В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева

МОДЕЛЬ КАНАЛОВ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ НА ОСНОВЕ СИСТЕМЫ С ГИПЕРЭРЛАНГОВСКИМ И ЭРЛАНГОВСКИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

(Поволжский государственный университет
телекоммуникаций и информатики)

Введение. В современной теории телетрафика актуальны исследования систем массового обслуживания (СМО) G/G/1 с произвольными распределениями интервалов входного потока требований и времени обслуживания в связи с тем, что для таких систем нельзя получить решения в общем случае. Поэтому исследования систем G/G/1 проводят для случаев частных распределений. Для вывода решения для среднего времени ожидания в очереди, как главной характеристики системы, использован метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли. Для практического применения полученных результатов использован известный метод моментов. Известно, что распределенная по гиперэрланговскому закону HE_2 случайная величина имеет коэффициент вариации c больший либо равный $1/\sqrt{2}$. Учитывая тот факт, что распределение HE_2 является трехпараметрическим, в статье приведен механизм аппроксимации произвольных законов распределений гиперэрланговским как с использованием двух первых моментов, так и трех первых моментов. Этот факт отражает отличительную особенность закона распределения HE_2.

Вывод решения для системы $HE_2/E_2/1$.

Рассмотрим систему массового обслуживания (СМО), на вход которой поступают требования, интервалы между которыми распределены по закону HE_2 с функцией плотности

$$a(t) = 4p\lambda_1^2 te^{-2\lambda_1 t} + 4(1-p)\lambda_2^2 te^{-2\lambda_2 t} \tag{1}$$

Время обслуживания имеет функцию плотности:

$$b(t) = 4\mu^2 te^{-2\mu t} . \tag{2}$$

Преобразования Лапласа функций (3) и (4) будут соответственно:

$$A^*(s) = p\left(\frac{2\lambda_1}{s+2\lambda_1}\right)^2 + (1-p)\left(\frac{2\lambda_2}{s+2\lambda_2}\right)^2 ;\; B^*(s) = \left(\frac{2\mu}{s+2\mu}\right)^2 .$$

Тогда спектральное разложение решения ИУЛ для системы $HE_2/E_2/1$ $A^*(-s)\cdot B^*(s) - 1 = \psi_+(s)/\psi_-(s)$ примет вид:

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \left[p\left(\frac{2\lambda_1}{2\lambda_1 - s}\right)^2 + (1-p)\left(\frac{2\lambda_2}{2\lambda_2 - s}\right)^2\right]\left(\frac{2\mu}{2\mu+s}\right)^2 - 1 .$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, введя промежуточные параметры $a_0 = 16\lambda_1^2\lambda_2^2$, $a_1 = 16\lambda_1\lambda_2[p\lambda_1 + (1-p)\lambda_2]$, $a_2 = 4[p\lambda_1^2 + (1-p)\lambda_2^2]$ представим в виде: $\left[p\left(\frac{2\lambda_1}{2\lambda_1 - s}\right)^2 + (1-p)\left(\frac{2\lambda_2}{2\lambda_2 - s}\right)^2\right] = \frac{a_0 - a_1 s + a_2 s^2}{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2}$.

Продолжая разложение, получим:

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \frac{4\mu^2(a_0 - a_1 s + a_2 s^2)}{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2(2\mu + s)^2} - \frac{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2(2\mu + s)^2}{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2(2\mu + s)^2} =$$

$$= \frac{-s(s^5 - c_4 s^4 - c_3 s^3 - c_2 s^2 - c_1 s - c_0)}{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2(2\mu + s)^2} = \frac{-s(s+s_1)(s+s_2)(s-s_3)(s-s_4)(s-s_5)}{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2(2\mu + s)^2}.$$

Окончательно, спектральное разложение решения ИУЛ для системы $HE_2/E_2/1$ имеет вид:

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \frac{-s(s+s_1)(s+s_2)(s-s_3)(s-s_4)(s-s_5)}{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2(2\mu + s)^2}. \qquad (3)$$

Исследование многочлена в числителе этого разложения и определение его корней, является основным моментом метода спектрального разложения решения ИУЛ. Поэтому выпишем многочлен пятой степени в числителе разложения (3).

$$s^5 - c_4 s^4 - c_3 s^3 - c_2 s^2 - c_1 s - c_0. \qquad (4)$$

Его коэффициенты, собранные с помощью символьных операций Mathcad, равны:

$$c_0 = -4a_1\mu^2 + 64\mu\lambda_1\lambda_2[\mu(\lambda_1 + \lambda_2) - \lambda_1\lambda_2],$$
$$c_1 = 4a_2\mu^2 - 16[\mu^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + \lambda_1^2\lambda_2^2] - 64\mu\lambda_1\lambda_2(\mu - \lambda_1 - \lambda_2),$$
$$c_1 = 4a_2\mu^2 - 16[\mu^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + \lambda_1^2\lambda_2^2] - 64\mu\lambda_1\lambda_2(\mu - \lambda_1 - \lambda_2),$$
$$c_2 = 16[(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1\lambda_2 + \mu^2) - \mu(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + 16\lambda_1\lambda_2 - 4\mu\lambda_1\lambda_2],$$
$$c_3 = -4[\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \mu^2 - 4\mu(\lambda_1 + \lambda_2) - 4\lambda_1\lambda_2,\ c_4 = 4(\lambda_1 + \lambda_2 - \mu).$$

