4. Зотеев В.Е. Параметрическая идентификация диссипативных механических систем на основе разностных уравнений – М.: Машиностроение, 2009. – 344 с.

5. Зотеев В.Е. Математические основы построения разностных уравнений для задач параметрической идентификации / Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки, 2008, №2(17). С.192-202.

В.Е. Зотеев, Е.В. Небогина

# ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

(Самарский государственный технический университет)

Проблема увеличения ресурса эксплуатационных сроков конструкций при различных режимах работы и снижение их материалоемкости является одной из важнейших задач, которые решает механика деформируемого твердого тела. Для решения упругопластических задач предельного состояния особенно остро стоит вопрос описания полной диаграммы упругопластического деформирования при растяжении-сжатии.

Определяющие уравнения [1], описывающие процессы неупругого деформирования, построены таким образом, что они не только отражают явления, наблюдаемые в проводимых экспериментах, но ориентированы на решение всевозможных технических задач. В то же время полное представление о процессах неупругого деформирования и разрушения материала должно быть основано не только на экспериментальных данных; необходимо учитывать сложную структуру самого материала и его свойства. Например, при построении моделей со сложными реологическими свойствами можно использовать структурные математические модели, дающие возможность описать различные нелинейные эффекты неупругого деформирования. При этом математическое описание процесса накопления повреждений в результате пластического деформирования требует достоверной оценки параметров модели на основе полной диаграммы упругопластического деформирования, построенной по результатам эксперимента.

Проблема построения математической модели процесса упругопластического деформирования на основе статистической обработки результатов эксперимента методами нелинейного оценивания [2,3] заключается в том, что решение системы определяющих уравнений [1] построено в форме неявной функциональной зависимости, содержащей под интегралом искомую функцию:

$$y(x) = \exp\left(-\gamma\int_{x_{\text{пр}}}^{x}\left(x - x_{\text{пр}}\right)^{m} y(x)\,dx\right)\left[\sigma_{\text{пр}} + \sqrt[n]{\frac{x - x_{\text{пр}}}{a}}\right], \qquad x \ge x_{\text{пр}}, \qquad (1)$$

где $y(x)=\sigma_0\left(e^p\right)$– исследуемая зависимость напряжения $\sigma_0$ от пластической деформации $e^p$, $x=e^p+x_{\text{пр}}$, $x_{\text{пр}}=\dfrac{\sigma_{\text{пр}}}{E}$, $E$– модуль Юнга, $\sigma_{\text{пр}}$ – предел пропорциональности; $a$ и $n$ - константы, описывающие диаграмму мгновенного упругопластического деформирования; $\gamma$ и $m$ – коэффициенты в степенной аппроксимации $\gamma_1=\gamma\left(e^p\right)^m$ параметра модели, контролирующего процесс разупрочнения материала на стадии пластической деформации [1,2].

Для оценки параметров модели (1) на основе данных эксперимента, а также для оценки её адекватности этим данным, разработан новый численный метод формирования выборки результатов расчета $y_k$ по модели (1). При этом были решены две основные задачи: задача построения аппроксимации интеграла $J\left(y_k\right)=\int\limits_{x_{\text{пр}}}^{x_k}\left(x-x_{\text{пр}}\right)^m y(x)\,dx$ в виде линейной комбинации результатов расчета $y_i$, $i=0,1,2,...,k$; и задача построения итерационной процедуры уточнения каждой величины $y_k$ в неявно заданной зависимости $y_k=\exp\left(-\gamma J\left(y_k\right)\right)\left[\sigma_{\text{пр}}+\sqrt[n]{\dfrac{x_k-x_{\text{пр}}}{a}}\right]$, $k=0,1,2,...,N-1$.

Очевидно, что в силу аддитивности интеграла имеет место соотношение $J\left(y_k\right)=\int\limits_{x_{\text{пр}}}^{x_0}\left(x-x_{\text{пр}}\right)^m y(x)\,dx+\sum\limits_{i=1}^{k}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\left(x-x_{\text{пр}}\right)^m y(x)\,dx$. Представим этот интеграл в виде суммы $J\left(y_k\right)=J_{k-1}+\Delta J_k$, где первое слагаемое

$$J_{k-1}=J\left(y_{k-1}\right)=\int\limits_{x_{\text{пр}}}^{x_0}\left(x-x_{\text{пр}}\right)^m y(x)\,dx+\sum\limits_{i=1}^{k-1}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\left(x-x_{\text{пр}}\right)^m y(x)\,dx, \qquad (2)$$

зависит только от величины $y_{k-1}$, а второе – $\Delta J_k=\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}\left(x-x_{\text{пр}}\right)^m y(x)\,dx$– описывает приращение интеграла на $k$- том шаге. Выделим в интеграле $\Delta J_k$ две составляющие, одна из которых линейно зависит от $y_{k-1}$, а другая – от $y_k$: $\Delta J_k=c_1(k)\,y_{k-1}+c_2(k)\,y_k$.

