чрезвычайных ситуациях.