Многочлен (4) имеет два действительных отрицательных корня $-s_1, -s_2$ и три положительных корня s_3, s_4, s_5 (либо вместо последних один действительный положительный и два комплексно сопряженных с положительной вещественной частью) в случае стабильной системы, т.е. когда загрузка системы $\rho = \bar{\tau}_\mu / \bar{\tau}_\lambda < 1$. Исследование знака младшего коэффициента c_0 показывает, что $c_0 > 0$ всегда в случае стабильной системы, когда $0 < \rho < 1$. С учетом знака минус перед c_0 в многочлене (4) это также подтверждает предположение о наличии таких корней многочлена.

Теперь, с учетом условий метода спектрального разложения строим рациональные функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$: $\psi_+(s) = s(s+s_1)(s+s_2)/(2\mu + s)^2$, т.к. нули многочлена (4): $s = 0$, $s = -s_1$, $s = -s_2$ и двукратный полюс $s = -2\mu$ лежат в области

$\mathrm{Re}(s) \le 0$, $\psi_-(s) = -\dfrac{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2}{(s-s_3)(s-s_4)(s-s_5)}$, т.к. ее нули и полюсы лежат в области $\mathrm{Re}(s) > D$. Далее по методике спектрального разложения найдем константу *K*: $K = \lim\limits_{s\to 0}\dfrac{\psi_+(s)}{s} = \lim\limits_{s\to 0}\dfrac{(s+s_1)(s+s_2)}{(s+2\mu)^2} = \dfrac{s_1 s_2}{4\mu^2}$, где s_1, s_2 – абсолютные значения отрицательных корней $-s_1, -s_2$. Постоянная *K* определяет вероятность того, что поступающее в систему требование застает ее свободной.

Отсюда преобразование Лапласа искомой функции плотности времени ожидания $W^*(s) = s \cdot \dfrac{K}{\psi_+(s)}$ будет равно $W^*(s) = \dfrac{s_1 s_2 (s+2\mu)^2}{4\mu^2 (s+s_1)(s+s_2)}$.

Для нахождения среднего времени ожидания найдем производную от функции $W^*(s)$ со знаком минус в точке $s = 0$: $-\dfrac{dW^*(s)}{ds}\Big|_{s=0} = \dfrac{1}{s_1} + \dfrac{1}{s_2} - \dfrac{1}{\mu}$.

Окончательно, среднее время ожидания для системы $HE_2/E_2/1$

$$\overline{W} = 1/s_1 + 1/s_2 - 1/\mu. \tag{5}$$

Для практического применения выражения (8) необходимо определить числовые характеристики распределений (1) HE_2 и E_2 (2).

Для этого воспользуемся свойством преобразования Лапласа воспроизведения моментов и запишем начальные моменты до второго порядка для распределения (1):

$$\overline{\tau}_\lambda = \frac{p}{\lambda_1} + \frac{(1-p)}{\lambda_2}, \quad \overline{\tau_\lambda^2} = \frac{3}{2}\left[\frac{p}{\lambda_1^2} + \frac{(1-p)}{\lambda_2^2}\right]. \tag{6}$$

Рассматривая равенства (6) как запись метода моментов, найдем неизвестные параметры распределения (1) λ_1, λ_2, p. Система двух уравнений (6) при этом является не доопределенной, поэтому к ней добавим выражение для квадрата коэффициента вариации:

$$c_\lambda^2 = \frac{\overline{\tau_\lambda^2} - (\overline{\tau}_\lambda)^2}{(\overline{\tau}_\lambda)^2}, \tag{7}$$

как связующее условие между (6). Кроме того, коэффициент вариации будем использовать в расчетах в качестве входного параметра системы. Исходя из вида уравнения (6) положим

$$\lambda_1 = 2p/\overline{\tau}_\lambda, \ \lambda_2 = 2(1-p)/\overline{\tau}_\lambda \tag{8}$$

и потребуем выполнения условия (11). Подставив выражения (6) и решение (8) в (7), получим уравнение четвертой степени относительно параметра *p*: $p(1-p)[8(1+c_\lambda^2)p^2 - 8(1+c_\lambda^2)p + 3] = 0$. Отбросив тривиальные решения $p = 0$ и $p = 1$, получим квадратное уравнение $8(1+c_\lambda^2)p^2 - 8(1+c_\lambda^2)p + 3 = 0$, решив которое выберем для однозначности больший корень:

$$p = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2(1+c_\lambda^2) - 3}{8(1+c_\lambda^2)}}. \tag{9}$$

Подставив (9) в (8) определяем не достающие параметры распределения (1). Параметры распределения (2) известны из курса теории вероятностей.

