Таким образом, в ходе данной работы были исследованы возможности математического аппарата вейвлет-преобразования для задачи анализа нестационарных сигналов. Оценены достоинства вейвлет-преобразования по сравнению с классическими преобразованием Фурье, а также исследованы возможности быстрых алгоритм вейвлет-преобразования. В качестве сигналов предметной области были использованы нестационарные сигналы, представляющие собой электрокардиограммы.

Литература

1. Мурашко, В. Электрокардиография [Текст] / С. Мурашко. – М.: МЕД-пресс-информ, 2007. – 320 с.

2. Воробьев, В. Теория и практика вейвлет-преобразования [Текст]/ В. Воробьев. – М.: ВУС, 1999. – 204 с.

3. Поликар, Р. Введение в вейвлет-преобразование [Текст] / Р. Поликар. пер. с англ. В.Г. Грибунина. – М.: АВТЭКС, 2006. – 79 с.: ил.

4. Основы вейвлет-преобразования [Электронный ресурс] URL: http://sernam.ru/d_7.php (дата обращения 8.04.2021).

5. Мюллер, А. Введение в машинной обучение с помощью Python. Руководство для специалистов по работе с данными. [Текст]/ А. Мюллер. – М.: Вильямс, 2017. – 480с.

В.П. Цветов

МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА НАД АЛГЕБРОЙ ЛОГИЧЕСКИХ ЗНАЧЕНИЙ

(Самарский университет)

Теория решеток и булевых алгебр [1, 2] становится перспективным направлением развития машинного обучения и распознавания образов, в т.ч. в системах защиты информации. Логические булевы матрицы, т.е. матрицы со значениями из алгебры $\langle \mathbb{D}, (\vee, \wedge, \overline{}) \rangle$, где $\mathbb{D} = \{0,1\}$- множество логических значений, а операции сигнатуры - дизъюнкция, конъюнкций и отрицание, используются для представления и обработки обучающих выборок прецедентов в моделях анализа формальных понятий (АФП) [3, 4] или обучении на подтверждающих и опровергающих примерах (ДСМ-метод, в честь Джона Стюарта Милля) [5, 6].

Матрицы над булевой алгеброй логических значений естественным образом появляются в теории бинарных отношений в качестве удобного представления бинарных отношений на конечных множествах [7].

Напомним, что матрицей бинарного отношения $R \subseteq U \times V$, заданного на паре конечных множеств $U = \{u_1, .., u_n\}$ и $V = \{v_1, .., v_m\}$, называется представление индикатора графика R в виде двух индексного битового массива (логической матрицы) (r_{ij}), где $i \in 1..n$, $j \in 1..m$, и

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, (u_i, v_j) \in R \\ 0, (u_i, v_j) \notin R \end{cases} \quad (1)$$

Над бинарными отношениями и их матрицами вводят следующие операции:

$\bar{R} = \{(u,v) | (u,v) \notin R\}$- дополнение к бинарному отношению;

$R^{-1} = \{(u_2,u_1) | (u_1,u_2) \in R\}$- обратное к бинарному отношению;

$R_1 \cup R_2 = \{(u,v) | \ (u,v) \in R_1 \ \vee (u,v) \in R_2\}$- объединение бинарных отношений;

$R_1 \cap R_2 = \{(u,v) | \ (u,v) \in R_1 \ \wedge (u,v) \in R_2\}$- пересечение бинарных отношений;

$R_1 \backslash R_2 = R_1 \cap \bar{R}_2 = \{(u,v) | \ (u,v) \in R_1 \ \wedge (u,v) \notin R_2\}$- разность бинарных отношений;

$R_1 \circ R_2 = \{(u,w) | \exists v (u,v) \in R_1 \wedge (v,w) \in R_2\}$- произведение бинарных отношений, здесь $R_1 \subseteq U \times V$ и $R_2 \subseteq V \times W$;

