А. И. Заико

ИЗМЕРЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТИ ЭРГОДИЧЕСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИЕЙ

(Уфимский государственный авиационный технический университет)

Реальные сигналы представляют собой случайные процессы с определённой долей детерминизма. Поэтому задача оптимизации измерительных процедур таких сигналов на сегодняшний день является весьма актуальной [1].

Для эргодических случайных процессов известны методы измерения математического ожидания, дисперсии и корреляционной функции. Для измерения распределений таких процессов подобные алгоритмы только разрабатываются. Для получения оценки плотности вероятности эргодического случайного процесса используют метод относительного времени пребывания реализации сигнала выше заданного уровня и его цифровой аналог – метод дискретных выборок, результаты измерения которого графически представляются в виде гистограммы [1, 2]. При построении гистограммы по умолчанию считают, что в течение шага дискретизации сигнал не выходит за пределы одного кванта и переход сигнала из одного кванта в другой осуществляется в момент дискретизации. Это возможно только при ступенчатой корреляционной функции и шаге дискретизации равном интервалу корреляции [1, 2]. Получаемые результаты не сопровождаются оценкой их погрешностей и не позволяют говорить об их достоверности. Получить научно обоснованные рекомендации по оптимизации таких измерений также не удаётся.

В работе приводится процедура цифрового измерения одномерных плотности вероятности и вероятности эргодического случайного процесса. Полученные результаты иллюстрируются на примере оригинального случайного процесса с равномерным законом распределения и экспоненциально убывающей корреляционной функцией при равномерных распределениях погрешности квантования по уровню и шаге дискретизации во времени [3]. Характеристики погрешности измерения плотности вероятности получены с применением комплексного подхода к определению погрешностей [2, 4]. Он позволяет избежать некорректного суммирования погрешностей дискретизации и квантования, а также погрешностей восстановления реализации процесса между отсчетами и учесть их взаимное влияние друг на друга.

Алгоритмы измерений. При цифровых измерениях реализация $x(t)$ случайного процесса, равномерно дискретизируется во времени с шагом T_0 и квантуется по уровню с шириной кванта $2\Delta_к$. Получаются дискретные отсчеты x_{il}, где i – номер отсчета, датируемого моментом времени t_i, а l – номер кванта, соответствующий уровню квантования x_l. Номера отсчетов принимают значения

$i = -n, ..., -1, 0, 1, ..., n$, где $2n+1$ – количество отсчетов, а $2nT_0$ –длительность реализации. Количество уровней квантования обозначим через L, а номера уровней квантования $l = 1, 2, ..., L$ [5].

Оценка $\langle w_1[X] \rangle_э$ одномерной плотности вероятности при *экстраполяции в будущее* реализации процесса $x(t)$ между отсчетами имеет вид [2, 5]

$$\langle w_1[X] \rangle_э = \frac{1}{(2n+1)T_0} \sum_{i=-n}^{n} \int_{0_i}^{T_0} w_1[X|\lambda; x_{-nk}, ..., x_{il}] d\lambda. \quad (1)$$

где $w_1[X|\lambda; x_{-nk}, ..., x_{il}]$ – одномерная условная плотность вероятности процесса в момент времени $0 \le \lambda \le T_0$ между соседними отсчетами после получения отсчетов $x_{-nk}, ..., x_{il}$ реализации; $k, r = 1, 2, ..., L$ – номера уровней квантования.

Для случайного процесса обладающего Марковским свойством апостериорная плотность вероятности $w_1[X|\lambda; x_{-nk}, ..., x_{il}]$ при экстраполяции зависит только от одного предыдущего отсчета x_{il} и приобретает вид $w_1[X|\lambda; x_{il}]$. Обозначим в выражении (1) *частость* появления отсчетов x_{il}, равных уровню квантования x_l и определяющих плотность распределения вероятности $w_1[X|\lambda; x_{il}] = w_1[X|\lambda; x_l]$, через $\langle P(x_l) \rangle = n_l / (2n+1)$, где n_l — количество отсчетов x_{il} равных уровню квантования x_l и $\sum_{l=1}^{L} \langle P(x_l) \rangle = 1$. Тогда оценка (1) при экстраполяции в будущее и $l = 1, 2,..., L$ примет вид

$$\langle w_1[X] \rangle_э = \frac{1}{T_0} \langle P(x_l) \rangle \int_0^{T_0} w_1[X|\lambda; x_l] d\lambda. \quad (2)$$

Из выражений (1) и (2) следует, что оценка одномерной плотности вероятности $\langle w_1[X] \rangle_э$ существенно зависит от одномерной условной плотности вероятности $w_1[X|\lambda; x_{-nk}, ..., x_{il}]$, которая в свою очередь определяет свойства и характеристики конкретной модели случайного процесса.

