Из графика на рис. 1 следует, что регуляризация решения задачи производилась в диапазоне частот с 100Гц по 400Гц, смешивающие же спектральные матрицы в диапазоне с 0 Гц по 100Гц оставались неизменными.

Таким образом, предлагаемый алгоритм регуляризации, обеспечивает устойчивость решения задачи идентификации входных сигналов и отличается меньшей вычислительной сложностью за счет использования результатов анализа процесса миграции устойчивости.

Литература

1. Засов В.А, Никоноров Е.Н., Тарабардин М.А. Идентификация входных сигналов в задачах контроля и диагностики динамических объектов //Четвертая международная конференция по проблемам управления (МКПУ-IV): Сб. трудов. – М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. – 2009. - С. 1478-1486.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука.– 1979. – 385 с.
3. Засов В.А., Никоноров Е.Н. Алгоритм регуляризации решения задачи разделения сигналов, использующий результаты анализа устойчивости. // В сборнике: Труды 9-ой международн. конф. «Идентификация систем и задачи управления SICPRO-12». – М.: Институт проблем управления РАН, 2012. - С. - 949-962.

А.И. Заико

ИЗМЕРЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА ЗАИКО С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИЕЙ

(Уфимский государственный авиационный технический университет)

Метод гистограмм разработан для измерения плотностей вероятностей случайных **величин**. Традиционное применение его для случайных **процессов** возможно только для равномерных законов распределений случайного процесса со ступенчатой корреляционной функцией и погрешностей отсчетов при экстраполяции сигнала между ними [1]. В работе эта задача решена для случайного процесса Заико с экспоненциальной корреляционной функции при экстраполяции в будущее и интерполяции сигнала между отсчетами.

Реализация $x(t)$ случайного процесса, равномерно дискретизируются во времени с шагом T_0 и квантуется по уровню с шириной кванта $2\Delta_к$. Получаются дискретные отсчеты x_{il}, где i – номер отсчета, датируемого моментом времени t_i, а l – номер кванта, соответствующий уровню квантования x_l. Количество уровней квантования L, а номера уровней квантования $l = 1, 2, ..., L$ [2].

Оценка одномерной плотности вероятности при *экстраполяции в будущее* реализации процесса $x(t)$ по последнему отсчету

$$\left\langle w_1[X]\right\rangle_{э} = \frac{1}{T_0}\left\langle P(x_l)\right\rangle \int_0^{T_0} w_1[X|\lambda; x_l]d\lambda,$$

(1)

где $\left\langle P(x_l)\right\rangle -$ *частость* появления отсчета x_l и определяющих условную плотность распределения вероятности $w_1[X|\lambda; x_l]$; $\lambda -$текущее время между соседними отсчетами, $0 \le \lambda \le T_0$; T_0 – шаг дискретизации.

Оценка одномерной плотности вероятности при *интерполяции* реализации процесса между уровнями квантования x_l и x_k

$$\left\langle w_1[X]\right\rangle_{и} = \frac{1}{T_0}\left\langle P(x_l, x_k)\right\rangle \int_0^{T_0} w_1[X|\lambda; x_l, x_k]d\lambda, \quad (2)$$

где $\left\langle P(x_l, x_k)\right\rangle -$ частость появления отсчетов, следующих друг за другом и соответствующих уровням квантования x_l и x_k, определяющих плотность вероятности $w_1[X|\lambda; x_l, x_k]$.

Случайный процесс Заико с равномерным законом распределения плотности вероятности $w_1[X]$ описывается тремя параметрами: нижней $X_{н}$ и верхней $X_{в}$ границами изменения случайного процесса и нормированной корреляционной функцией $\rho(\tau)$, которую положим равной

$$\rho(\tau) = e^{-\alpha T_0}, \quad |\tau| \ge 0, \quad (3)$$

где $\tau -$ временной сдвиг; $\alpha -$ коэффициент динамичности, $0 \le \alpha < \infty$. Тогда процесс будет обладать еще и Марковским свойством [3].