$(r_{ij}) = (\bar{r}_{ij})$- логическая инверсия (отрицание) матрицы, здесь, как обычно $\bar{0} = 1$ и $\bar{1} = 0$;

$(r_{ij})^T = (r_{ji})$- транспонирование матрицы;

$(r_{ij}^1) \oplus (r_{ij}^2) = (r_{ij}^1 \vee r_{ij}^2)$- прямая логическая сумма матриц;

$(r_{ij}^1) \otimes (r_{ij}^2) = (r_{ij}^1 \wedge r_{ij}^2)$- прямое логическое произведение матриц;

$(r_{ij}^1) \ominus (r_{ij}^2) = (r_{ij}^1 \wedge \bar{r}_{ij}^2)$- прямая логическая разность матриц;

$(r_{ik}^1) \odot (r_{kj}^2) = (\bigvee_{k=1}^{s} r_{ik}^1 \wedge r_{kj}^2)$- логическое произведение матриц (по правилу «строка на столбец»), здесь (r_{ik}^1) и (r_{kj}^2) - матрицы размерностей $n \times s$ и $s \times m$, соответственно.

Включения бинарных отношений и матриц определяются стандартным образом, как:

$R_1 \subseteq R_2 \rightleftharpoons R_1 \cap R_2 = R_1$;

$(r_{ij}^1) \preccurlyeq (r_{ij}^2) \rightleftharpoons (r_{ij}^1) \otimes (r_{ij}^2) = (r_{ij}^1)$.

Включения бинарных отношений и матриц суть отношения частичного порядка.

Хорошо известно, что биекция $R \mapsto (r_{ij})$, определенная равенством (1), является изоморфизмом алгебраических структур $\langle 2^{U \times U}, (\cup, \cap, \backslash, ^{-}, ^{-1}, \circ, \subseteq) \rangle$ и $\langle \mathbb{D}^{n \times n}, (\oplus, \otimes, \ominus, ^{-}, ^{T}, \odot, \preccurlyeq) \rangle$, где $2^{U \times U}$ - множество бинарных отношений на $U = \{u_1, .., u_n\}$, а $\mathbb{D}^{n \times n}$ - множество логических матриц размерности $n \times n$.

Пусть $A = (a_{kj})$ и $B = (b_{ij})$- известные логические матрицы размерностей $s \times m$ и $n \times m$, соответственно, а $X = (x_{ik})$- неизвестная логическая матрица размерности $n \times s$.

Рассмотрим матричное уравнение

$$X \odot A = B \quad (2)$$

Нетрудно показать, что решение этого уравнения в общем случае не единственно.

Используя технику работ [8, 9] и изоморфизм $R \mapsto (r_{ij})$, можно доказать, что справедливо

Утверждение 1. Если в матрице A отсутствуют сплошь нулевые строки и столбцы, и уравнение (2) разрешимо, то матрица

$$\hat{X} = (B \odot A^T) \ominus \Big(\big((B \odot A^T \odot A) \ominus B\big) \odot A^T\Big) \tag{3}$$

является его решением. Причем любое другое решение (2) удовлетворяет включению $X \preccurlyeq \hat{X}$.

Теперь рассмотрим матричное неравенство

$$X \odot A \preccurlyeq B \tag{4}$$

Понятно, что всегда существует нулевое решение (4).

По аналогии с предыдущим можно доказать, что справедливо

Утверждение 2. В предположении утверждения 1 о матрице A матрица $\hat{X}$, определенная равенством (3) является решением неравенства (4). Причем любое другое решение (4) удовлетворяет включению $X \preccurlyeq \hat{X}$.