Оценка одномерного распределения вероятности $\langle W_1[X] \rangle_э$ при экстраполяции находится через $\langle w_1[X] \rangle_э$ и равна

$$\langle W_1[X] \rangle_э = \int_{X_н}^{X} \langle w_1[Y] \rangle_э dY.$$

Модели случайного процесса и погрешности отсчетов. Рассмотрим случайный процесс Заико с равномерным законом плотности распределения вероятности $w_1[X]$ [3, 6]. Такая модель проста, требует минимума априорной информации и позволяет получить пригодные для инженерной практики результаты. Она описывается всего тремя параметрами: нижней $X_н$ и верхней $X_в$

границами изменения случайного процесса и нормированной корреляционной функцией $\rho(\tau)$. Выберем её равной

$$\rho(\tau) = \mathrm{e}^{-\alpha|\tau|}. \tag{3}$$

где $\tau -$ временной сдвиг; $\alpha -$ коэффициент динамичности, $0 \le \alpha < \infty$. Тогда процесс будет обладает еще и Марковским свойством [5].

Для него распределение плотности вероятности процесса

$$w_1[X] = \begin{cases} (X_{\text{в}} - X_{н})^{-1} = (2\Delta_{\text{к}} L)^{-1}, & X_{\text{н}} \le X \le X_{\text{в}}; \\ 0, \text{ в остальных случаях}, \end{cases}$$

а распределение вероятности

$$W_1[X] = \begin{cases} 0, & X < X_{\text{н}}; \\ \dfrac{X - X_{\text{н}}}{X_{\text{в}} - X_{\text{н}}} = \dfrac{X - x_1 + \Delta_{\text{к}}}{2\Delta_{\text{к}} L}, & X_{\text{н}} \le X \le X_{\text{в}}; \\ 1, & X_{\text{в}} < X. \end{cases}$$

Погрешность квантования по уровню случайна, стационарна и независима для отсчетов и от процесса. Опишем её для $l = 1, 2,..., L$ равномерной плотностью вероятности при получения отсчета x_l

$$w[X|x_l] = \begin{cases} 1/2\Delta_{\text{к}}, \; x_l - \Delta_{\text{к}} \le X \le x_l + \Delta_{\text{к}}; \\ 0, \text{ в остальных случаях}. \end{cases}$$

При экстраполяции в будущее реализация $x(t)$ случайного процесса с Марковским свойством восстанавливается по предыдущему отсчету. При равномерном распределении случайного процесса и погрешности квантования условная плотность вероятности $w_1[X|\lambda; x_{il}] = w_1[X|\lambda; x_l]$, где $0 \le \lambda < T_0$ также равномерна и $l = 1, 2,..., L$ [2, 5]:

$$w_1[X|\lambda; x_l] = \begin{cases} [X_{\text{в}}(\lambda; x_l) - X_{\text{н}}(\lambda; x_l)]^{-1}, \; X_{\text{н}}(\lambda; x_l) \le X \le X_{\text{в}}(\lambda; x_l); \\ 0, \text{ в остальных случаях}, \end{cases} \tag{4}$$

где верхняя $X_{\text{в}}(\lambda; x_l)$ и нижняя $X_{\text{н}}(\lambda; x_l)$ границы динамического диапазона изменения случайного процесса при экстраполяции [2, 5]:

$$X_{\text{в}}(\lambda; x_l) = X_{\text{в}} - (X_{\text{в}} - x_l - \Delta_{\text{к}})\mathrm{e}^{-\alpha\lambda}; \;\; X_{\text{н}}(\lambda; x_l) = X_{\text{н}} + (x_l - \Delta_{\text{к}} - X_{\text{н}})\mathrm{e}^{-\alpha\lambda}, \;\; 0 \le \lambda < T_0.$$

