Р.Ю. Макаров, В.Е. Зотеев

АППРОКСИМАЦИЯ КРИВЫХ ПОЛЗУЧЕСТИ НА ОСНОВЕ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Самарский государственный технический университет)

Поведение элементов конструкций в условиях ползучести остается актуальной технической задачей. Однако существующие методики определения параметров кривой ползучести обладают рядом недостатков. Так, одни из них требуют нескольких экспериментальных кривых ползучести [4], другие являются детерминированными, и не учитывают влияние случайной помехи, объективно существующей в результатах эксперимента [5]. Вследствие этого точность известных методов невелика, и возникает потребность в разработке новых методов для определения параметров кривой ползучести с целью повышения точности их оценки.

В соответствии с эмпирически предложенной моделью, уравнение кривой ползучести, описывающей три стадии ползучести, может быть представлено в виде [6]:

$$\hat{y}(t) = a_1(1 - e^{-\alpha_1 t}) + a_2(e^{\alpha_2 t} - 1), \tag{1}$$

где $a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2$ - параметры материала.

Предлагается новый численный метод оценки параметров модели (1), в основе которого лежит минимизация квадратов отклонений $\sum_{k=0}^{N-1}(y_k - \hat{y}_k)^2 \Rightarrow \min$.

Эта задача относится к классу задач нелинейной регрессии, методы решения которой описаны в [6], и сопряжены с трудностями, возникающими при решении появляющейся нелинейной системы уравнений.

Для построения линейно-параметрической дискретной модели, описывающей в виде рекуррентной формулы последовательные мгновенные значения деформации ползучести, рассмотрим значения зависимости $\hat{y}(t)$ в дискретные моменты времени с периодом дискретизации τ, и, в соответствии с (1), получим:

$$\hat{y}_k = a_1(1 - e^{-\alpha_1 \tau k}) + a_2(e^{\alpha_2 \tau k} - 1), k = \overline{0, N-1} \tag{2}$$

где N – объем выборки экспериментальных данных. Далее, подставляя в (2) вместо k значения $k-1$ и $k-2$, получим систему

$$\begin{cases} \hat{y}_{k-1} = a_s - a_1 e^{-\alpha_1 \tau k} e^{\alpha_1 \tau} + a_2 e^{\alpha_2 \tau k} e^{-\alpha_2 \tau} \\ \hat{y}_{k-2} = a_s - a_1 e^{-\alpha_1 \tau k} e^{2\alpha_1 \tau} + a_2 e^{\alpha_2 \tau k} e^{-2\alpha_2 \tau} \end{cases}, \tag{3}$$

линейную относительно функций $-a_1 e^{-\alpha_1 \tau k}$ и $a_2 e^{\alpha_2 \tau k}$, где $a_s = a_1 - a_2$. Решая данную систему, и подставляя решение в (2), получим:

$$\hat{y}_k = (e^{\alpha_2 \tau} + e^{-\alpha_1 \tau})\hat{y}_{k-1} + (-e^{\alpha_2 \tau - \alpha_1 \tau})\hat{y}_{k-2} + a_s(e^{\alpha_2 \tau - \alpha_1 \tau} - e^{\alpha_2 \tau} - e^{-\alpha_1 \tau} + 1).$$

В процессе идентификации параметров модели (1) необходимо учитывать, что экспериментальное значение y_k содержит в себе случайную помеху ε_k, то есть $y_k = \hat{y}_k + \varepsilon_k$, где $\hat{y}_k$ –точное значение деформации ползучести, и, с учетом данного соотношения, получаем линейно-параметрическую дискретную модель, описывающую результаты наблюдений вида

$$\begin{cases} y_0 = 0, \\ y_1 = \lambda_4 + \varepsilon_1, \\ y_k = \lambda_1 y_{k-1} + \lambda_2 y_{k-2} + \lambda_3 - \lambda_1 \varepsilon_{k-1} - \lambda_2 \varepsilon_{k-2} + \varepsilon_k, k = \overline{2, N-1} \end{cases}, \tag{4}$$

