



ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДА РАСЩЕПЛЕНИЯ

(Самарский университет)

Изучение законов движения жидкостей с применением численных методов всегда играло важную роль в развитии техники и естествознания. Использование для численного решения задач гидродинамики уравнений Навье-Стокса в естественных переменных «скорость, давление» приводит к определенным вычислительным трудностям. Для расчета двумерных течений часто применяют постановку задачи в переменных «функция тока, завихренность».

Функция тока ψ и завихренность ω , удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \Delta \omega, \quad (1)$$

$$\Delta \psi = -\omega \quad (2)$$

и соответствующим дополнительным условиям [1].

Система уравнений (1), (2) не является эволюционной. Это затрудняет применение экономичных численных методов расщепления решения нестационарных многомерных задач [2, 3]. Заменим (1), (2) эволюционной системой с помощью метода ε -аппроксимации. Для этого добавим в уравнение (2) производную функции тока ψ по времени с малым положительным параметром ε [4].

Рассмотрим неустановившееся течение вязкой несжимаемой жидкости в ограниченной односвязной двумерной области D с границей ∂D . Математически задача сводится к отысканию функции тока ψ и завихренности ω , удовлетворяющих уравнениям:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \Delta \omega, \quad (3)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} = \Delta \psi + \omega, \quad (x, y) \in D, \quad t \in (0, T], \quad (4)$$

и дополнительным условиям:

$$\omega = \omega_0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{D} = D + \partial D, \quad t = 0, \quad (5)$$

$$\psi = \xi(x, y, t), \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = \eta(x, y, t), \quad (x, y) \in \partial D, \quad t \in (0, T]. \quad (6)$$

Здесь x, y – декартовы координаты, t – время, ν – коэффициент кинематической вязкости. n – направление внешней нормали к ∂D . Функции ω_0, ξ, η заданы.



Пусть \bar{D} – прямоугольник со сторонами a и b . Построим экономичный конечно-разностный метод расщепления для решения задачи (3)-(6). Введем пространственно-временную сетку с координатами $x_i = ih_1$, $y_j = jh_2$, $t^n = n\tau$, ($i = 0, 1, \dots, N_1$; $j = 0, 1, \dots, N_2$; $n = 0, 1, 2, \dots$), где $h_1 = a / N_1$, $h_2 = b / N_2$ – шаги сетки по координатам x, y соответственно, τ – шаг по времени.

Обозначим $\psi_{ij}^n = \psi(x_i, y_j, t^n)$, $\omega_{ij}^n = \omega(x_i, y_j, t^n)$.

Аппроксимируем уравнения (3)-(4) разностной схемой расщепления [2, 3]. Переход от момента времени t^n к моменту t^{n+1} происходит за два дробных шага:

1 – й дробный шаг по времени:

$$\frac{\omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \omega_{i,j}^n}{\tau} + \frac{\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j-1}^n}{2h_2} \frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i-1,j}^n}{2h_1} = \nu \frac{\omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2\omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_1^2}, \quad (7)$$

$$\varepsilon \frac{\psi_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \psi_{i,j}^n}{\tau} = \frac{\psi_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2\psi_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \psi_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_1^2} + \frac{1}{2} \omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}, \quad (8)$$

2 – й дробный шаг по времени:

$$\frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} - \frac{\psi_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \psi_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2h_1} \frac{\omega_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - \omega_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{2h_2} = \nu \frac{\omega_{i,j+1}^{n+1} - 2\omega_{i,j}^{n+1} + \omega_{i,j-1}^{n+1}}{h_2^2}, \quad (9)$$

$$\varepsilon \frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - 2\psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i,j-1}^{n+1}}{h_2^2} + \frac{1}{2} \omega_{i,j}^{n+1}, \quad (10)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1, \quad n = 0, 1, \dots$$

Граничные условия (6) на сторонах прямоугольника \bar{D} заменяются конечно-разностными аналогами для $n = 0, 1, \dots$ с использованием уравнения (4) на границе ∂D .