Ниже, в табл.1 приведены результаты расчетов в пакете Mathcad для случаев малой, средней и высокой загрузки ρ системы $HE_2/E_2/1$. Данные расчетов сравниваются с известными результатами для близкой системы $H_2/E_2/1$ [2]. Прочерки в таблице означают, что при данных входных параметрах система $H_2/E_2/1$ не применима. Расчеты проведены для нормированного времени обслуживания $\bar{\tau}_\mu = 1$. Данные таблицы хорошо согласуются с результатами [3] в той области изменения параметров, в которой применима СМО $HE_2/E_2/1$.

Таблица 1 – Результаты экспериментов для СМО $HE_2/E_2/1$

Входные параметры		Среднее время ожидания	
ρ	c_λ	для системы $HE_2/E_2/1$	для системы $H_2/E_2/1$
0,1	0,71	0,017	–
	1,0	0,027	0,083
	2,0	0,047	0,141
	4,0	0,056	0,171
0,5	0,71	0,392	–
	1,0	0,605	0,751
	2,0	1,536	1,764
	4,0	3,687	4,082
0,9	0,71	4,377	–
	1,0	6,605	6,752
	2,0	20,222	20,016
	4,0	74,870	73,321

Заключение. Полученные результаты приводят к следующим выводам.

1. Система $HE_2/E_2/1$ применима для анализа трафика в том случае, когда коэффициент вариации интервалов поступления $c_\lambda \geq 1/\sqrt{2}$, а коэффициент вариации времени обслуживания $c_\mu = 1/\sqrt{2}$.

2. Полученные результаты с успехом могут быть применены в современной теории телетрафика, где задержки пакетов входящего трафика играют первостепенную роль. Для этого необходимо знать числовые характеристики распределения интервалов входящего трафика и времени обслуживания на уровне двух или трех первых моментов. Эти характеристики могут быть определены с помощью современных анализаторов трафика, например, Wireshark [4].

Литература

1. Тарасов В.Н. Анализ и расчет системы массового обслуживания с запаздыванием / В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева, И.А. Блатов // Автоматика и телемеханика. - 2015. - № 11. - С. 51-59.

2. Тарасов В.Н. Исследование систем массового обслуживания с гиперэкспоненциальными входными распределениями / В.Н. Тарасов // Проблемы передачи информации. - 2016. - № 1. - С. 16-26.

3. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф. Обобщенная двумерная диффузионная модель массового обслуживания типа GI/G/1 / В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева // Телекоммуникации. - 2009. - № 7. - С.2-8.

4. Тарасов, В.Н. Анализ входящего трафика на уровне трех моментов распределений временных интервалов / В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева, Г.А. Горелов, С.В. Малахов // Информационные технологии. 2014. № 9. С.54-59.

А.М. Тен, В.В. Мокшин

АНАЛИЗ И ОСОБЕННОСТИ ИМИТАЦИОННОЙ МОДЕЛИ «АВТОЗАПРАВОЧНАЯ СТАНЦИЯ IRBIS» В СРЕДЕ ANYLOGIC.

(КНИТУ-КАИ имени А.Н. Туполева)

Введение

В современном мире, становится все более актуальные решения моделирования сложных технических систем. Подход имитационного моделирования, позволит не только узнать все нюансы исследуемой системы, но и ее улучшение и оптимизация. Моделировать можно все, начиная с обычных банкоматов, заканчивая космодромами. Кроме всего прочего средства моделирования могут использоваться, в образовании, в системной безопасности, и даже в военных и силовых структурах. К ним относятся, например, и автозаправочные станции (АЗС).

Целью данной работы является составление имитационной модели, а также нахождения оптимального количества ресурсов, для максимальной прибыли автозаправки. В данной работе рассматривается анализ автозаправочной станции IRBIS.

Описание системы работы автозаправочной станции и составление имитационной модели

На заправке есть 5 видов топлива (АИ-92, АИ-95, АИ-98, Дизельное топливо, Газ). Также есть пять резервуаров(Tanks), в которых находится жидкость. Бензовозы будут прибывать через определенные промежутки времени. Каждая бензоколонка содержит 5 видов топлива, всего колонок 4. Автомобиль подъезжает к колонке и открывается клапан подачи топлива. После завершения подачи топлива, клапан закрывается автоматически. В модели, когда автомобиль заправлен, отключается колонка от автомобиля, и машина уезжает с автозаправки. При возникновении очереди, автомобили будут ждать освобождения одной из пяти колонок. Бензовоз выступает в роли источника топлива и наполняет резервуары.

Имеется генератор потока автомобилей (carArrivals), Далее агенты захотят в область очереди на колонки АЗС (raStart-raEnd). После окончания очереди агент выбирает одну из четырех бензоколонок. Агент начинает заправку топливом(fueling). Когда топливо распределяется, дозатор отключается от ма-