В основе метода вычисления интегралов $J_0=\int\limits_{x_{\text{пр}}}^{x_0}\left(x-x_{\text{пр}}\right)^m y(x)\,dx$ и $\Delta J_k=\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}\left(x-x_{\text{пр}}\right)^m y(x)\,dx$ лежит линейная аппроксимация функции $y(x)$ на отрезках $\left[x_{\text{пр}}, x_0\right]$ и $\left[x_{k-1}, x_k\right]$, $k = 1, 2, ..., N-1$: $y(x) \approx y_{k-1} + \dfrac{y_k - y_{k-1}}{\Delta x}(x - x_{k-1})$, где $\Delta x = x_k - x_{k-1}$.

В этом случае для первого из интегралов в (2) имеем

$$J_0 = \int_{x_{\text{пр}}}^{x_0} \left(x - x_{\text{пр}}\right)^m y(x)\, dx \approx \sigma_{\text{пр}} \int_{x_{\text{пр}}}^{x_0} \left(x - x_{\text{пр}}\right)^m dx + \frac{y_0 - \sigma_{\text{пр}}}{x_0 - x_{\text{пр}}} \int_{x_{\text{пр}}}^{x_0} \left(x - x_{\text{пр}}\right)^m \left(x - x_{\text{пр}}\right) dx$$

Отсюда получаем

$$J_0 = \frac{\left(x_0 - x_{\text{пр}}\right)^{m+1}}{(m+1)(m+2)} \sigma_{\text{пр}} + \frac{\left(x_0 - x_{\text{пр}}\right)^{m+1}}{m+2} y_0 = c_1(0)\sigma_{\text{пр}} + c_2(0) y_0, \tag{3}$$

где

$$c_1(0) = \frac{\left(x_0 - x_{\text{пр}}\right)^{m+1}}{(m+1)(m+2)}, \qquad c_2(0) = \frac{\left(x_0 - x_{\text{пр}}\right)^{m+1}}{m+2}. \tag{4}$$

Для интеграла $\Delta J_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(x - x_{\text{пр}}\right)^m y(x)\, dx$ с учетом линейной аппроксимации функции $y(x)$ имеем:

$$\Delta J_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(x - x_{\text{пр}}\right)^m y(x)\, dx \approx y_{k-1} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(x - x_{\text{пр}}\right)^m dx + \frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta x} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(x - x_{\text{пр}}\right)^m \left(x - x_{k-1}\right) dx.$$

После простых преобразований можно получить следующее, линейное относительно результатов вычислений $y_{k-1}$ и $y_k$, соотношение:

$$\Delta J_k = \frac{1}{\Delta x(m+1)(m+2)} \left[\left(x_k - x_{\text{пр}}\right)^{m+2} - \left(x_{k-1} - x_{\text{пр}} + \Delta x(m+2)\right)\left(x_{k-1} - x_{\text{пр}}\right)^{m+1}\right] y_{k-1} +$$

$$+ \frac{1}{\Delta x(m+1)(m+2)} \left[\left(x_{k-1} - x_{\text{пр}}\right)^{m+2} - \left(x_k - x_{\text{пр}} - \Delta x(m+2)\right)\left(x_k - x_{\text{пр}}\right)^{m+1}\right] y_k.$$

Или $\Delta J_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(x - x_{\text{пр}}\right)^m y(x)\, dx \approx c_1(k) y_{k-1} + c_2(k) y_k$, $k = 1, 2, ..., N-1$, где

$$c_1(k) = \frac{1}{\Delta x(m+1)(m+2)} \left[\left(x_k - x_{\text{пр}}\right)^{m+2} - \left(x_{k-1} - x_{\text{пр}} + \Delta x(m+2)\right)\left(x_{k-1} - x_{\text{пр}}\right)^{m+1}\right], \tag{5}$$

$$c_2(k) = \frac{1}{\Delta x(m+1)(m+2)} \left[\left(x_{k-1} - x_{\text{пр}}\right)^{m+2} - \left(x_k - x_{\text{пр}} - \Delta x(m+2)\right)\left(x_k - x_{\text{пр}}\right)^{m+1}\right]. \tag{6}$$

Тогда получаем соотношение вида:

$$J(y_k) = J_{k-1} + c_1(k) y_{k-1} + c_2(k) y_k, \quad k = 1, 2, ..., N-1, \tag{7}$$

где коэффициенты $c_1(k)$ и $c_2(k)$ описываются формулами (5) и (6), а интеграл $J_0$ – формулой (3).

С учетом полученных формул (2), (3) и (7) можно записать:

$$J(y_0) = c_1(0)\sigma_{\text{пр}} + c_2(0)\, y_0, \tag{8}$$

$$J(y_k) = c_1(0)\sigma_{\text{пр}} + \sum_{j=0}^{k-1}\left[c_2(j) + c_1(j+1)\right] y_j + c_2(k)\, y_k,\ k = 1,2,\dots,N-1. \tag{9}$$

Алгоритм численного метода построения дискретной модели $y_k$, $k = 0,1,2,\dots,N-1$, процесса упругопластического деформирования может быть описан следующим образом:

Шаг 1. Вычисляется величина $c_1(0)\sigma_{\text{пр}}$, где $c_1(0)$ находится по формуле (4).