Выражение (4) при этом примет вид

$$w_1[X|\lambda; x_l] = (2\Delta_{\text{к}})^{-1} \times$$

$$\times \begin{cases} \left[L - (L-1)\mathrm{e}^{-\alpha\lambda}\right]^{-1}, X_{\text{н}} + (x_l - \Delta_{\text{к}} - X_{\text{н}})\mathrm{e}^{-\alpha\lambda} \le X \le X_{\text{в}} - (X_{\text{в}} - x_l - \Delta_{\text{к}})\mathrm{e}^{-\alpha\lambda}, 0 \le \lambda < T_0; \\ L^{-1}, \quad X_{\text{н}} \le X \le X_{\text{в}}, \quad \lambda \ge T_0; \\ 0, \text{в остальных случаях}. \end{cases} \tag{5}$$

Подставив (5) в выражение (2) получим оценку $\langle w_1[X] \rangle_{\text{э}}$ одномерной плотности вероятности для $l = 1, 2,..., L$ при экстраполяции в виде

$$\left\langle w_1[X]\right\rangle_э = \begin{cases} \dfrac{\left\langle P(x_l)\right\rangle}{2\Delta_к L\alpha T_0}\left[\begin{array}{l} \alpha T_0 + \ln\dfrac{L-(L-1)e^{-\alpha T_0}}{1+L\dfrac{x_l-\Delta_к-X}{X-X_н}}, X_н+(x_l-\Delta_к-X_н)e^{-\alpha T_0} \le X \le x_l-\Delta_к; \\ \alpha T_0 + \ln\left(L-(L-1)e^{-\alpha T_0}\right), \quad x_l-\Delta_к \le X \le x_l+\Delta_к; \\ \alpha T_0 + \ln\dfrac{L-(L-1)e^{-\alpha T_0}}{1+L\dfrac{X-x_l-\Delta_к}{X_в-X}}, x_l+\Delta_к \le X \le X_в-(X_в-x_l-\Delta_к)e^{-\alpha T_0}; \end{array}\right. \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \quad (6)$$

Абсолютная погрешность $\delta[X]_э$ оценки $\left\langle w_1[X]\right\rangle_э$ (6) при комплексном подходе к её определению для $l = 1, 2,..., L$ [3]

$$\delta_э[X] = \left\langle w_1[X]\right\rangle_э - w_1[X] = (2\Delta_к L)^{-1} \times$$

$$\times\begin{cases} \dfrac{\left\langle P(x_l)\right\rangle}{\alpha T_0}\left[\begin{array}{l} \alpha T_0 + \ln\dfrac{L-(L-1)e^{-\alpha T_0}}{1+L\dfrac{x_l-\Delta_к-X}{X-X_н}}, X_н+(x_l-\Delta_к-X_н)e^{-\alpha T_0} \le X \le x_l-\Delta_к; \\ \alpha T_0 + \ln\left(L-(L-1)e^{-\alpha T_0}\right), \quad x_l-\Delta_к \le X \le x_l+\Delta_к; \\ \alpha T_0 + \ln\dfrac{L-(L-1)e^{-\alpha T_0}}{1+L\dfrac{X-x_l-\Delta_к}{X_в-X}}, x_l+\Delta_к \le X \le X_в-(X_в-x_l-\Delta_к)e^{-\alpha T_0}; \end{array}\right] - 1; \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \quad (7)$$

Аналогично оценка одномерного распределения вероятности при экстраполяции при $l = 1, 2,..., L$

$$\left\langle W_1[X]\right\rangle_э = \int_{X_н}^{X}\left\langle w_1[Y]\right\rangle_э dY = \frac{1}{2\Delta_к L\alpha T_0} \times$$

