



О.В Пономарева, А.В. Пономарев, Д.Р. Гиззатуллин

## ДИСКРЕТНО-ЧАСТОТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

(Ижевский государственный технический университет им. М. Т. Калашникова)

В теории спектрального и векторного анализа<sup>1</sup> электрических измерительных сигналов (ЭИС) [1-3] широко применяется теоретическое понятие: *дискретно-временное преобразование Фурье (ДВПФ)*. ДВПФ некоторой последовательности  $y(n)$ ,  $n = \overline{-\infty, +\infty}$ , определяется как ее  $z$ -преобразование на единичной окружности:

$$S_y(f) = S_y(z) \Big|_{z=\exp(+j2\pi f)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) \cdot \exp(-j2\pi \cdot f \cdot n), -1/2 \leq f \leq 1/2. \quad (1)$$

Таким образом, ДВПФ последовательности  $y(n)$  ставит в соответствие ей непрерывный спектр  $S_y(f)$ .

Теория ДПФ [1-8] базируется на трех основных и взаимосвязанных положениях: определение сигнала на конечном интервале ( $N$ -интервале), определение сдвига сигнала как циклической перестановки его отсчетов и определение полной системы дискретных экспоненциальных базисных функций  $W_N^{kn}$ :

$$S_N(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}; \quad W_N = \exp(-j2\pi / N), \quad k = \overline{0, (N-1)}. \quad (2)$$

Сопоставляя соотношения (1) и (2), несложно установить, что коэффициенты ДПФ  $S_N(k)$  равны значениям ДВПФ *взвешенной периодической последовательности*  $x_p(n)$ , определяемой циклической перестановкой отсчетов последовательности  $x(n)$ ,  $n = \overline{0, N-1}$  внутри  $N$ -интервала (*взвешенное ДВПФ*) в точках  $2\pi k / N$ ,  $k = \overline{0, N-1}$  на единичной окружности (рис. 1).

При практическом применении ДПФ возникает ряд проблем, появление которых связано с проявлением специфических эффектов, сопровождающих его использование [4]. Отметим главный из них – *эффект частотола в частотной области*, суть которого в том, что ДПФ не дает ответа на вопрос: каковы значения спектра, определяемого взвешенным ДВПФ, между отсчетами  $2\pi k / N$ ;  $k = \overline{0, N-1}$  на единичной окружности?

---

<sup>1</sup> При одной группе измерений требуется получение полной информации о частотах, амплитудах и фазах синусоидальных составляющих исследуемого сигнала. Такого рода анализ сигнала называется векторным анализом. Другая не менее обширная группа измерений не включает определения фазовых соотношений между синусоидальными составляющими. Такого рода анализ сигнала называется спектральным анализом.

