И.М. Куликовских, С.А. Прохоров, Ю.А. Наумова

ФОРМИРОВАНИЕ АДАПТИВНОЙ ПАМЯТИ ОБОБЩЕННОГО ФИЛЬТРА ЛАГЕРРА НА ОСНОВЕ ОПТИМИЗАЦИИ СЛОЖНОГО ПОЛЮСА

(Самарский национальный исследовательский университет
им. академика С.П. Королева)

Нерекурсивные фильтры или фильтры с конечной импульсной характеристикой (КИХ) требует значительных ресурсов на реализацию, так как имеют, как правило, высокий порядок. Характерной особенностью такого фильтра является ограниченность по времени его импульсной характеристики. КИХ-фильтр называется нерекурсивным из-за отсутствия обратной связи [1]:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{m_d} b_i x(n-i), \qquad (1)$$

где m_d - порядок фильтра, b_i - коэффициенты фильтра, $x(n)$ и $y(n)$- входной и выходной сигналы, соответственно.

Импульсная переходная характеристика КИХ-фильтра, заданного разностным уравнением (1), имеет вид:

$$h(n) = \sum_{i=0}^{m_d} b_i \delta(n-i),$$

откуда передаточная функция, заданная s - преобразованием:

$$H(s) = \sum_{i=0}^{m_d} h(n) e^{-is}.$$

В свою очередь, БИХ-фильтр с порядком обратной связи m_r задается уравнением [1]:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{m_d} b_i x(n-i) - \sum_{j=1}^{m_r} a_j y(n-j),$$

которое сводится к следующим импульсной и переходной характеристикам:

$$h(n) = \sum_{i=0}^{m_d} b_i \delta(n-i) - \sum_{j=1}^{m_r} a_j h(n-j),$$

$$H(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m_d} b_i e^{-is}}{1+\sum_{j=1}^{m_r} a_j e^{-js}}. \qquad (2)$$

Основным свойством таких фильтров является то, что их импульсная переходная характеристика имеет бесконечную длину во временной области, а передаточная функция имеет дробно-рациональный вид.

Широкое применение при решении задач идентификации, фильтрации и анализе динамических систем нашли непрерывные и дискретные БИХ-фильтры Лагерра [2-4], позволяющие представить длинные временные последовательности в виде более короткого спектра разложения. Достоинствами данных фильтров по сравнению с другими являются: 1) эффективная аппаратная реализация в виде последовательности ячеек бесконечной полосы [3,5]; 2) понижение порядка фильтра через сведение коэффициентов фильтра к нулю с помощью оптимизации его полюса γ [3,6,7]:

$$\Lambda_k(s,\gamma) = \frac{\gamma}{s+\gamma/2}\left(\frac{s-\gamma/2}{s+\gamma/2}\right)^k,$$

где $\Lambda_k(s,\gamma)$ - s-преобразование импульсной переходной характеристики, заданное выражением (1).

При описании нестационарных систем и систем с запаздыванием данные достоинства могут быть усилены за счет обобщения фильтров Лагерра и включения дополнительного параметра α [8-10], характеризующего “забывание” информации, поступающей на вход фильтра:

$$\Lambda_k(s,\gamma,\alpha) = \left(\frac{\gamma}{s+\gamma/2}\right)^{\alpha+1}\left(\frac{s-\gamma/2}{s+\gamma/2}\right)^{k}.$$

Наличие бесконечной памяти у фильтра позволяет значительно снизить погрешность фильтрации, что при этом требует дополнительной регулировки скорости сходимости процедуры поиска коэффициентов фильтра. Цель данной работы заключается в формировании адаптивной памяти обобщенного фильтра Лагерра с помощью *сложного полюса* фильтра (γ,α), заданного непосредственно полюсом γ и параметром забывания α.

Эффективность сформированной адаптивной модели будет анализироваться на основе анализа *скорости сходимости* процедуры поиска параметров фильтра и величины погрешности фильтрации при прогнозировании следующего значения.