Для него распределение плотности вероятности процесса

$$w_1[X] = \begin{cases} (X_{в} - X_{н})^{-1} = (2\Delta_{к} L)^{-1}, & X_{н} \le X \le X_{в}; \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Погрешность квантования по уровню случайна, стационарна и независима для отсчетов и от процесса. Опишем её для $l = 1, 2, ..., L$ равномерной плотностью вероятности при получении отсчета x_l

$$w[X|x_l] = \begin{cases} 1/2\Delta_{к}, & x_l - \Delta_{к} \le X \le x_l + \Delta_{к}; \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Экстраполяция. При экстраполяции в будущее реализация $x(t)$ случайного процесса с Марковским свойством восстанавливается по предыдущему отсчету. При равномерном распределении случайного процесса и погрешности квантования условная плотность вероятности $w_1[X|\lambda; x_{il}] = w_1[X|\lambda; x_l]$, где $0 \le \lambda < T_0$, также равномерна [3]:

$$w_1[X|\lambda; x_l] = \begin{cases} [X_{в}(\lambda; x_l) - X_{н}(\lambda; x_l)]^{-1}, & X_{н}(\lambda; x_l) \le X \le X_{в}(\lambda; x_l); \\ 0, \text{ в остальных случаях,} \end{cases} \quad (6)$$

где верхняя $X_{\text{в}}(\lambda; x_l)$ и нижняя $X_{\text{н}}(\lambda; x_l)$ границы динамического диапазона изменения случайного процесса при экстраполяции [3]:

$$X_{\text{в}}(\lambda; x_l) = X_{\text{в}} - (X_{\text{в}} - x_l - \Delta_{\text{к}})\mathrm{e}^{-\alpha\lambda}; \quad X_{\text{н}}(\lambda; x_l) = X_{\text{н}} + (x_l - \Delta_{\text{к}} - X_{\text{н}})\mathrm{e}^{-\alpha\lambda}, \quad 0 \le \lambda < T_0.$$

Выражение (6) при этом примет вид

$$w_1[X|\lambda; x_l] = (2\Delta_{\text{к}})^{-1} \times$$
$$\times \begin{cases} \left[L - (L-1)\mathrm{e}^{-\alpha\lambda}\right]^{-1}, X_{\text{н}} + (x_l - \Delta_{\text{к}} - X_{\text{н}})\mathrm{e}^{-\alpha\lambda} \le X \le X_{\text{в}} - (X_{\text{в}} - x_l - \Delta_{\text{к}})\mathrm{e}^{-\alpha\lambda}, 0 \le \lambda < T_0; \\ L^{-1}, \qquad X_{\text{н}} \le X \le X_{\text{в}}, \qquad \lambda \ge T_0; \\ 0, \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(7)

Подставив (7) в выражение (3) получим оценку $\langle w_1[X] \rangle_{\text{э}}$ одномерной плотности вероятности для $l = 1, 2, ..., L$ при экстраполяции в виде

$$\langle w_1[X] \rangle_{\text{э}} = \begin{cases} \dfrac{\langle P(x_l) \rangle}{2\Delta_{\text{к}} L \alpha T_0} \left[\begin{array}{l} \alpha T_0 + \ln \dfrac{L - (L-1)\mathrm{e}^{-\alpha T_0}}{1 + L\dfrac{x_l - \Delta_{\text{к}} - X}{X - X_{\text{н}}}}, X_{\text{н}} + (x_l - \Delta_{\text{к}} - X_{\text{н}})\mathrm{e}^{-\alpha T_0} \le X \le x_l - \Delta_{\text{к}}; \\ \alpha T_0 + \ln\left(L - (L-1)\mathrm{e}^{-\alpha T_0}\right), \quad x_l - \Delta_{\text{к}} \le X \le x_l + \Delta_{\text{к}}; \\ \alpha T_0 + \ln \dfrac{L - (L-1)\mathrm{e}^{-\alpha T_0}}{1 + L\dfrac{X - x_l - \Delta_{\text{к}}}{X_{\text{в}} - X}}, x_l + \Delta_{\text{к}} \le X \le X_{\text{в}} - (X_{\text{в}} - x_l - \Delta_{\text{к}})\mathrm{e}^{-\alpha T_0}; \end{array} \right] \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