$$\times\begin{cases} \sum\limits_{r=1}^{l-1}\left\langle P(x_r)\right\rangle\left\{\begin{array}{l} \left[\alpha T_0 + \ln\dfrac{\left(L-(L-1)e^{-\alpha T_0}\right)(X-X_н)}{X-X_н+L(x_r-\Delta_к-X)}\right](X-X_н) - \\ -\dfrac{L(x_r-\Delta_к-X_н)}{L-1}\ln\dfrac{\left(L-(L-1)e^{-\alpha T_0}\right)(x_r-\Delta_к-X_н)}{X-X_н+L(x_r-\Delta_к-X)} \end{array}\right\}, & \begin{array}{c} X_н+(x_r-\Delta_к-X_н)e^{-\alpha T_0} \le \\ \le X \le x_l-\Delta_к, \\ 1 \le r < l; \end{array} \\ \left\langle P(x_l)\right\rangle\left[\alpha T_0(X-X_н) - \dfrac{X-X_н-L(X-x_l+\Delta_к)}{L-1}\ln\left(L-(L-1)e^{-\alpha T_0}\right)\right], & \begin{array}{c} x_l-\Delta_к \le X \le x_l+\Delta_к, \\ r = l; \end{array} \\ \sum\limits_{r=l+1}^{L}\left\langle P(x_r)\right\rangle\left\{\begin{array}{l} \alpha T_0(X-X_н) - \dfrac{X-X_н-L(X-x_r+\Delta_к)}{L-1}\ln\left(L-(L-1)e^{-\alpha T_0}\right) - \\ -\dfrac{X_в-X+L(X-x_r-\Delta_к)}{L-1}\ln\left(X_в-X+L(X-x_r-\Delta_к)\right) + \\ +\dfrac{L(X_в-x_r-\Delta_к)}{L-1}\ln(X_в-x_r-\Delta_к) - (X_в-X)\ln(X_в-X) \end{array}\right\}, & \begin{array}{c} x_l+\Delta_к \le \\ \le X \le X_в - \\ -(X_в-x_l-\Delta_к)e^{-\alpha T_0}, \\ l < r \le L. \end{array} \end{cases}$$

Абсолютная погрешность $\Delta[X]_э$ оценки $\left\langle W_1[X]\right\rangle_э$ () при комплексном подходе к её определению для $l = 1, 2,..., L$ [3]

$$\Delta[X]_э = \langle W_1[X]\rangle_э - W_1[X] = \left(2\Delta_к L\right)^{-1} \times$$

$$\times\begin{cases} \sum\limits_{r=1}^{l-1}\langle P(x_r)\rangle \left\{ \begin{aligned} &\left[1+\frac{1}{\alpha T_0}\ln\frac{\left(L-(L-1)e^{-\alpha T_0}\right)\left(X-X_н\right)}{X-X_н+L\left(x_r-\Delta_к-X\right)}\right]\left(X-X_н\right)- \\ &-\frac{L\left(x_r-\Delta_к-X_н\right)}{\alpha T_0(L-1)}\ln\frac{\left(L-(L-1)e^{-\alpha T_0}\right)\left(x_r-\Delta_к-X_н\right)}{X-X_н+L\left(x_r-\Delta_к-X\right)} \end{aligned} \right\} - \left(X-X_н\right), & \begin{gathered} X_н+\left(x_r-\Delta_к-X_н\right)e^{-\alpha T_0}\le \\ \le X\le x_l-\Delta_к, \\ 1\le r<l; \end{gathered} \\[2ex] \langle P(x_l)\rangle\left[X-X_н-\frac{X-X_н-L\left(X-x_l+\Delta_к\right)}{\alpha T_0(L-1)}\ln\left(L-(L-1)e^{-\alpha T_0}\right)\right]-\left(X-X_н\right), & \begin{gathered} x_l-\Delta_к\le X\le x_l+\Delta_к, \\ r=l; \end{gathered} \\[2ex] \sum\limits_{r=l+1}^{L}\langle P(x_r)\rangle \left\{ \begin{aligned} &X-X_н-\frac{X-X_н-L\left(X-x_r+\Delta_к\right)}{\alpha T_0(L-1)}\ln\left(L-(L-1)e^{-\alpha T_0}\right)- \\ &-\frac{X_в-X+L\left(X-x_r-\Delta_к\right)}{\alpha T_0(L-1)}\ln\left(X_в-X+L\left(X-x_r-\Delta_к\right)\right)+ \\ &+\frac{L\left(X_в-x_r-\Delta_к\right)}{\alpha T_0(L-1)}\ln\left(X_в-x_r-\Delta_к\right)-\frac{X_в-X}{\alpha T_0}\ln\left(X_в-X\right) \end{aligned} \right\} - \left(X-X_н\right), & \begin{gathered} x_l+\Delta_к\le \\ \le X\le X_в- \\ -\left(X_в-x_l-\Delta_к\right)e^{-\alpha T_0}, \\ l<r\le L. \end{gathered} \end{cases}$$

Заключение. При измерении плотности вероятности эргодического случайного процесса на гистограмму влияют не только ширина столбцов $2\Delta_к$, но и их «размытие», а также взаимное наложение. Учесть эти факторы можно, восстанавливая реализацию процесса между отсчетами. Для нахождения погрешностей оценок плотности вероятности $\langle w_1[X]\rangle_э$ с учетом всех факторов необходим комплексный подход к их определению [8]. Приведенные результаты позволяют не только учесть эти особенности, но и оптимизировать измерения плотности распределения вероятности $\langle w_1[X]\rangle_э$ эргодических случайных процессов.