где $\lambda_1 = e^{\alpha_2 \tau} + e^{-\alpha_1 \tau}$, $\lambda_2 = -e^{\alpha_2 \tau - \alpha_1 \tau}$, $\lambda_3 = a_s(e^{\alpha_2 \tau - \alpha_1 \tau} - e^{\alpha_2 \tau} - e^{-\alpha_1 \tau} + 1)$, $\lambda_4 = a_1(1 - e^{-\alpha_1 \tau}) + a_2(e^{\alpha_2 \tau} - 1)$. Модель (4) в виде обобщенной регрессионной модели примет вид

$$\begin{cases} b = F\lambda + \eta, \\ \eta = P_\lambda \varepsilon. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)^T$ – вектор неизвестных коэффициентов линейно параметрической дискретной модели; $\varepsilon = (0, ..., \varepsilon_{N-1})^T$ – N-мерный вектор случайной помехи в результатах наблюдений; $\eta = (\eta_0, \eta_1, \eta_2, ..., \eta_{N-1})^T$ – N-мерный вектор эквивалентного случайного возмущения в стохастическом разностном уравнении; $b = (y_0, y_1, ..., y_{N-1})^T$ – N-мерный вектор правой части; $F = [\, f_1 \vdots f_2 \vdots f_3 \vdots f_4 \,]$ – матрица регрессоров размера $N \times 4$, столбцы которой описываются формулами: $f_1 = (0, 0, y_1, ..., y_{N-2})^T$, $f_2 = (0, 0, y_0, ..., y_{N-3})^T$, $f_3 = (0, 0, 1, 1.., 1)^T$, $f_4 = (0, 1, 0, 0.., 0)^T$.

Строки матрицы P эквивалентного возмущения, размера $N \times N$ в стохастическом разностном уравнении описываются формулами: $p_0 = (1, 0, 0, 0, .., 0)$, $p_1 = (-\lambda_1, 1, 0, 0, 0, .., 0)$, $p_2 = (-\lambda_2, -\lambda_1, 1, 0, 0, 0, .., 0)$, ..., $p_{N-1} = (0, 0, ... -\lambda_2, -\lambda_1, 1)$.

Для реализации минимизации функционала $\sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \hat{y}_k)^2 \Rightarrow \min$ необходимо минимизировать следующий функционал [1,2]

$$\|\hat{\varepsilon}\|^2 = \left\| P_\lambda^{-1} b - P_\lambda^{-1} F \hat{\lambda} \right\|^2 \Rightarrow \min, \tag{6}$$

очевидно, что вычисленные таким образом оценки обеспечивают также минимальное отклонение $\|y - \hat{y}\|$ (в формате среднеквадратичного приближения) смоделированной функции, описывающей мгновенные значения $\hat{y}_k$ от экспериментальных данных y_k. Минимизация функционала (6) приводит к решению нормальной системы уравнений, линейных относительно переменных λ_j. Для этого может быть применен численный итерационный метод. На первом шаге алгоритма этого метода вычисляется начальное приближение $\hat{\lambda}^{(0)}$-вектор МНК-оценок регрессионных коэффициентов: $\|\hat{\eta}\|^2 = \|b - F\hat{\lambda}\|^2 \Rightarrow \min$, откуда

$$\hat{\lambda}^{(0)} = \left(F^T F\right)^{-1} F^T b. \qquad (7)$$

Затем на основе этих оценок формируется матрица $P_{\lambda^{(0)}} = P(\lambda^{(0)})$ и вычисляется обратная матрица $P^{-1}_{\lambda^{(0)}}$. Если подставим эту матрицу в формулу (6), то получим линейную регрессионную модель вида $P^{-1}{}_{\hat{\lambda}^{(0)}} = P^{-1}{}_{\hat{\lambda}^{(0)}} F\lambda + \varepsilon^{(1)}$, где $\varepsilon^{(1)} = P^{-1}{}_{\hat{\lambda}^{(0)}}\eta$. При этом функционал (6) принимает вид $\left\|\varepsilon^{(1)}\right\|^2 = \left\|P^{-1}_{\hat{\lambda}^{(0)}} b - P^{-1}_{\hat{\lambda}^{(0)}} F\hat{\lambda}\right\|^2 \Rightarrow \min$. Очевидно, что этот функционал является линейным относительно параметров λ_j. Его минимизация приводит к нормальной системе линейных алгебраических уравнений, решение которой имеет вид

$$\hat{\lambda}^{(1)} = \left[F^T (P^{-1}_{\hat{\lambda}^{(0)}})^T P^{-1}_{\hat{\lambda}^{(0)}} F\right]^{-1} F^T (P^{-1}_{\hat{\lambda}^{(0)}})^T P^{-1}_{\hat{\lambda}^{(0)}} b.$$