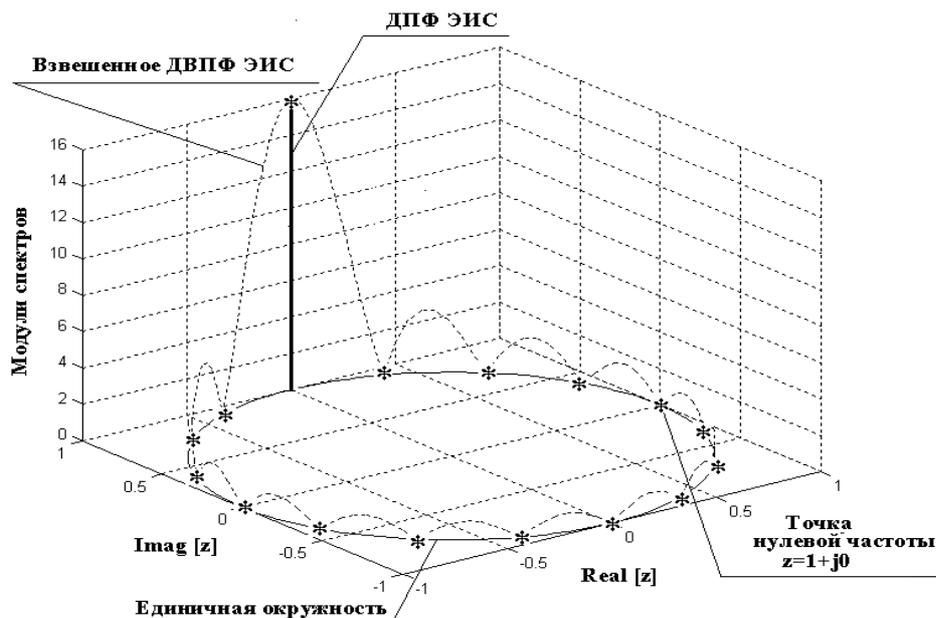


Рис. 1. Сигнал  $x(n) = \exp((j \cdot 2\pi / N) \cdot k \cdot n)$ ,  $n = \overline{0, N-1}$ ,  $N = 16$ ,  $k = 4$ ; взвешенное ДВПР сигнала  $x(n)$  обозначено пунктирной линией, значения ДПФ сигнала обозначены звездочками \*;  $z = 2\pi / N$

Для их определения в теории спектрального и векторного анализа сигналов применяется процедура искусственного увеличения интервала определения  $x(n)$ ,  $n = \overline{0, N-1}$  за счет добавления нулевых отсчетов во временной области [1] – операция дополнения нулями во временной области (ОДНВ).

Рассмотрим вопросы измерения на конечных интервалах временных спектров детерминированных дискретных сигналов. Введем в теорию спектрального и векторного анализа на конечных интервалах новую форму преобразования Фурье – дискретно-частотное преобразование Фурье (ДЧПФ).

Пусть задана некоторая последовательность  $S(k)$ ,  $k = -\infty, +\infty$ , ДЧПФ которой определим следующим образом:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(k) \cdot \exp(+j2\pi \cdot k \cdot t), \text{ где } -1/2 \leq t \leq +1/2. \quad (3)$$

Соотношением (3) определяется непрерывный временной спектр, соответствующий дискретной последовательности  $S(k)$ ,  $k = -\infty, +\infty$ .

С учетом указанных выше положений, непосредственно следует вывод о том, что дискретный измерительный сигнал  $x(n)$ ,  $n = \overline{0, N-1}$  равен значениям непрерывного временного спектра, задаваемого ДЧПФ взвешенной последовательности  $S_N(k)$ ,  $k = \overline{0, N-1}$  (взвешенное ДЧПФ) при значениях переменной  $n = \overline{0, N-1}$ :



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_N(k) \cdot \exp(+j2\pi \cdot k \cdot t) = \sum_{k=0}^{N-1} S_N(k) \cdot \exp(+j2\pi \cdot k \cdot t), 0 \leq t \leq 1. \quad (4)$$

Таким образом, исходный дискретный измерительный сигнал  $x(n)$ ,  $n = \overline{0, N-1}$  является, только одним из возможных временных спектров дискретного измерительного сигнала  $x(n)$ . Отсутствие же ответа на вопрос, каковы значения временного спектра, определяемого ДЧПФ последовательности  $x(n)$ ,  $n = \overline{0, N-1}$  между значениями переменной  $n = \overline{0, N-1}$ , порождает эффект частотола во временной области.

Для определения значений временного спектра, задаваемого ДЧПФ взвешенной последовательности  $S_N(k)$ ,  $k = \overline{0, N-1}$ , в промежутках между значениями  $x(n)$ ,  $n = \overline{0, N-1}$  можно применить искусственное увеличение интервала определения  $S_N(k)$ ,  $k = \overline{0, N-1}$  за счет добавления нулевых отсчетов в частотной области [5] (*операция дополнения нулями в частотной области (ОДНЧ)*). Данная операция уменьшает влияние эффекта частотола во временной области на результаты дискретных измерений временных спектров и позволяет за счет уменьшения шага дискретизации во времени измерять временные спектры, задаваемые взвешенным ДЧПФ.

