В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева

К ВОПРОСУ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ НАИБОЛЕЕ ОБЩИХ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

(Поволжский государственный университет
телекоммуникаций и информатики)

Введение. Результаты массового обслуживания востребованы при моделировании задержки в различных системах передачи данных. При этом в качестве одних из параметров трафика выступают коэффициенты вариаций интервалов поступлений и времени обслуживания заявок. Возможность использования распределений Вейбулла и Гамма, которые могли бы обеспечить широкий диапазон изменения коэффициентов вариаций (0, ∞) в зависимости от их параметров, решила бы многие актуальные задачи теории массового обслуживания.

Для системы G/G/1 с произвольными законами распределений интервалов между соседними требованиями входного потока и времени обслуживания среднее время ожидания заявок в очереди определяется выражением

$$\overline{W} = \frac{D_\lambda + D_\mu + (1-\rho)^2/\lambda^2}{2(1-\rho)/\lambda} - \frac{\overline{I^2}}{2\overline{I}}, \qquad (1)$$

где ρ – коэффициент загрузки системы ($0<\rho=\lambda/\mu<1$), λ – интенсивность входного потока, μ – интенсивность обслуживания, D_λ, D_μ – соответственно дисперсии интервалов поступления и времени обслуживания, $\overline{I}$, $\overline{I^2}$ - соответственно среднее значение и второй начальный момент периода простоя системы.

Следовательно, первое слагаемое в правой части (1) связано с коэффициентами вариаций интервалов поступления $c_\lambda = \sigma_\lambda / \overline{\tau}_\lambda$ и времени обслуживания $c_\mu = \sigma_\mu / \overline{\tau}_\mu$ квадратичной зависимостью. Второе слагаемое в правой части (1) остается неизвестным и вполне вероятно, что оно может зависеть от моментов интервалов поступления и времени обслуживания более высокого порядка, чем первые два. Поэтому при анализе СМО G/G/1 необходимо учитывать не только первые два момента случайных интервалов времен поступления и обслуживания, но и моменты более высокого порядка.

Существуют предельные формулы для (1) при $\rho \to 1$, т.е. для большой нагрузки на систему G/G/1, но мы их здесь не приводим и таким образом, здесь констатируем тот факт, что исследование систем G/G/1 заканчивается незавершенной формулой (1).

В связи с тем, в теории систем массового обслуживания (СМО) G/G/1 с произвольными распределениями интервалов входного потока требований и времени обслуживания нельзя получить решения для общего случая, то их исследования проводят с использованием частных законов распределений.

Постановка задачи. В докладе ставится задача исследования вопроса о возможности использования наиболее общих законов распределений Вейбулла и Гамма в системах общего вида G/G/1. Тогда для вывода решения для среднего времени ожидания заявок в очереди как главной характеристики для любой системы массового обслуживания, потребуется, чтобы функции плотности распределения интервалов поступлений и времени обслуживания были преобразуемыми по Лапласу.

Распределение Вейбулла с параметрами α>0, β>0 имеет вид:

$$f(t)=\begin{cases}\alpha\beta^{-\alpha}t^{\alpha-1}e^{-(t/\beta)^{\alpha}}, & t\ge 0;\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

Преобразование Лапласа функции $f(t)$ имеет вид:

$$F^{*}(s)=\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-(s\beta t^{1/\alpha}+t)}dt,$$

и этот интеграл в общем случае не берется в элементарных функциях при всех $\alpha\neq 1$. Следовательно, использование закона распределения Вейбулла напрямую в теории массового обслуживания исключено.

Теперь перейдем к рассмотрению закона гамма распределения. Как известно, двухпараметрическое гамма распределение задается функцией плотности общего вида

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{\beta^{-\alpha}t^{\alpha-1}e^{-t/\beta}}{\Gamma(\alpha)}, & t\ge 0,\\ 0, & t<0,\end{cases}$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция, равная $\Gamma(z)=\int\limits_{0}^{\infty}t^{z-1}e^{-t}dt$ для любого вещественного числа $z>0$, α>0, β>0. Преобразование Лапласа функции $f(t)$ имеет вид:

$$F^{*}(s)=\frac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-st}t^{\alpha-1}e^{-t/\beta}dt=\frac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-(s+1/\beta)t}dt=$$

$$=\left|\begin{matrix}(s+1/\beta)t=x\\ t=\dfrac{\beta}{\beta s+1}x\\ dt=\dfrac{\beta}{\beta s+1}dx\end{matrix}\right|=\frac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{\beta}{\beta s+1}\right)^{\alpha}\int\limits_{0}^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx=$$

$$=\frac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{\beta}{\beta s+1}\right)^{\alpha}\Gamma(\alpha)=\frac{1}{(\beta s+1)^{\alpha}}.$$