Результаты исследования

Рассмотрим задачу прогнозирования функции $h(T) = e^{-T}\left(\cos(5T) + \frac{1}{5}\sin(5T)\right)$, где $T = i\Delta t,\ \Delta t = 0.1, i = 0..N, N = 450$, к значениям которой был добавлен гауссовский шум $N(0,1)$. В качестве метрики для построения оценок и прогноза использовалась взвешенная квадратичная функция потерь. В качестве ортогональной функции для синтеза фильтра со сложным полюсом (γ,α) выбрана:

$$L_1(\tau,\gamma) = e^{-\frac{\gamma\tau}{2}}(\alpha + 1 - \gamma\tau).$$

На рисунке 1 представлены кривые для модели фильтра без адаптивной памяти (стандартный алгоритм, синий график) и с адаптивной памятью (модифицированный алгоритм, оранжевый график). Данные кривые, полученные в ходе исследования зависимости усредненных значений функции потерь, ошибки прогноза и скорости сходимости (числа итераций) от объема выборки, изменяющемся в интервале от 50 до 450 при фиксированном числе проводимых экспериментов равным 10 и скользящем окне равным 5. В таблице 1 представлены полученные значения функции потерь на разных объемах выборки, а также оптимальные значения дополнительных параметров γ и α.

Как видно, предложенная модель адаптивной памяти с учетом сложного полюса, позволяет повысить скорость сходимости процедуры поиска коэффициентов фильтра, обеспечивая минимум погрешности и более низкую ошибку прогноза. Предложенный подход к формированию адаптивной памяти на основе оптимального сложного полюса позволяет рассматривать обобщенный БИХ-фильтр Лагерра в контексте задачи обучения машин и робототехнических комплексов.

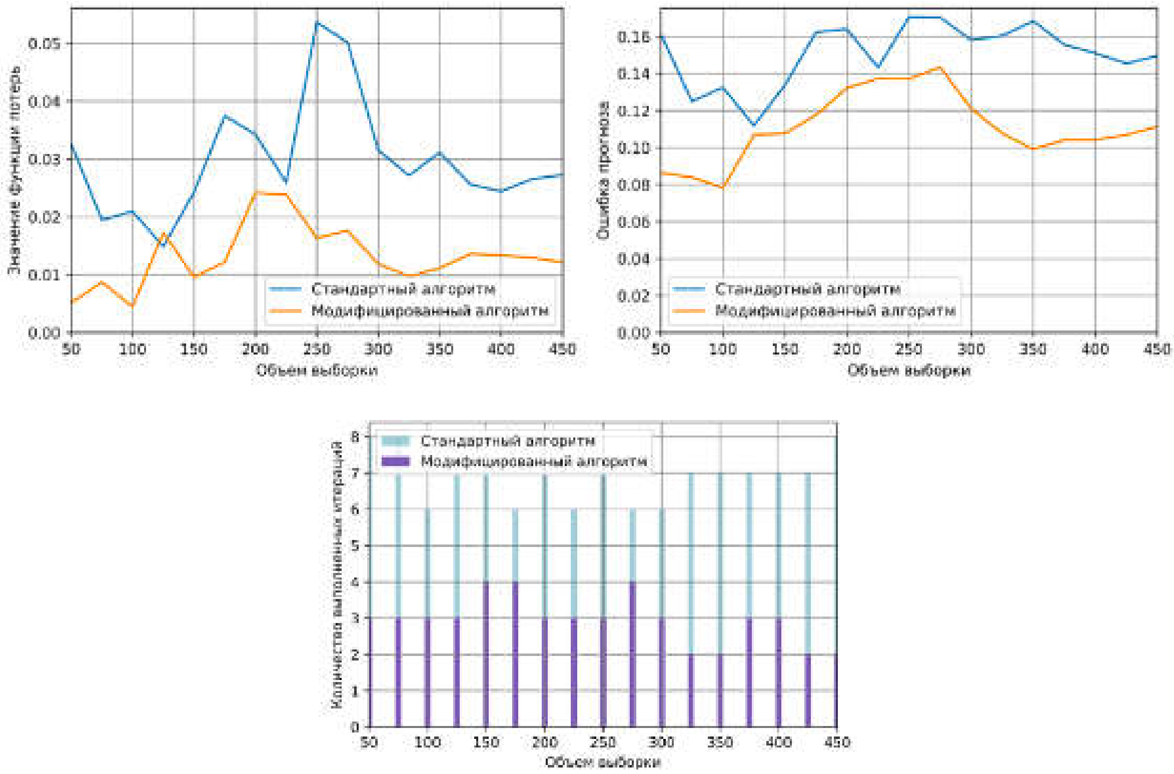

Рисунок 1 – Кривые усредненных значений функции потерь, ошибки прогноза и скорости сходимости

