А.М. Шокиров

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ СУММЫ РЯДА

(Ферганский филиал Ташкентского университета информационных технологии)

Чтобы описать поведение при $x \to \infty$ интересующей нас функции $f(x)$ в терминах известной функции $\varphi(x)$, мы часто будем использовать следующие обозначения, введенные Бахманом и Ландау. Предположим сначала, что *x*– действительная переменная. На бесконечности $\varphi(x)$ может стремиться к нулю, к бесконечности или иметь какое-либо другое поведение – никаких ограничений мы не налагаем.

1) Если отношение $f(x)/\varphi(x)$ стремится к единице, то мы пишем

$$f(x) \sim \varphi(x) \quad (x \to \infty)$$

или, короче, $f \sim \varphi$. В этом случае мы говорим, что f асимптотически приближается к φ или φ является асимптотическим приближением функции f.

2) Если $f(x)/\varphi(x) \to 0$, мы пишем

$$f(x) = o\{\varphi(x)\} \quad (x \to \infty)$$

или, короче $f = o(\varphi)$; в этом случае мы говорим, что порядок f меньше, чем порядок φ.

3) Если отношение $|f(x)/\varphi(x)|$ ограничено, то мы пишем

$$f(x) = O\{\varphi(x)\} \qquad (x \to \infty)$$

или $f = O(\varphi)$; в этом случае говорят, что функция f имеет порядок, не превосходящий порядка φ.

В 1894 году Пауль Бахман придумал обозначение для асимптотического анализа. В последующие годы его популярности способствовали Эдмунд Ландау и др. Мы встречаем это обозначение в формулах наподобие: $H_n = \ln n + \gamma + O(1/n)$, которая говорит нам, что *n*-е гармоническое число равно натуральному логарифму *n* плюс константа Эйлера плюс некоторая величина, которая составляет «*O* большое от 1 на *n*» [1], [2]. Эта последняя величина точно не определена, однако, какой бы она ни была, обозначение «*O*» позволяет утверждать, что она не превосходит константу, умноженную на 1/*n*.

Величину *O*(1/*n*) можно считать пренебрежимо малой, если только нас не интересуют величины, отличающиеся от 1/*n* лишь постоянным множителем.

Определение 1.

$$f(n) = O(g(n)) \qquad \text{для всех } n \in N \tag{1}$$

означает, что существует такая константа *C*, что

$$|f(n)| \le C|g(n)| \quad \text{для всех } n \in N; \tag{2}$$

а если обозначение $O(g(n))$ использовано внутри формулы, то оно обозначает функцию $f(n)$, удовлетворяющую (2). Значения функции $f(n)$ неизвестны, но мы знаем, что они не слишком велики. Символ «O» включает неопределенную константу C, каждое вхождение O может подразумевать различные C, но каждая из этих констант не зависит от n.

Определение 2. Соотношение $f(n) = O(g(n))$ при $n\to\infty$ означает, что существуют две константы C и n_0, такие, что

$$|f(n)| \le C|g(n)| \quad \text{при всех } n \ge n_0.$$

Замечание 1: Значения C и n_0 могут быть разными для разных O, но они не зависят от n.

Определение 3. Запись $f(x) = O(g(x))$ при $x\to 0$ означает, что существуют две константы C и ε, такие, что

$$|f(x)| \le C|g(x)|, \quad \text{если только } |x| \le \varepsilon .$$

Замечание 2: запись $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = O(n^3)$ корректна, но в этом равенстве нельзя менять местами правую и левую части. В противном случае мы можем прийти к нелепым выводам, наподобие $n = n^2$, исходя из верных тождеств $n = O(n^2)$ и $n^2 = O(n^2)$.

Работая с символом «O» мы имеем дело с односторонними равенствами. Правая часть уравнения содержит не больше информации, чем левая, и фактически может содержать меньше информации; правая часть является «огрублением» левой.

Если говорить строго формально, то запись $O(g(n))$ обозначает не какую-то одну функцию $f(n)$, а сразу множество функций $f(n)$, таких, что $|f(n)| \le C|g(n)|$ для некоторой константы C. Обычная формула $g(n)$, не включающая символ O, обозначает множество, содержащее одну функцию $f(n) = g(n)$. Если S и T суть множества функций от n, то запись $S + T$ обозначает множество всех функций вида $f(n) + g(n)$, где $f(n)\in S$ и $g(n)\in T$; другие обозначения вроде $S - T$, ST, S/T, $\sqrt{S}$, e^S, $\ln S$ определяются аналогично. Тогда «равенство» между двумя такими множествами функций есть теоретико-множественное включение; знак «=» в действительности означает «$\subseteq$».

«Уравнение» $\frac{1}{3}n^3 + O(n^2) = O(n^3)$ означает, что $S_1 \subseteq S_2$, где S_1 есть множество всех функций вида $\frac{1}{3}n^3 + f_1(n)$, для которых найдется константа C_1, такая, что $|f_1(n)| \le C_1|n^2|$, а S_2 есть множество всех функций $f_2(n)$, для которых найдется константа C_2, такая, что $|f_2(n)| \le C_2|n^3|$.