Вводя матрицу $\Omega_{\hat{\lambda}^{(0)}} = P_{\hat{\lambda}^{(0)}} P^T{}_{\hat{\lambda}^{(0)}}$, получаем формулу для вычисления уточненного приближения $\hat{\lambda}^{(1)} = \left[F^T \Omega^{-1}{}_{\hat{\lambda}^{(0)}} F\right]^{-1} F^T \Omega^{-1}{}_{\hat{\lambda}^{(0)}} b$. Это новое приближение вектора среднеквадратичных оценок коэффициентов разностного уравнения используется для вычисления матрицы $P_{\lambda^{(1)}} = P(\hat{\lambda}^{(1)})$ и т.д. Таким образом, в основе алгоритма численного метода среднеквадратичного оценивания коэффициентов линейно-параметрической дискретной модели лежат рекуррентные формулы [1]

$$\hat{\lambda}^{(k)} = \left[F^T \Omega^{-1}{}_{\hat{\lambda}^{(k-1)}} F\right]^{-1} F^T \Omega^{-1}{}_{\hat{\lambda}^{(k-1)}} b,$$

$$\Omega_{\hat{\lambda}^{(k)}} = P_{\hat{\lambda}^{(k)}} P^T{}_{\hat{\lambda}^{(k)}},$$

$$P_{\lambda^{(k)}} = P(\hat{\lambda}^{(k)}), k = 1, 2, 3...$$

Полученные среднеквадратические оценки λ_i коэффициентов линейно параметрической дискретной модели (4) используются при вычислении помехоустойчивых оценок параметров кривой ползучести $a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2$, посредством решения соответствующих систем:

$$\begin{cases} e^{\alpha_2 \tau} + e^{-\alpha_1 \tau} = \lambda_1, \\ -e^{\alpha_2 \tau - \alpha_1 \tau} = \lambda_2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1(1 - e^{-\alpha_1 \tau}) + a_2(e^{\alpha_2 \tau} - 1) = \lambda_4, \\ a_1 - a_2 = \dfrac{\lambda_3}{e^{\alpha_2 \tau - \alpha_1 \tau} - e^{\alpha_2 \tau} - e^{-\alpha_1 \tau} + 1}. \end{cases}$$

Таким образом, разработан численный метод для определения параметров кривой ползучести. Проведены численно-аналитические исследования, подтверждающие справедливость выведенных соотношений.

Литература

1. Зотеев В.Е. Параметрическая идентификация диссипативных механических систем на основе разностных уравнений / Под ред. Радченко В.П. – М.: Машиностроение, 2009. – 344 с.
2. В. Е. Зотеев. "О сходимости итерационной процедуры среднеквадратичного оценивания коэффициентов линейно параметрической дискретной модели", *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 1(18)(2009), 133–141.
3. В. П. Радченко, А. В. Симонов, Разработка автоматизированной системы построения моделей неупругого деформирования металлов на основе методов непараметрического выравнивания экспериментальных данных, Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 1999, выпуск 7, 51–62.
4. Самарин Ю.П. Построение экспоненциальных аппроксимаций для кривых ползучести методом последовательного выделения экспоненциальных слагаемых // Проблемы прочности. 1974. №9. С. 24-27
5. S.G.R. Brown, R.W. Evans and B. Wilshire. Exponential descriptions of normal creep curves. Department of Metallurgy and Materials Technology .University College, Singleton Park, Swansea, SA2 8PP, UK
6. Демиденко Е.З. Линейная и нелинейная регрессия. –М.: Финансы и статистика, 1981. –302 С.

Д.О. Маркин, В.В. Комашинский

МОДЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ ПОЛЬЗОВАТЕЛЕЙ МОБИЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ ВНУТРИ ПОМЕЩЕНИЙ НА ОСНОВЕ СИГНАЛОВ БЕСПРОВОДНОЙ СЕТИ ДОСТУПА

(Академия ФСО России, г. Орёл)

Различные системы навигации и определения местоположения известны уже достаточно давно, однако в последнее время активно проводятся исследования способов определения местоположения внутри помещений и зданий. В отличие от определения местоположения на открытой местности, внутри зданий и помещений нет возможности использовать спутниковую навигацию из-за очень слабого сигнала, а также требования приложений использующих данные о местоположении субъекта внутри здания зачастую требуют высокой точности, соизмеримой с точностью определения местоположения, достигаемой в спутниковых системах навигации.

Достаточно детальный обзор беспроводных технологий и систем определения местоположения внутри помещений представлен в работе [1]. Все известных технологии и системы определения местоположения основываются на достаточно ограниченном наборе базовых принципов и алгоритмов, которые представлены на рисунке 1.