Шаг 2. Полагается $k = 0$.

Шаг 3. Полагается $\hat{y}_k^{(0)} = \begin{cases} \sigma_{\text{пр}}, & \text{при } k = 0; \\ y_{k-1}, & \text{при } k = 1,2,\dots,N-1. \end{cases}$

Шаг 4. Полагается $i = 1$.

Шаг 5. Вычисляется величина $J\left(\hat{y}_k^{(i-1)}\right)$:

$$J\left(\hat{y}_k^{(i-1)}\right) = \begin{cases} c_1(0)\sigma_{\text{пр}} + c_2(0)\,\hat{y}_0^{(i-1)}, & \text{при } k = 0; \\ c_1(0)\sigma_{\text{пр}} + \sum\limits_{j=0}^{k-1}\left[c_2(j) + c_1(j+1)\right]\hat{y}_j^{(i-1)} + c_2(k)\,\hat{y}_k^{(i-1)}, & \text{при } k = 1,2,\dots,N-1, \end{cases}$$

где коэффициенты $c_1(j)$ и $c_2(j)$, $j = 0,1,\dots,k$, находятся по формулам (4), (5) и (6).

Шаг 6. Вычисляется новое уточненное значение переменной $y_k$:

$$\hat{y}_k^{(i)} = \hat{y}_k^{(i-1)} - c\left\{\hat{y}_k^{(i-1)} - \exp\left[-\gamma J\left(\hat{y}_k^{(i-1)}\right)\right]\cdot\left[\sigma_{\text{пр}} + \sqrt[n]{\frac{x_k - x_{\text{пр}}}{a}}\right]\right\}, \tag{10}$$

где коэффициент $0 < c \le 1$ выбирается с учетом сходимости итерационной процедуры (10) в процессе её реализации.

Шаг 7. Сравниваются два приближения:

$$\left|\hat{y}_k^{(i)} - \hat{y}_k^{(i-1)}\right| < \varepsilon, \tag{11}$$

где $\varepsilon > 0$ – наперед заданное малое число, например, величина $\varepsilon = 0{,}01\left|\hat{y}_k^{(i)}\right|$ соответствует расхождению менее 1%.

Шаг 8. Если неравенство (11) выполняется, то следует перейти к шагу 9. В противном случае параметр $i$ следует увеличить на единицу: $i := i + 1$, и перейти к шагу 5.

Шаг 9. Полагается $y_k = \hat{y}_k^{(i)}$.

Шаг 10. Проверяется условие: $k \le N - 1$. Если это неравенство выполняется, то значение параметра $k$ следует увеличить на единицу: $k := k + 1$, и перейти к шагу 3. В противном случае процедура вычисления значений математической модели процесса упругопластического деформирования завершается.

Разработанный численный метод построения модели процесса упругопластического деформирования может быть использован в задаче оценки параметров этой модели на основе полной диаграммы упругопластического деформирования, построенной по результатам эксперимента.

**Литература**

1. Радченко В.П., Еремин Ю.А. Реологическое деформирование и разрушения материалов и элементов конструкций. –М.: Машиностроение – 1, 2004. – 264 с.

2. Зотеев В.Е., Небогина Е.В., Бербасов Я.В. Оценивание параметров реологической модели энергетического типа на основе обобщенной регрессионной модели // В сб.: Труды Десятой Всероссийской научной конференции с международным участием. 25-27 мая 2016 г. Часть 2. СамГТУ, Самара, 2016. С.117–124.

3. Зотеев В.Е. Параметрическая идентификация диссипативных механических систем на основе разностных уравнений / Под ред. Радченко В.П. – М.: Машиностроение, 2009. – 344 с.

Э.А. Кильметов, А.И. Заико

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СЕНСОРНОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ МОСТОВЫХ МОДУЛЕЙ НА БАЗЕ *AMR*-ЭФФЕКТА

(Уфимский государственный авиационный технический университет)

**Аннотация.**

Получены динамические характеристики анизотропных магниторезистивных сенсоров. Предложена математическая модель динамических параметров анизотропного магниторезистивного сенсорного модуля.

**Введение**

Магниторезистивные модули на основе АМР эффекта используются для решения различных задач магнитометрии: определения курса объекта по магнитному полю Земли, измерения бесконтактным способом угла поворота и линейного перемещения объекта, скорости объекта, распознавания образа ферромагнитных объектов и работы в составе датчиков тока с гальванической развязкой. Для решения приведенных задач необходимо учитывать не только статические параметры, но и динамические характеристики модуля [2,4].

Динамические характеристики модулей на основе *AMR*-эффекта не достаточно изучены и является предметом данной статьи.

**Анализ экспериментальных данных и синтез динамических характеристик**

Все экспериментальные методы базируются на предположениях о сосредоточенности параметров объекта, стационарности во времени его динамических свойств и линейности их при малых изменениях. Практикой исследования динамики установлено, что большинстве случаев экспериментальные функции