Анализируя преобразование Лапласа гамма распределения делаем вывод, что этот закон распределения в теории массового обслуживания можно использовать только в частных случаях при целочисленных значениях $\alpha \geq 2$. В последнем выражении сделаем замену переменной $\lambda = 1/\beta$ для функции плотности распределения интервалов входного потока, $\mu = 1/\beta$ для функции плотности распределения времени обслуживания и положим k=α. Тогда получим обычное распределение Эрланга порядка k: $f_\lambda(t) = \dfrac{\lambda^k t^{k-1} e^{-\lambda t}}{(k-1)!}$. Ограничимся распределением Эрланга второго порядка при k=2

$$f_\lambda(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}. \tag{2}$$

Кроме распределения (2) используют еще нормированное распределение Эрланга

$$f_\lambda(t) = 4\lambda^2 t e^{-2\lambda t}. \tag{3}$$

Разница между ними заключается в том, что у нормированного распределения Эрланга математическое ожидание не зависит от порядка распределения k, следовательно, они еще отличаются и числовыми характеристиками. Отличие между этими распределения приведены в таблицах 1 и 2. Системы массового обслуживания с с входными распределениями Эрланга второго порядка обозначаются $E_2/E_2/1$ и широко используются в теории массового обслуживания. Расчеты главной характеристики СМО – среднего времени ожидания требований в очереди подтверждают полное их совпадение для системы $E_2/E_2/1$ с обычными и нормированными распределениями Эрланга.

Таблица 1. Числовые характеристики распределений

Распределение	$\overline{\tau}_\lambda$	$\overline{\tau_\lambda^2}$	c_λ^2
E_2 обычное	$2/\lambda$	$6/\lambda^2$	1/2
E_2 нормированное	$1/\lambda$	$3/(2\lambda^2)$	1/2

Таблица 2. Параметр распределения, полученный методом моментов

Распределение	Плотность $f_\lambda(t)$	Параметр λ
E_2 обычное	$\lambda^2 t e^{-\lambda t}$	$\lambda = 2/\overline{\tau}_\lambda$
E_2 нормированное	$4\lambda^2 t e^{-2\lambda t}$	$\lambda = 1/\overline{\tau}_\lambda$

Заключение. Анализ законов распределений Вейбулла и гамма общего вида приводит к следующим выводам.

1. Распределение Вейбулла напрямую не может быть использовано в теории массового обслуживания. При его аппроксимации преобразуемыми по

Лапласу более простыми законами распределений, возможно его использование.

2. Гамма распределение также напрямую не может быть использовано в теории массового обслуживания, кроме как частного случая распределения Эрланга различного порядка.

Литература

1. Тарасов В. Н. Расширение класса систем массового обслуживания с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2018. № 12. С. 57-70.

2. Тарасов В. Н. Анализ и сравнение двух систем массового обслуживания с гиперэрланговскими входными распределениями // Радиоэлектроника, информатика, управление. 2018. №4 (47). С. 61-70.

3. Тарасов В.Н., Липилина Л.В., Бахарева Н.Ф. Автоматизация расчета характеристик систем массового обслуживания для широкого диапазона изменения их параметров // Информационные технологии. 2016. Т. 22. № 12. С. 952-957.

4. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф. Компьютерное моделирование вычислительных систем. Теория, Алгоритмы, Программы. - Оренбург, 2005. - 183 с.

В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева

ТРАНСФОРМАЦИЯ КЛАССИЧЕСКИХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

(Поволжский государственный университет
телекоммуникаций и информатики)

Введение. В теории массового обслуживания исследования систем G/G/1 актуальны в связи с тем, что они активно используются в современной теории телетрафика для моделирования задержки в системах передачи данных, к тому же нельзя получить решения для таких систем в конечном виде для общего случая. Поэтому такие системы исследуются при частных законах распределений, для которых можно получить решение для основной характеристики систем массового обслуживания (СМО) – среднего времени ожидания заявок в очереди в явной форме.

Из теории массового обслуживания известно, что среднее время ожидания заявок в очереди связана с коэффициентами вариаций интервалов поступлений и обслуживания квадратичной зависимостью. Большинство классических СМО применимо только в случае фиксированных значений этих коэффициентов вариаций, что является для них серьёзным ограничением.

Целью данного доклада является представление нового класса СМО на одном примере классической системы M/M/1 для расширения области приме-