Можно строго доказать это «равенство», если взять произвольный элемент из левой части и показать, что он принадлежит правой части: пусть

$\frac{1}{3}n^3 + f_1(n)$ таково, что $\left|f_1(n)\right| \le C_1\left|n^2\right|$, следует доказать, что существует такая константа C_2, что $\left|\frac{1}{3}n^3 + f_1(n)\right| \le C_2\left|n^3\right|$. Константа $C_2 = \frac{1}{3} + C_1$ решает проблему, так как $n^2 \le \left|n^3\right|$ для всех целых n.

Замечание 3: Если в формуле используется несколько переменных, то символ O представляет множество функций от двух или более переменных, а не только от одной. В область определения каждой функции входят все переменные, которые в данном контексте «свободны» для изменения.

При нахождении суммы ряда нередко используется формула суммирования Эйлера [3]:

$$\sum_{a\le k<b} f(k) = \int_a^b f(x)dx + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)\Big|_a^b + R_m,$$

где $R_m = (-1)^{m+1}\int_a^b \frac{B_m(\{x\})}{m!} f^{(m)}(x)dx, \quad a \le b, \quad m \ge 1, \quad a,b,m \in Z,$

B_k – числа Бернулли, $B_m(\{x\})$ – многочлен Бернулли. $B_k = (-1)^k \beta_{2k}$.

В качестве примера рассмотрим две задачи.

Задача 1. Найти $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$.

Применим формулу суммирования Эйлера:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^2+k^2} = \int_0^n \frac{dx}{n^2+x^2} + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{k!}\left(\frac{1}{n^2+x^2}\right)^{(k-1)}\Bigg|_0^n =$$

$$= \int_0^n \frac{dx}{n^2+x^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2+x^2}\Big|_0^n + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n^2+x^2}\right)'\Bigg|_0^n + 0\cdot\left(\frac{1}{n^2+x^2}\right)''\Bigg|_0^n - \frac{1}{30}\left(\frac{1}{n^2+x^2}\right)^{(3)}\Bigg|_0^n + \ldots =$$

$$= \frac{1}{4}\pi n^{-1} + \frac{1}{4}\cdot n^{-2} + \frac{1}{6}\left(\frac{-2x}{\left(n^2+x^2\right)^2}\right)\Bigg|_0^n + O(n^{-5}) = \frac{1}{4}\pi n^{-1} + \frac{1}{4}\cdot n^{-2} - \frac{1}{12}n^{-3} + O(n^{-5}).$$

Задача 2. Найти асимптотику при $n \to \infty$ суммы $S(n) = \sum_{k=0}^{n} k!$

Члены этой суммы быстро растут с ростом номера, так что главный член асимптотики равен последнему члену суммы: $S(n) \sim n!$, $n \to \infty$. Действительно,

$$\frac{S(n)}{n!} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \ldots + \frac{1}{n(n-1)\ldots 2\cdot 1}.$$

Следовательно,

$$S(n) = n! \cdot \left(1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \quad (n \to \infty).$$

Литература

1. Панченков, А.Н. Асимптотические методы в экстремальных задачах механики. – Новосибирск: Наука, 1982.

2. Олвер, Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. – М.: Наука, 1978.

3. Грэхем, Р. Конкретная математика. Основание информатики: Пер. с англ. / Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. – М.: Мир, 1998.

Д.Е. Яблоков

СПЕЦИАЛИЗАЦИЯ ПОВЕДЕНИЯ ИНТЕРВАЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ С ПОМОЩЬЮ МОДЕЛЕЙ ОБОБЩЕННЫХ КОНЦЕПЦИЙ ИТЕРАТОРОВ

(Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева)

Назначение абстрактного типа данных состоит в расширении предлагаемого языком программирования понятийного аппарата в соответствии с контекстом предметной области. Создание какого-либо интерфейса подразумевает, что как базовая абстракция он должен помогать формировать правильные стереотипы мышления и, соответственно, правильный стиль программирования. По сути, проектирование интерфейсов – это проектирование конструкций предметно-ориентированного языка, представленного с помощью синтаксических средств используемого инструмента кодирования. Таким образом, обеспечивается взаимосвязь используемых абстракций и требований, как предметной области, так и выбранной стратегии реализации. Но способ выражения соответствия требованиям при разных подходах имеет существенные отличия. В объектно-ориентированном программировании для любого типа, находящегося в каком-либо дочернем узле иерархии наследования, необходимо реализовать определенный его интерфейсом контракт. В терминах этого контракта, следуя логике объектно-ориентированного подхода, возможно обращение к функциональности и данным экземпляра потомка. Обобщенное программирование подразумевает, что проектируемый элемент программы удовлетворяет необходимому набору свойств и ограничений, которые предъявляются к нему со стороны других компонентов, ожидающих определенный формат взаимодействия сообразно своим синтаксическим и семантическим особенностям.

Алгоритм, написанный в обобщенном стиле, может применяться для любых типов, удовлетворяющих требованиям, которые он предъявляет к своим аргументам. Любой обобщенный алгоритм состоит из двух частей: конкретных инструкций, определяющих шаги исполнения и совокупности концепций, по-