(8)

Абсолютная погрешность $\Delta_{\text{э}}[X]$ оценки $\langle w_1[X] \rangle_{\text{э}}$ (8) при комплексном подходе к её определению для $l = 1, 2, ..., L$ [4]

$$\Delta_{\text{э}}[X] = \langle w_1[X] \rangle_{\text{э}} - w_1[X] = (2\Delta_{\text{к}} L)^{-1} \times$$
$$\times \begin{cases} -1, \quad X_{\text{н}} \le X \le X_{\text{н}} + (x_l - \Delta_{\text{к}} - X_{\text{н}})\mathrm{e}^{-\alpha T_0}; \quad X_{\text{в}} - (X_{\text{в}} - x_l - \Delta_{\text{к}})\mathrm{e}^{-\alpha T_0} \le X \le X_{\text{в}}; \\ \dfrac{\langle P(x_l) \rangle}{\alpha T_0} \left[\begin{array}{l} \alpha T_0 + \ln \dfrac{L - (L-1)\mathrm{e}^{-\alpha T_0}}{1 + L\dfrac{x_l - \Delta_{\text{к}} - X}{X - X_{\text{н}}}}, X_{\text{н}} + (x_l - \Delta_{\text{к}} - X_{\text{н}})\mathrm{e}^{-\alpha T_0} \le X \le x_l - \Delta_{\text{к}}; \\ \alpha T_0 + \ln\left(L - (L-1)\mathrm{e}^{-\alpha T_0}\right), \quad x_l - \Delta_{\text{к}} \le X \le x_l + \Delta_{\text{к}}; \\ \alpha T_0 + \ln \dfrac{L - (L-1)\mathrm{e}^{-\alpha T_0}}{1 + L\dfrac{X - x_l - \Delta_{\text{к}}}{X_{\text{в}} - X}}, x_l + \Delta_{\text{к}} \le X \le X_{\text{в}} - (X_{\text{в}} - x_l - \Delta_{\text{к}})\mathrm{e}^{-\alpha T_0}; \end{array} \right] - 1; \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

(9)

Интерполяция. При интерполяции реализация $x(t)$ случайного процесса с Марковским свойством условная плотность вероятности восстановления по двум отсчетам $w_1[X|\lambda; x_{il}, x_{(i+1)k}] = w_1[X|\lambda; x_l, x_k]$, где $0 \le \lambda \le T_0$ [3, 5], также равномерна

$$w_1[X|\lambda; x_l, x_k] = \begin{cases} [X_{\text{в}}(\lambda; x_l, x_k) - X_{\text{н}}(\lambda; x_l, x_k)]^{-1}, \ X_{\text{н}}(\lambda; x_l, x_k) \le X \le X_{\text{в}}(\lambda; x_l, x_k); \\ 0, \text{ в остальных случаях,} \end{cases} \quad (10)$$

где разность верхней $X_{\text{в}}(\lambda; x_l, x_k)$ и нижней $X_{\text{н}}(\lambda; x_l, x_k)$ границ динамического диапазона изменения случайного процесса [3, 5]:

$$X_{\text{в}}(\lambda; x_l, x_k) - X_{\text{н}}(\lambda; x_l . x_k) = 2\Delta_{\text{к}}\left[L - (L-1)\frac{\mathrm{e}^{-\alpha\lambda} + \mathrm{e}^{-\alpha(T_0-\lambda)}}{1+\mathrm{e}^{-\alpha T_0}}\right].$$