Граничные условия на левой стороне

$$\psi_{0,j}^{n+\frac{1}{2}} = \xi_{0,j}^{n+\frac{1}{2}}, \quad - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{0,j}^{n+\frac{1}{2}} = \eta_{0,j}^{n+\frac{1}{2}}, \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1,$$

аппроксимируются разностными соотношениями

$$\omega_{0,j}^{n+\frac{1}{2}} - \left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{\varepsilon}{\tau} \right) \psi_{0,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{2}{h_1^2} \psi_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} = - \left(\frac{\varepsilon}{\tau} \psi_{0,j}^n + \frac{2}{h_1^2} \eta_{0,j}^{n+\frac{1}{2}} \right), \quad (11)$$

$$\psi_{0,j}^{n+\frac{1}{2}} = \xi_{0,j}^{n+\frac{1}{2}}, \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1,$$

Граничные условия на правой стороне



$$\psi_{N_1,j}^{n+\frac{1}{2}} = \xi_{N_1,j}^{n+\frac{1}{2}}, \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{N_1,j}^{n+\frac{1}{2}} = \eta_{N_1,j}^{n+\frac{1}{2}}, \quad j=1, 2, \dots, N_2-1,$$

аппроксимируются разностными соотношениями

$$\omega_{N_1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{\varepsilon}{\tau} \right) \psi_{N_1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{2}{h_1^2} \psi_{N_1-1,j}^{n+\frac{1}{2}} = - \left(\frac{\varepsilon}{\tau} \psi_{N_1,j}^n + \frac{2}{h_1^2} \eta_{N_1,j}^{n+\frac{1}{2}} \right), \quad (12)$$

$$\psi_{N_1,j}^{n+\frac{1}{2}} = \xi_{N_1,j}^{n+\frac{1}{2}}, \quad j=1, 2, \dots, N_2-1,$$

Граничные условия на нижней стороне

$$\psi_{i,0}^{n+1} = \xi_{i,0}^{n+1}, \quad - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{i,0}^{n+1} = \eta_{i,0}^{n+1}, \quad i=1, 2, \dots, N_1-1,$$

аппроксимируются разностными соотношениями

$$\omega_{i,0}^{n+1} - \left(\frac{2}{h_2^2} + \frac{\varepsilon}{\tau} \right) \psi_{i,0}^{n+1} + \frac{2}{h_2^2} \psi_{i,1}^{n+1} = - \left(\frac{\varepsilon}{\tau} \psi_{i,0}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{2}{h_2^2} \eta_{i,0}^{n+1} \right), \quad (13)$$

$$\psi_{i,0}^{n+1} = \xi_{i,0}^{n+1}, \quad i=1, 2, \dots, N_1-1,$$

Граничные условия на верхней стороне

$$\psi_{i,N_2}^{n+1} = \xi_{i,N_2}^{n+1}, \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{i,N_2}^{n+1} = \eta_{i,N_2}^{n+1}, \quad i=1, 2, \dots, N_1-1,$$

аппроксимируются разностными соотношениями

$$\omega_{i,N_2}^{n+1} - \left(\frac{2}{h_2^2} + \frac{\varepsilon}{\tau} \right) \psi_{i,N_2}^{n+1} + \frac{2}{h_2^2} \psi_{i,N_2-1}^{n+1} = - \left(\frac{\varepsilon}{\tau} \psi_{i,N_2}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{2}{h_2^2} \eta_{i,N_2}^{n+1} \right), \quad (14)$$

$$\psi_{i,N_2}^{n+1} = \xi_{i,N_2}^{n+1}, \quad i=1, 2, \dots, N_1-1,$$

Разностные уравнения (7)-(14) аппроксимируют соответствующие соотношения дифференциальной задачи (3)-(6) с погрешностью $O(\tau + h_1^2 + h_2^2)$.