Таблица 1 – Сравнение стандартного и модифицированного алгоритмов фильтрации

Объем выборки	Значение пары (γ,α)	Стандартный алгоритм	Модифицированный алгоритм
		Значение функции потерь	
50	(0.0, -0.81661)	0.03266	0.00514
100	(0.0, -0.87831)	0.02095	0.00448
150	(0.00265, -0,91142)	0.02427	0.00958
200	(0.00035, -0.91334)	0.03427	0.02418
250	(0.00022, -0.90281)	0.05362	0.01635
300	(0.00148, -0.87307)	0.03151	0.01187
350	(0.00003, -0.84782)	0.03116	0.01117
400	(0.0, -0.84651)	0.02441	0.01332
450	(0.00166, -0.85532)	0.02729	0.01211

Благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (проект № МК-6218.2018.9) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-37-00219).

Литература

1. Лэм Г. Аналоговые и цифровые фильтры. М: Мир, 1982. - 592 с.
2. Нургес Ю. Лагерровы модели в задачах аппроксимации и идентификации//АиТ. - 1987. - 3. - С. 88-96.
3. Прохоров С.А. Аппроксимативный анализ случайных процессов. - 2-е изд., перераб. и доп. - Самара: СНЦ РАН, 2001. - 380 с.
4. King R.E., Paraskevopoulos P.N. Digital Laguerre filters//Int. J. Circuit Theory and Appl. - 1977. - 5(1). - pp. 81-91.
5. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. - Спб.: Питер, 2002. - 608 с.
6. Clowes G. Choice of the time-scaling factor for linear system approximations using orthonormal Laguerre functions//IEEE Trans. Automatic Control. - 1965. - 10. - pp. 487-489.
7. Волков И.И., Прохоров С.А. Способ повышения точности аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра//Приборостроение. - 1974. - 17. - С. 66-72.
8. den Brinker A.C. Meixner-like functions having a rational z-transform//International Journal of Circuit Theory and Applications. - 1995. - 23. - pp. 237-246.
9. den Brinker A.C., Belt H.J. Optimal free parameters in orthonormal approximations//IEEE Trans. Sig. Proc. - 1998. - 46. - pp. 2081-2087.
10. Prokhorov S.A., Kulikovskikh I.M. Unique condition for generalized Laguerre functions to solve pole position problem//Signal Processing. - 2015. - 108. - pp. 25-29.

И.М. Куликовских, К.А. Кузнецова, К.А. Панова, С.А. Прохоров

ПОВЫШЕНИЕ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ГРАДИЕНТНЫХ МЕТОДОВ С РАСШИРЕННОЙ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ ПОТЕРЬ

(Самарский национальный исследовательский университет
им. академика С.П. Королева)

Пусть имеется выборка наблюдений $\{\mathrm{x}_i, y_i\}_{i=1}^m$, где $\mathrm{x}_i \in \mathrm{R}^\mathrm{n}$ и $y_i \in \{0,1\}$. Поставим задачу бинарной классификации

$$L(\boldsymbol{\theta}) \underset{\boldsymbol{\theta}}{\rightarrow} \min, \tag{1}$$

где функция потерь с вектором весов $\boldsymbol{\theta} \in \mathrm{R}^\mathrm{n}$ задана в виде

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^m l(y_i \boldsymbol{\theta}^{\boldsymbol{T}} \mathrm{x}_i). \tag{2}$$

Примем $\forall i: y_i = 1, \|\mathrm{x}_i\| < 1$ [1].

Задача (1) может быть решена аналитически в виде нормального уравнения, однако наиболее часто на практике прибегают к градиентным методам. Метод градиентного спуска или метод первого порядка предполагает