ции с элементами научной школы для молодежи «Перспективные информационные технологии для авиации и космоса» (ПИТ-2010), Самара, 2010, с.70-71.

2. Еремеев, А.В. Задача о покрытии множества: сложность, алгоритмы, экспериментальные исследования [Текст]/ Еремеев А.В., Заозерская Л.А., Колоколов А.А: – Дискретный анализ и исследование операций, июль—декабрь 2000. Серия 2. Том 7, № 2, с.22-46.

3. Ху, Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях [Текст]/ Ху Т. - М.: Мир, 1974, - 520с.

4. Нгуен, Минь Ханг. Применение генетического алгоритма для задачи нахождения покрытия множества [Текст]/ Нгуен Минь Ханг:- Труды института системного анализа РАН, Изд.: Институт системного анализа РАН, Москва, 2008, том 33, с. 206-219.

А.И. Заико

ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭРГОДИЧЕСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

(Уфимский государственный авиационный технический университет)

Эргодическое свойство стационарных случайных процессов позволяет находить их вероятностные характеристики по одной реализации $x(t)$ осреднением по времени t, что существенно упрощает и удешевляет эксперимент [1, 2]. Однако практически это свойство используется только для определения математического ожидания m_x, дисперсии D_x и автокорреляционных $R_x(\tau)$ или взаимных корреляционных $R_{xy}(\tau)$ функций, где $\tau-$сдвиг во времени между двумя сечениями $x(t)$ и $x(t+\tau)$ процесса, а также реализациями $x(t)$ и $y(t+\tau)$ совместно эргодических процессов. Распределения вероятностей, плотностей вероятностей и их характеристические функции так до настоящего времени не находили. В докладе приводятся известные и введенные автором определения этих характеристик.

Одномерное распределение вероятности $W_1[X]$ выражается через одномерную плотность распределения вероятности $w_1[X]$, и определено выражением [2–4]

$$W_1[X]=\int_{-\infty}^{X} w_1[Z]dZ=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}1[X-x(t)]dt, \qquad (1)$$

где $1[X-x(t)]=\begin{cases}0, & X<x(t);\\ 1, & X>x(t)\end{cases}-$единичная функция [5]; $2T-$длительность реализации $x(t)$.

Аналогично определяется двумерное распределение вероятности $W_2[X_1;X_2,\tau]$ через соответствующую плотность распределения вероятности $w_2[X_1;X_2,\tau]$ в виде [2–4]

$$W_2[X_1;X_2,\tau]=\int_{-\infty}^{X_1}\int_{-\infty}^{X_2}w_2[Z_1;Z_2,\tau]dZ_1dZ_2=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}1[X_1-x(t)]1[X_2-x(t+\tau)]dt. \tag{2}$$

Наконец n-мерное распределение вероятности $W_n[X_1;X_2,\tau_{12};...;X_n,\tau_{1n}]$ определяется следующим образом [2–4]

$$\begin{aligned}W_n[X_1;X_2,\tau_{12};...;X_n,\tau_{1n}]&=\int_{-\infty}^{X_1}...\int_{-\infty}^{X_n}w_n[Z_1;Z_2,\tau_{12};...;Z_n,\tau_{1n}]dZ_1...dZ_n=\\&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}1[X_1-x(t)]1[X_2-x(t+\tau_{12})]...1[X_n-x(t+\tau_{1n})]dt,\end{aligned} \tag{3}$$

где $\tau_{1i}=t_i-t_1-$временной сдвиг между первым и i-м сечениями процесса, $i=2,3,...,n.$

Двумерное взаимное распределение вероятности $W_2[X;Y,\tau]$ совместно эргодических процессов с реализациями $x(t)$ и $y(t+\tau)$ выражается через двумерную взаимную плотность распределения вероятности $w_2[X;Y,\tau]$ и вводится следующим образом [2–4]

$$W_2[X;Y,\tau]=\int_{-\infty}^{X}\int_{-\infty}^{Y}w_2[Z;H,\tau]dZdH=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}1[X-x(t)]1[Y-y(t+\tau)]dt. \tag{4}$$

Одномерная плотность распределения вероятности $w_1[X]$ находится из определения (1) и равна [2–4]

$$w_1[X]=\frac{dW_1[X]}{dX}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\delta[X-x(t)]dt, \tag{5}$$

где $\delta[X-x(t)]=\begin{cases}\infty, & X=x(t);\\ 0, & X\neq x(t)\end{cases}-$ дельта-функция Дирака, которая связана с единичной функцией $1[X-x(t)]$ следующими соотношениями [5]:

$$\delta[X-x(t)]=\frac{d1[X-x(t)]}{dX} \quad \text{и} \quad 1[X-x(t)]=\int_{-\infty}^{X}\delta[Y-x(t)]dY.$$

Двумерная плотность распределения вероятности $w_2[X_1;X_2,\tau]$ находится из выражения (2) и равна [2–4]

$$w_2[X_1;X_2,\tau]=\frac{d^2W_2[X_1;X_2,\tau]}{dX_1dX_2}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\delta[X_1-x(t)]\,\text{д}[X_2-x(t+\tau)]dt,$$