Теперь рассмотрим следующие системы матричных уравнений и неравенств

$$\begin{cases} X_1 \odot A_{11} \oplus \cdots \oplus X_N \odot A_{1N} = B_1 \\ \cdots \\ X_1 \odot A_{M1} \oplus \cdots \oplus X_N \odot A_{MN} = B_M \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} X_1 \odot A_{11} \oplus \cdots \oplus X_N \odot A_{1N} \preccurlyeq B_1 \\ \cdots \\ X_1 \odot A_{M1} \oplus \cdots \oplus X_N \odot A_{MN} \preccurlyeq B_M \end{cases} \tag{6}$$

Можно доказать, что справедливо

Утверждение 3. Если в матрицах A_{IJ} отсутствуют сплошь нулевые строки и столбцы, то набор матриц $\hat{X} = (\hat{X}_1, .., \hat{X}_N)$, где $\hat{X}_J = \prod_{I=1}^{M} \hat{X}_J^I = \hat{X}_J^1 \otimes \cdots \widehat{\otimes X_J^1}$, и

$$\hat{X}_J^I = (B_I \odot A_{IJ}^T) \ominus \Big(\big((B_I \odot A_{IJ}^T \odot A_{IJ}) \ominus B_I\big) \odot A_{IJ}^T\Big) \tag{7}$$

является решением системы неравенств (6). Причем этот набор будет и решением системы равенств (5), если таковое существует, а любые другие решения $X = (X_1, .., X_N)$ будут удовлетворять включениям $X_J \preccurlyeq \hat{X}_J$.

Литература

1. Мальцев, А.И. Алгебраические системы / А.И. Мальцев - М.: Наука, 1970. - 392 с.
2. Биркгоф, Г. Теория решеток / Г. Биркгоф. – М.: Наука, 1984.– 568 с.
3. Ganter, Bernhard and Rudolf Wille, *Formal Concept Analysis*. Transl. from German. Berlin: Springer-Verlag, 1999. 284 p.
4. Kuznetsov, S.O. *Machine Learning on the Basis on Formal Concept Analysis* // Automation and Remote Control, Vol. 62, No 10, 2001, pp. 1543-1564.
5. Аншаков О.М., Скворцов Д.П., Финн В.К. Логические средства экспертных систем типа ДСМ // Семиотика и информатика. Вып. 28, 1986,– С. 65–102.
6. Виноградов Д.В. О представлении объектов битовыми строками для ВКФ-метода // Научная и техническая информация, Сер. 2. 2018. № 5. С. 1-4.
7. Цветов В.П. Об алгебрах индикаторов гиперграфов // Сборник трудов Международной научно-технической конференции ПИТ 2019 / под ред. С.А. Прохорова, Самара, Россия, 2018, – С. 195–198.
8. Цветов В.П. Двойственные упорядоченные структуры бинарных отношений // Сборник трудов IV международной конференции ИТНТ-2018. Самара, Россия, 2018, – С. 2635–2644.
9. Tsvetov V.P. Algebras of finitary relations. CEUR Workshop Proceedings, 2019, vol. 2416, pp. 119–125.

Г.Ш. Цициашвили, М.А. Осипова

АЛГОРИТМЫ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ РЕККУРЕНТНЫХ МОДЕЛЯХ

(ИПМ ДВО РАН, ДВФУ)

Построен алгоритм оценивания параметров в рекуррентных последовательностях $x_{i+1} = f(x_i), i = 0,1,...$, в случае нелинейной функции $f(x)$ по неточным наблюдениям за этой последовательностью. Речь идет о модели логистического роста, модели Риккера и дискретизированной модели Лоренца. Рассматриваемые модели привлекают к себе повышенное внимание со стороны биологов, физиков и метеорологов.

Для этих моделей и практически, и теоретически важно оценивать их параметры по неточным наблюдениям y_i за состоянием x_i, $i = 0,1,...$ В работе рассматриваются аддитивная $y_i = x_i + \varepsilon_i$ и мультипликативная $y_i = x_i \exp(\varepsilon_i)$, $i = 0,1,...$, модели внесения ошибок в наблюдения. Здесь $\varepsilon_i, i = 0,1,...$, -- последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин, имеющих нулевое среднее, известную дисперсию $c < \infty$, причем дисперсия $D\varepsilon_i^2 < \infty$.

Предположим, что у последовательности x_i, $i = 0,1,...$, существует