Однако ОДНЧ, аналогично ОДНВ, имеет следующие существенные недостатки, которые проявляются при реализации ОДНЧ процессорными измерительными средствами (ПриС): необходимость существенного расширения оперативной памяти ПриС для хранения нулевых значений спектра; проведение непроизводительных вычислений ПриС с нулевыми значениями спектра; фиксированность шага дискретизации по времени при измерении временного спектра.

В работах [5-13] предложены эффективные методы измерения ДЧПФ на быстрых алгоритмах модифицированного параметрического дискретного преобразования Фурье.

В заключение отметим некоторые предметные области приложений дискретно-частотного преобразования Фурье: акустика, дефектоскопия, программное обеспечение вновь вводимых функций ПК и КПК в системе «*объект-измерение-обработка*», геофизика, спектроскопия, космические исследования, исследования поведения зданий и сооружений при землетрясениях, виброакустическое функциональное диагностирование механических объектов, компьютерная медицинская диагностика, пассивная и активная гидроакустика.

### Литература

1. Пономарева О.В., Пономарев А.В. Восстановление значений непрерывных частотных спектров дискретных сигналов методом параметрического дискретного преобразования Фурье// Вестник Ижевского Государственного Технического Университета. 2015.- №3.(67). -С. 88-91.



2. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Пономарев А.В. Метод эффективного измерения скользящего параметрического спектра Фурье// Автометрия. 2014. Т.50.-№2.-С.31-38.
3. Пономарев В.А., Пономарева О.В., Пономарев А.В., Пономарева Н.В. Обобщение алгоритмов Герцеля и скользящего параметрического дискретного преобразования Фурье // Цифровая обработка сигналов. 2014. -№ 1. -С. 3-11.
4. Пономарева О.В., Алексеев В.А., Пономарев А.В. Цифровой периодограммный анализ и проблемы его практического применения // Вестник Ижевского Государственного Технического Университета. 2013.- №2.(58). -С. 130-133.
5. Пономарева О.В. Быстрое параметрическое дискретное преобразование Фурье действительных последовательностей// Цифровая обработка сигналов. 2012.-№ 2.- С.2-5.
6. Пономарева О.В., Алексеев В.А., Пономарев А.В. Быстрый алгоритм измерения спектра действительных сигналов методом апериодического дискретного преобразования Фурье // Вестник Ижевского Государственного Технического Университета имени М.Т.Калашникова. 2014.- №2.(62). -С. 106-109.
7. Пономарева О.В. Измерение спектров комплексных сигналов на конечных интервалах методом апериодического дискретного преобразования Фурье// Интеллектуальные системы в производстве. 2014.- №1 (23).- С. 100-107.
8. Пономарева О.В., Пономарев А.В., Пономарева Н.В. Метод быстрого вычисления дискретного преобразования Фурье действительных последовательностей// Цифровая обработка сигналов. 2013. -№ 2. -С. 10-15.
9. Пономарева О.В., Пономарева Н.В. Модификация фильтра на основе частотной выборки для решения задач цифровой обработки случайных процессов со скрытыми периодичностями //Интеллектуальные системы в производстве. 2012.- №2 (20). -С. 122-129.
10. Пономарева О.В. Вероятностные свойства спектральных оценок, полученных методом параметрического дискретного преобразования Фурье //Интеллектуальные системы в производстве. 2010. -№2 (16).- С.36-41.
11. Алексеев В.А., Пономарев В.А., Пономарева О.В. Методология определения погрешностей измерения вероятностных характеристик случайных процессов, реализуемых процессорными измерительными средствами //Интеллектуальные системы в производстве. 2010.- №2 (16). -С. 91-99.
12. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Модификация дискретного преобразования Фурье для решения задач интерполяции и свертки функций // Радиотехника и электроника. 1984.- Т.29.- №8.-С. 1561-1570.
13. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Временные окна при оценке энергетических спектров методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Автометрия. 1983.-№4.-С.39-45.