Подставив её в выражение (10), получим

$$w_1[X|\lambda; x_l, x_k] = (2\Delta_{\text{к}})^{-1} \times$$

$$\times\begin{cases} \left[L - (L-1)\dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha\lambda} + \mathrm{e}^{-\alpha(T_0-\lambda)}}{1+\mathrm{e}^{-\alpha T_0}}\right]^{-1}, \ X_{\text{н}} + (x_l - \Delta_{\text{к}} - X_{\text{н}})\dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha\lambda} - \mathrm{e}^{-\alpha(2T_0-\lambda)}}{1-\mathrm{e}^{-2\alpha T_0}} + \\ + (x_k - \Delta_{\text{к}} - X_{\text{н}})\dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha(T_0-\lambda)} - \mathrm{e}^{-\alpha(T_0+\lambda)}}{1-\mathrm{e}^{-2\alpha T_0}} \le X \le X_{\text{в}} - (X_{\text{в}} - x_l - \Delta_{\text{к}})\dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha\lambda} - \mathrm{e}^{-\alpha(2T_0-\lambda)}}{1-\mathrm{e}^{-2\alpha T_0}} - \\ \qquad - (X_{\text{в}} - x_k - \Delta_{\text{к}})\dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha(T_0-\lambda)} - \mathrm{e}^{-\alpha(T_0+\lambda)}}{1-\mathrm{e}^{-2\alpha T_0}}, \qquad 0 \le \lambda \le T_0; \\ L^{-1}, \qquad X_{\text{н}} \le X \le X_{\text{в}}, \qquad \lambda \ge T_0; \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Подставив это значение $w_1[X|\lambda; x_l, x_k]$ в выражения (4), получим оценку плотности распределения вероятности $\langle w_1[X]\rangle_{\text{и}}$ при интерполяции в виде:

$$\langle w_1[X]\rangle_{\text{и}} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1+\mathrm{e}^{-\alpha T_0}}{2\Delta_{\text{к}}\alpha T_0 A}\langle P(x_l)\rangle \ln\dfrac{L(1-\mathrm{e}^{-\alpha T_0})^2 + 4\mathrm{e}^{-\alpha T_0} + A(1-\mathrm{e}^{-\alpha T_0})}{L(1-\mathrm{e}^{-\alpha T_0})^2 + 4\mathrm{e}^{-\alpha T_0} - A(1-\mathrm{e}^{-\alpha T_0})}, & x_l - \Delta_{\text{к}} \le X \le x_l + \Delta_{\text{к}}, \\ & k = l; \\ 0, \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

(11)

где $A = \sqrt{L^2(1+\mathrm{e}^{-\alpha T_0})^2 - 4(L-1)^2\mathrm{e}^{-\alpha T_0}} = \sqrt{L^2(1-\mathrm{e}^{-\alpha T_0})^2 + 4(2L-1)\mathrm{e}^{-\alpha T_0}}$.

Абсолютная погрешность $\Delta_{\text{и}}[X]$ этой оценки

$$\Delta_{\text{и}}[X] = \langle w_1[X]\rangle_{\text{и}} - w_1[X] = (2\Delta_{\text{к}})^{-1} \times$$

$$\times\begin{cases} -L^{-1}, & X_{\text{н}} \le X \le x_l - \Delta_{\text{к}}; \quad x_l + \Delta_{\text{к}} \le X \le X_{\text{в}}; \\ \dfrac{1+\mathrm{e}^{-\alpha T_0}}{\alpha T_0 A}\langle P(x_l)\rangle \ln\dfrac{L(1-\mathrm{e}^{-\alpha T_0})^2 + 4\mathrm{e}^{-\alpha T_0} + A(1-\mathrm{e}^{-\alpha T_0})}{L(1-\mathrm{e}^{-\alpha T_0})^2 + 4\mathrm{e}^{-\alpha T_0} - A(1-\mathrm{e}^{-\alpha T_0})} - \dfrac{1}{L}, & x_l - \Delta_{\text{к}} \le X \le x_l + \Delta_{\text{к}}, \ k = l; \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