а n-мерная плотность распределения вероятности $w_n[X_1;X_2,\tau_{12};...;X_n,\tau_{1n}]$ из выражения (3) [2–4]

$$w_n[X_1;X_2,\tau_{12};...;X_n,\tau_{1n}]=\frac{d^nW_1[X_1;X_2,\tau_{12};...;X_n,\tau_{1n}]}{dX_1...dX_n}=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\delta[X_1-x(t)]\delta[X_2-x(t+\tau_{12})]..\delta[X_n-x(t+\tau_{1n})]dt.$$

Двумерная взаимная плотность распределения вероятности $w_2[X;Y,\tau]$ совместно эргодических процессов согласно (4) равна [2–4]

$$w_2[X;Y,\tau]=\frac{d^2W_2[X;Y,\tau]}{dXdY}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\delta[X-x(t)]\delta[Y-y(t+\tau)]dt. \qquad (6)$$

Одномерная характеристическая функция $\theta_1[j\nu]$ согласно (5) равна [2–4]

$$\theta_1[j\nu]=\int_{-\infty}^{\infty}w_1[X]\mathrm{e}^{j\nu X}dX=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\mathrm{e}^{j\nu x(t)}dt.$$

Аналогично определяется n-мерная характеристическая функция $\theta_n[j\nu_1;j\nu_2,\tau_{12};...;j\nu_n,\tau_{1n}]$ [2–4]

$$\theta_n[j\nu_1;j\nu_2,\tau_{12};...;j\nu_n,\tau_{1n}]=\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}w_n[X_1;X_2,\tau_{12};...;X_n,\tau_{1n}]\times$$

$$\times\,\mathrm{e}^{j(\nu_1X_1+\nu_2X_2+\dots+\nu_nX_n)}dX_1...dX_n=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\mathrm{e}^{j[\nu_1x(t)+\nu_2x(t+\tau_{12})+\dots+\nu_nx(t+\tau_{1n})]}dt.$$

Двумерная взаимная характеристическая функция $\theta_2[j\nu;j\eta,\tau]$ совместно эргодических процессов вводится аналогично и с учетом (6) равна

$$\theta_2[j\nu;j\eta,\tau]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}w_2[X;Y,\tau]\mathrm{e}^{j(\nu X+\eta Y)}dXdY=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\mathrm{e}^{j[\nu x(t)+\eta y(t+\tau)]}dt.$$

Введенные определения распределений позволили получить с их помощью хорошо известные определения вероятностных характеристик случайных процессов [6, 7]: математическое ожидание

$$m_x=\int_{-\infty}^{\infty}Xw_1[X]dX=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)dt,$$

дисперсию

$$D_x=\int_{-\infty}^{\infty}(X-m_x)^2w_1[X]dX=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[x(t)-m_x]^2dt,$$

корреляционную функцию

$$R_x(\tau) = \int \int\limits_{-\infty}^{\infty} (X_1 - m_x)(X_2 - m_x) w_2[X_1; X_2, \tau] dX_1 dX_2 =$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} [x(t) - m_x][x(t+\tau) - m_x] dt,$$

взаимную корреляционную функцию двух процессов

$$R_{xy}(\tau) = \int \int\limits_{-\infty}^{\infty} (X - m_x)(Y - m_y) w_2[X; Y, \tau] dX dY = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} [x(t) - m_x][y(t+\tau) - m_y] dt.$$

Вытекающие из них спектральные характеристики случайного процесса определяются следующим образом: спектральная плотность мощности

$$S_x(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} B_x(\tau) \mathrm{e}^{-j\omega\tau} d\tau = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \mathrm{e}^{-j\omega\tau} d\tau + m_x^2 2\pi\delta(\omega),$$

взаимная спектральная плотность мощности двух процессов

$$S_{xy}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} B_{xy}(\tau) \mathrm{e}^{-j\omega\tau} d\tau = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) \mathrm{e}^{-j\omega\tau} d\tau + m_x m_y 2\pi\delta(\omega).$$

Таким образом, введенные определения распределений вероятностей и плотностей распределений вероятностей существенно расширяют возможности описания эргодических случайных процессов. Они позволяют не только получить с их помощью известные моментные характеристики случайных процессов, но и ввести характеристические функции, которые для описания эргодических процессов практически не применялись [8].

Литература

1. ГОСТ 21878–76 Случайные процессы и динамические системы. Термины и определения.–Введ. 1.07.77 г.–М.: Изд-во стандартов, 1976.– 30 с.

2. Заико А. И. Случайные процессы. Модели и измерения: учеб. пособие.– М.: МАИ, 2006.– 297 с.

3. 72200700005 Случайный процесс Заико А.И. с равномерным законом распределения. Математическая модель / А.И. Заико. Зарег. 28.02.07 г.; ФГУП «ВНТИЦ».– 10 с.

4. Заико А. И. Определения и алгоритмы измерения характеристик эргодических случайных процессов // Метрология.– 2003.– № 4.– С. 3–5.

5. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники.– Кн. 1.– М.: Сов. Радио. 1974.– 552 с.

6. Грибанов Ю. И., Мальков В. Л. Погрешности и параметры цифрового спектрально-корреляционного анализа.– М.: Радио и связь, 1984.– 160 с.

7. Ланге Ф. Г. Статистические аспекты построения измерительных систем.– М.: Радио и связь, 1981.– 168 с.

8. Заико А. И. Определения характеристик эргодических случайных процессов // Труды междунар. конф. «Датчики и системы: методы, средства и технологии получения и обработки измерительной информации».– Пенза: ПГУ, 2012.– С. 104.