Литература

1. Вентцель Е. С. Теория вероятностей: учеб. для вузов. - 6-е изд. стер. – М.: Высш. шк., 1999.–576 с.

2. Заико А. И. Теория точности статистических и спектральных измерений // Вестник УГАТУ.–2000.–№ 2.–С. 175-182.

3. Заико А. И. Комплексный подход к определению погрешностей // Датчики и Системы.–2007.–№ 8.–С. 52-59.

4. Свид. 72200700005. Случайный процесс Заико А.И. с равномерным законом распределения. Математическая модель // Заико А.И.; зарег. ФГУП «ВНТИЦ» 28.02.07 г.–10 с.

5. Заико А. И. Модели и измерения случайных процессов. 2-е изд., пераб. и доп. М.: Изд-во «Инновационное машиностроение», 2018, 333 с.

6. Заико А. И. Случайный процесс Заико с равномерным законом распределения // Вестник УГАТУ.–2008.–Т.11.–№ 1(28).–С. 188-193.

7. Заико А. И. Случайный сигнал с равномерным законом распределения // Измерительная техника. – 1999. № 1.–С. 9–11. / Zaiko A. I. Random signal with uniform distribution // Measurement Techniques. 1999. V. 42. June.–P. 11–13.

8. Заико А. И. Оценивание плотности вероятности эргодического случайного процесса // Матер. II междунар. научно-практич. конф. «Современные проблемы науки и образования в техническом вузе».–Т.1.–Уфа: УГАТУ, 2015.–С.146-152.

К.Е. Климентьев

ВЫБОР И РЕАЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНОГО ГЕНЕРАТОРА ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ ДЛЯ СИСТЕМЫ МУЛЬТИАГЕНТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

(Самарский университет)

Введение. На кафедре ИСТ Самарского Университета продолжается разработка и реализация программной среды для мультиагентного моделирования поведения «инфицирующих» сущностей [1], примерами которых могут служить некоторые разновидности вредоносных программ (компьютерные вирусы и черви), болезнетворные микроорганизмы, участки возгорания во время пожаров и т.п. Очевидно, неотъемлемым и важным компонентом любой системы имитационного моделирования, предполагающей проведение статистических экспериментов, является «качественный» генератор псевдослучайных чисел (ГПСЧ). Более того, для получения достоверных результатов рекомендуется выполнение нескольких статистических экспериментов с одинаковыми начальными условиями, но с использованием разных ГПСЧ.

Ядром рассматриваемой системы реализовано средствами XDS-Modula-2 фирмы Excelsior (см. https://www.excelsior.ru/products/xds). Недостатком данной системы программирования является невозможность самостоятельной инициализации встроенного ГПСЧ начальным состоянием, что исключает возможность повторения экспериментов. Другим важным недостатком является отсутствие поддержки 64-битной целочисленной арифметики.

1. Постановка задачи. Таким образом, ставится задача выбора и реализации генератора (или нескольких генераторов) псевдослучайных чисел со свойствами, удовлетворяющими условиям применения.

2. Анализ условий задачи. (Псевдо-) случайными элементами имитационной модели, реализуемой в системе с помощью ГПСЧ, являются (см. [1]): топология пространств; начальные состояния и законы изменения значений атрибутов; потоки событий, описывающие поведение и взаимодействие агентов и прочее. Очевидно, (псевдо-) случайный характер несут как «непрерывные», так и «дискретные» аспекты функционирования модели.

Следовательно, ГПСЧ должен служить «хорошим» источником как вещественных чисел с разными вероятностными распределениями, так и целых чисел, представимых в виде совокупности отдельных битов. Обычно к псевдослучайным числовым последовательностям предъявляются требования: 1) «равномерности», то есть равной вероятности появления различных чисел, би-