(12)

Из выражений (8) и (11) следует, что оценки плотностей вероятностей экстраполяции $\langle w_1[X]\rangle_{\text{э}}$ и интерполяции $\langle w_1[X]\rangle_{\text{и}}$ при $\alpha T_0 = 0$ равны

$$\langle w_1[X]\rangle_{\text{э}} = \langle w_1[X]\rangle_{\text{и}} = \frac{\langle P(x_l)\rangle}{2\Delta_{\text{к}}}, \quad x_l - \Delta_{\text{к}} \le X \le x_l + \Delta_{\text{к}},$$

а выражения (9) и (12) принимают вид

$$\Delta_{\text{э}}[X] = \Delta_{\text{и}}[X] = \frac{1}{2\Delta_{\text{к}}}\left[\langle P(x_l)\rangle - \frac{1}{L}\right], \quad x_l - \Delta_{\text{к}} \le X \le x_l + \Delta_{\text{к}}.$$

Аналогично при $\alpha T_0 \to \infty$ и $x_l - \Delta_{\text{к}} \le X \le x_l + \Delta_{\text{к}}$

$$\langle w_1[X]\rangle_{\text{э}} = \langle w_1[X]\rangle_{\text{и}} = \frac{\langle P(x_l)\rangle}{2\Delta_{\text{к}}L}; \qquad \Delta_{\text{э}}[X] = \Delta_{\text{и}}[X] = \frac{1}{2\Delta_{\text{к}}L}\left[\langle P(x_l)\rangle - 1\right].$$

Просуммировав последние выражения по l, получим:

$$w_1[X] = \sum_{l=1}^{L}\langle w_1[X]\rangle_{\text{э}} = \sum_{l=1}^{L}\langle w_1[X]\rangle_{\text{и}} = \frac{1}{2\Delta_{\text{к}}L}, \quad \sum_{l=1}^{L}\Delta_{\text{э}}[X] = \sum_{l=1}^{L}\Delta_{\text{и}}[X] = 0, \; X_{\text{н}} \le X \le X_{\text{в}}.$$

Заключение. При измерении плотности вероятности эргодического случайного процесса на гистограмму влияют не только ширина столбцов $2\Delta_{\text{к}}$, но и их «размытие», а также взаимное наложение. Учесть эти факторы можно, восстанавливая реализацию процесса между отсчетами. При этом переход от экстраполяции к интерполяции сигнала между отсчетами позволяет повысить точность измерения при $0.001 \le \alpha T_0 \le 1$ или увеличить шаг дискретизации T_0 на два порядка. Для нахождения погрешностей оценок плотности вероятности $\langle w_1[X]\rangle$ с учетом всех факторов необходим комплексный подход к их определению. Приведенные результаты позволяют не только учесть эти особенности, но и оптимизировать измерения плотности распределения вероятности $\langle w_1(X)\rangle$ эргодических случайных процессов.

Литература

1. Заико А.И. и др**.** Измерение плотности вероятности эргодического случайного процесса // Труды междунар. НТК «Перспективные информационные технологии (ПИТ 2015)».– Т.1.– Самара: СНЦ РАН, 2015.– С.54-60.

2. Свид. 72200700005. Случайный процесс Заико А.И. с равномерным законом распределения. Математическая модель // Заико А.И.; зарег. ФГУП «ВНТИЦ» 28.02.07 г.–10 с.

3. Заико А. И. Случайные процессы. Модели и измерения: учеб. пособие.– М.: Изд-во МАИ, 2006.–207 с.

4. Заико А. И. Комплексный подход к определению погрешностей // Датчики и Системы.–2007.–№ 8.–С. 52-59

5. Zaiko A. I. Random signal with uniform distribution // Measurement Technigues.– 1999.– v. 42.– Juni.– P. 11-13.