На первом дробном шаге по времени для координатных линий сетки $j=1, 2, \dots, N_2-1$ уравнения (7), (8), (11), (12) образуют независимые системы уравнений относительно векторов

$$\begin{pmatrix} \omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ \psi_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad i=0, 1, \dots, N_1.$$

Эти системы решаются методом векторной прогонки [5].

На втором дробном шаге по времени для координатных линий сетки $i=1, 2, \dots, N_1-1$ уравнения (9), (10), (13), (14) образуют независимые системы уравнений относительно векторов

$$\begin{pmatrix} \omega_{i,j}^{n+1} \\ \psi_{i,j}^{n+1} \end{pmatrix}, \quad j=0, 1, \dots, N_2.$$



Эти системы решаются методом векторной прогонки [5].

Изложенным методом проведены расчеты нестационарного течения жидкости в полости квадратного сечения. В начальный момент времени жидкость покоится, затем приходит в движение под действием заданных стационарных входящих и выходящих потоков через границы. Расчет прекращается при достижении стационарного режима течения.

На рис. 1, 2 приведены линии тока жидкости при различных граничных режимах.

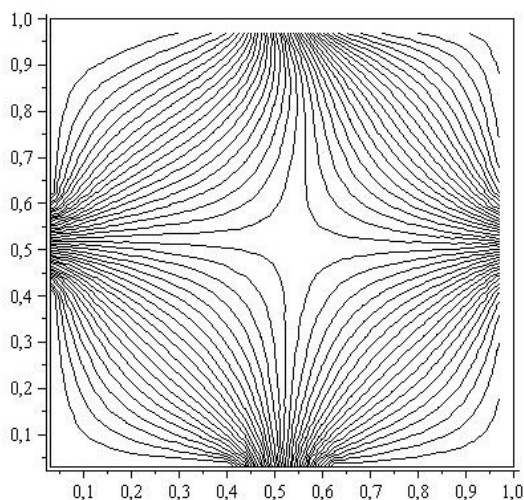


Рис. 1. Жидкость втекает через левую и нижнюю границы, вытекает через правую и верхнюю границы

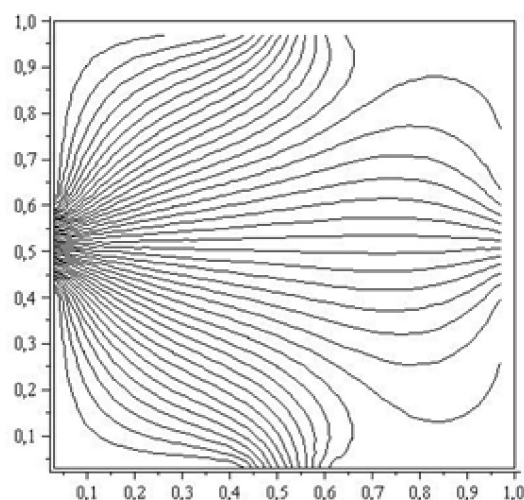


Рис. 2. Жидкость втекает через левую границу, вытекает через остальные границы

Литература

1. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1973. – 848 с.
2. Яненко, Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. / Н.Н. Яненко. – Новосибирск: Наука, 1967. – 197 с.
3. Самарский, А.А. Аддитивные схемы для задач математической физики / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: Наука, 2001, – 319 с.
4. Смагулов, Ш. Безытерационная численная реализация краевых условий для уравнений Навье-Стокса в переменных вихрь, функция тока. / Ш. Смагулов, Х.И. Христов; Акад. наук СССР, Сиб. отд-ние, Институт теоретической и прикладной механики. Препринт №20. – Новосибирск, 1980. – 22 с.
5. Самарский, А.А. Методы решения сеточных уравнений / А.А. Самарский, Е.С. Николаев. – М.: Наука, 1978. – 592 с.