А.И. Заико

ОЦЕНКА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ ЭРГОДИЧЕСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА СО СТУПЕНЧАТОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИЕЙ. Ч.1. ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ

(Уфимский государственный авиационный технический университет)

Задача оптимизации измерительных процедур реальных случайных сигналов на сегодняшний день является весьма актуальной [1, 2]. Для эргодических случайных процессов известны алгоритмы измерения математического ожидания, дисперсии и корреляционной функции. Получены оценки плотности распределения вероятности и их погрешности с применением *комплексного подхода к их определению*, который рассматривает погрешность как единое и неделимое целое [3, 4].

В работе анализируются алгоритмы и погрешности цифрового измерения одномерного распределения вероятности эргодического случайного процесса, предложенного в [5–8].

Алгоритмы измерений. При цифровых измерениях реализация $x(t)$ случайного процесса, равномерно дискретизируются во времени с шагом T_0 и квантуется по уровню с шириной кванта $2\Delta_к$. Получаются дискретные отсчеты x_{il}, где *i*– номер отсчета, датируемого моментом времени t_i, а *l* – номер кванта, соответствующий уровню квантования x_l. Номера отсчетов принимают значения $i = -n, ..., -1, 0, 1, ..., n$, где $2n+1-$ количество отсчетов, а $2nT_0$ –длительность реализации. Количество уровней квантования обозначим через L, а номера уровней квантования $l = 1, 2, ..., L$ [5].

В инженерной практике ограничиваются чаще всего одним *i* отсчетом при экстраполяции реализация $x(t)$ в будущее и двумя соседними отсчетами *i* и $i+1$ при интерполяции. Обозначим *частость* появления отсчетов x_{il}, равных уровню квантования x_l через $\langle P(x_l)\rangle = n_l/(2n+1)$, где n_l – количество отсчетов x_{il} равных уровню квантования x_l и условие нормировки $\sum_{l=1}^{L}\langle P(x_l)\rangle = 1$. Тогда оценка одномерной плотности вероятности при экстраполяции в будущее

$$\langle w_1[X]\rangle_э = \frac{1}{T_0}\langle P(x_l)\rangle\int_0^{T_0} w_1[X|\lambda; x_l]d\lambda,$$

где $w_1[X|\lambda; x_l]$– одномерная апостериорная условная плотность вероятности; $X_н \le X \le X_в$, причем $X_н$ нижняя, а $X_в$ верхняя границы изменения случайного процесса.

При интерполяции реализации $x(t)$ процесса по двум отсчетам обозначим *частость* появления отсчетов, следующих друг за другом и соответствующих уровням квантования x_l и x_k, определяющих одномерную условную плотность вероятности $w_1[X|\lambda; x_l, x_k]$, через $\langle P(x_l, x_k)\rangle = n_{lk}/2n$, где n_{lk} – количество событий, заключающихся в появлении отсчетов с уровнями квантования x_l и x_k, а условие нормировки $\sum_{l=1}^{L}\sum_{k=1}^{L}\langle P(x_l, x_k)\rangle = 1$. Тогда оценка одномерной плотности вероятности при интерполяции

$$\langle w_1[X]\rangle_{\text{и}} = \frac{1}{T_0}\langle P(x_l, x_k)\rangle \int_0^{T_0} w_1[X|\lambda; x_l, x_k]d\lambda.$$

Оценки одномерных распределений вероятности $\langle W_1[X]\rangle$ при экстраполяции и интерполяции находится через оценки соответствующих одномерных плотностей вероятности $\langle w_1[X]\rangle$

$$\langle W_1(X)\rangle = \int_{X_{\text{н}}}^{X} \langle w_1(Y)\rangle dY.$$

Модели случайного процесса и погрешности отсчетов. Рассмотрим, случайный процесс с равномерным законом распределения плотности вероятности $w_1[X]$ [6, 7]. Такая модель процесса проста, требует минимума априорной информации и позволяет получить пригодные для инженерной практики результаты. Она описывается всего тремя параметрами: нижней $X_{\text{н}}$ и верхней $X_{\text{в}}$ границами изменения случайного процесса, а также его нормированной корреляционной функцией $\rho(\tau)$, которую положим равной

$$\rho(\tau) = \begin{cases} 1, & 0 \le |\tau| < \tau_0; \\ 0, & |\tau| \ge \tau_0, \end{cases}$$

где τ – временной сдвиг; τ_0 – интервал корреляции.

Для него истинные распределение плотности вероятности процесса

$$w_1[X] = \begin{cases} (X_{\text{в}} - X_{\text{н}})^{-1} = (2\Delta_{\text{к}}L)^{-1}, & X_{\text{н}} \le X \le X_{\text{в}}; \\ 0, \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

а распределение вероятности

$$W_1[X] = \begin{cases} 0, & X < X_{\text{н}}; \\ \dfrac{X - X_{\text{н}}}{X_{\text{в}} - X_{\text{н}}} = \dfrac{X - x_1 + \Delta_{\text{к}}}{2\Delta_{\text{к}}L}, & X_{\text{н}} \le X \le X_{\text{в}} \\ 1, & X_{\text{в}} < X. \end{cases}$$

Погрешность квантования по уровню случайна, стационарна и независима для отсчетов и от процесса. Опишем её для $l = 1, 2, ..., L$ равномерной плотностью вероятности при условии получения отсчета x_l

$$w\left[X\left|x_l\right.\right]=\begin{cases}1/2\Delta_к, & x_l-\Delta_к\le X\le x_l+\Delta_к;\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Экстраполяция. При экстраполяции в будущее реализация $x(t)$ случайного процесса восстанавливается по предыдущему отсчету x_l и условная плотность вероятности $w_1[X|\lambda; x_l]$ при $0\le\lambda<T_0$ равна

$$w_1[X|\lambda; x_l]=\begin{cases}w_1[X|\lambda; x_l]=1/2\Delta_к, & x_l-\Delta_к\le X\le x_l+\Delta_к, & 0\le\lambda<\tau_0;\\ w_1[X]=1/2\Delta_к L, & X_н\le X\le X_в, & \tau_0\le\lambda<T_0;\\ 0, \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

В зависимости от соотношения шага дискретизации T_0 и интервала корреляции τ_0 возможны два варианта экстраполяции реализации случайного процесса и получения оценки $\langle w_1[X]\rangle_э$: при $0\le T_0<\tau_0$ и $T_0\ge\tau_0$. Для $l=1,2,...,L$ и $x_l-\Delta_к\le X\le x_l+\Delta_к$ она примет вид

$$\langle w_1[X]\rangle_э=\frac{1}{2\Delta_к}\begin{cases}\langle P(x_l)\rangle, & 0\le T_0<\tau_0;\\ \frac{\tau_0}{T_0}\left(\langle P(x_l)\rangle+\frac{T_0-\tau_0}{\tau_0 L}\right), & \tau_0\le T_0;\\ 0, \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

Абсолютная погрешность $\delta[X]_э$ оценки $\langle w_1[X]\rangle_э$ при экстраполяции и комплексном подходе к её определению, а также $l=1,2,...,L$ и $x_l-\Delta_к\le X\le x_l+\Delta_к$ [6, 7]

$$\delta[X]_э=\langle w_1[X]\rangle_э-w_1[X]=\frac{1}{2\Delta_к}\begin{cases}\langle P(x_l)\rangle-1/L & 0\le T_0<\tau_0;\\ \frac{\tau_0}{T_0}\left(\langle P(x_l)\rangle-\frac{1}{L}\right), & \tau_0\le T_0;\\ 0, \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

Мультипликативная составляющая погрешности $\delta[X]_э$ по отношению к $\langle P(x_l)\rangle/2\Delta_к$ равна 1 при $0\le T_0<\tau_0$ и τ_0/T_0 при $\tau_0\le T_0$. Аддитивная составляющая равна $-1/2\Delta_к L$ при $0\le T_0<\tau_0$ и $-\tau_0/T_0 2\Delta_к L$ при $\tau_0\le T_0$.

Аналогично оценка одномерного распределения вероятности при экстраполяции в будущее

$$\langle W_1[X]\rangle_э = \int\limits_{X_н}^{X} \langle w_1(Y)\rangle_э dY =$$

$$= \begin{cases} 0, \quad X < X_н: \\ \sum\limits_{r=1}^{l-1}\langle P(x_r)\rangle + \left[\langle P(x_l)\rangle \dfrac{X - x_l + \Delta_к}{2\Delta_к}, x_l - \Delta_к \le X \le x_l + \Delta_к\right], \qquad T_0 < \tau_0; \\ \dfrac{\tau_0}{T_0}\left\{\sum\limits_{r=1}^{l-1}\left(\langle P(x_r)\rangle + \dfrac{T_0 - \tau_0}{\tau_0 L}\right) + \left[\left(\langle P(x_l)\rangle + \dfrac{T_0-\tau_0}{\tau_0 L}\right)\dfrac{X - x_l + \Delta_к}{2\Delta_к}, x_l - \Delta_к \le X \le x_l + \Delta_к\right]\right\}, T_0 \ge \tau_0; \\ 1, \quad X_в < X. \end{cases}$$

а ее погрешность

$$\Delta[X]_э = \langle W_1(X)\rangle_э - W[X] =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{r=1}^{l-1}\left(\langle P(x_r)\rangle - 1/L\right) + \left[\left(\langle P(x_l)\rangle - 1/L\right)\dfrac{X - x_l + \Delta_к}{2\Delta_к}, x_l - \Delta_к \le X \le x_l + \Delta_к\right], \ 0 \le T_0 < \tau_0; \\ \dfrac{\tau_0}{T_0}\left\{\sum\limits_{r=1}^{l-1}\left(\langle P(x_r)\rangle - \dfrac{1}{L}\right) + \left[\left(\langle P(x_l)\rangle - \dfrac{1}{L}\right)\dfrac{X - x_l + \Delta_к}{2\Delta_к}, x_l - \Delta_к \le X \le x_l + \Delta_к\right]\right\}, \tau_0 \le T_0; \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Мультипликативная составляющая погрешности $\Delta[X]_э$ по отношению $\sum\limits_{r=1}^{l-1}\left(\langle P(x_r)\rangle - 1/L\right) + \left(\langle P(x_l)\rangle - 1/L\right)\dfrac{X - x_l + \Delta_к}{2\Delta_к}$ равна 1 при $0 \le T_0 < \tau_0$ и τ_0/T_0 при $\tau_0 \le T_0$. Аддитивная составляющая равна $-\left[\Delta(2l-1) + X - x_l\right]/2\Delta_к L$ при $0 \le T_0 < \tau_0$ и $-\tau_0[\Delta(2l-1) + X - x_l]/T_0 2\Delta_к L$ при $\tau_0 \le T_0$.

А.И. Заико

ОЦЕНКА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ ЭРГОДИЧЕСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА СО СТУПЕНЧАТОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИЕЙ. Ч.2. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

(Уфимский государственный авиационный технический университет)

Интерполяция. При интерполяции реализации $x(t)$ случайного процесса восстановление осуществляется по двум соседним отсчетам x_l и x_k. При равномерных распределениях случайного процесса и погрешности квантования условные плотности вероятности при восстановлении по двум отсчетам также равномерны. Так, условная плотность вероятности $w_1[X|\lambda; x_l, x_k]$ при $0 \le \lambda \le T_0$ равна [3, 7]