Литература

1. Мальцев, А.И. Алгебраические системы / А.И. Мальцев - М.: Наука, 1970. - 392 с.

2. Биркгоф, Г. Теория решеток / Г. Биркгоф. – М.: Наука, 1984.– 568 с.

3. Ganter, Bernhard and Rudolf Wille, *Formal Concept Analysis*. Transl. from German. Berlin: Springer-Verlag, 1999. 284 p.

4. Kuznetsov, S.O. *Machine Learning on the Basis on Formal Concept Analysis* // Automation and Remote Control, Vol. 62, No 10, 2001, pp. 1543-1564.

5. Аншаков О.М., Скворцов Д.П., Финн В.К. Логические средства экспертных систем типа ДСМ // Семиотика и информатика. Вып. 28, 1986,– С. 65–102.

6. Виноградов Д.В. О представлении объектов битовыми строками для ВКФ-метода // Научная и техническая информация, Сер. 2. 2018. № 5. С. 1-4.

7. Цветов В.П. Об алгебрах индикаторов гиперграфов // Сборник трудов Международной научно-технической конференции ПИТ 2019 / под ред. С.А. Прохорова, Самара, Россия, 2018, – С. 195–198.

8. Цветов В.П. Двойственные упорядоченные структуры бинарных отношений // Сборник трудов IV международной конференции ИТНТ-2018. Самара, Россия, 2018, – С. 2635–2644.

9. Tsvetov V.P. Algebras of finitary relations. CEUR Workshop Proceedings, 2019, vol. 2416, pp. 119–125.

Г.Ш. Цициашвили, М.А. Осипова

АЛГОРИТМЫ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ РЕККУРЕНТНЫХ МОДЕЛЯХ

(ИПМ ДВО РАН, ДВФУ)

Построен алгоритм оценивания параметров в рекуррентных последовательностях $x_{i+1} = f(x_i), i = 0,1,...,$ в случае нелинейной функции $f(x)$ по неточным наблюдениям за этой последовательностью. Речь идет о модели логистического роста, модели Риккера и дискретизированной модели Лоренца. Рассматриваемые модели привлекают к себе повышенное внимание со стороны биологов, физиков и метеорологов.

Для этих моделей и практически, и теоретически важно оценивать их параметры по неточным наблюдениям y_i за состоянием x_i, $i = 0,1,...$ В работе рассматриваются аддитивная $y_i = x_i + \varepsilon_i$ и мультипликативная $y_i = x_i \exp(\varepsilon_i)$, $i = 0,1,...,$ модели внесения ошибок в наблюдения. Здесь $\varepsilon_i, i = 0,1,...,$ -- последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин, имеющих нулевое среднее, известную дисперсию $c < \infty$, причем дисперсия $D\varepsilon_i^2 < \infty$.

Предположим, что у последовательности x_i, $i = 0,1,...,$ существует предельный цикл $X^1,...,X^q$ длины $q \ge 1$: $\lim_{k\to\infty} x_{qk+j} = X^j,\ j=1,...,q,$ или предельное распределение $p(dx)$. Здесь $p(dx)$ – вероятностная мера на σ – алгебре измеримых по Лебегу подмножеств отрезка $[0,1]$ такая, что для любого измеримого по Лебегу множества $C \subseteq [0,1]$ справедливо равенство $\lim_{n\to\infty} \frac{k(C,n)}{n} = \int_C p(dx),$ где $k(C,n)$ – количество $x_i \in C,\ i=0,1,...,n-1.$ У всех последовательностей, описывающих рассматриваемые модели, предполагается наличие предельного цикла или предельного распределения, что исследуется в теории динамических систем выделением притягивающего множества – аттрактора.

Пусть $f(x)$ непрерывная функция, обозначим (предполагая существование предела)

$$\overline{f(x)}|_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i),\ \overline{f(y)}|_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(y_i),\ \overline{f(x)} = \lim_{n\to\infty} \overline{f(x)}|_n. \qquad (1)$$

Основные результаты

Рассмотрим модель логистического роста [1]

$$x_0 = a,\ x_{i+1} = bx_i(1-x_i),\ i=0,1,...,\ 0<a<1,\ 1<b<4. \qquad (2)$$

Утверждение 1. *При аддитивной модели внесения ошибок* $y_i = x_i + \varepsilon_i$ *имеет место сходимость по вероятности*

$$\hat{b}_n = \frac{\overline{y}|_n}{\overline{y}|_n - (\overline{y^2}|_n - c)} \to b = \frac{\overline{x}}{\overline{x} - \overline{x^2}},\ n \to \infty.$$

Наряду с аддитивной моделью внесения ошибок для последовательности (2) можно рассмотреть и мультипликативную.

Перейдем теперь к модели Риккера [2], предполагая наличие у последовательности

$$x_{i+1} = ax_i e^{-bx_i},\ i=0,1,...,\ a>1,\ b>0,\ x_0>1. \qquad (3)$$

Рассмотрим мультипликативную модель ошибок наблюдения $y_i = x_i \exp(\varepsilon_i)$, в которой независимые случайные величины $\varepsilon_i, i=0,1,...,$ имеют нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией c.

Утверждение 2. *Имеют место сходимости по вероятности*

$$\hat{b}_n = 2e^{c/2}\,\frac{\overline{y\ln y}|_n - c\overline{y}|_n - \overline{y}|_n\,\overline{\ln y}|_n}{\overline{y^2}|_n\, e^{-c} - (\overline{y}|_n)^2} \to b = 2\,\frac{\overline{x\ln x} - \overline{x}\,\overline{\ln x}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2},$$

$$\hat{a}_n = \exp(\hat{b}_n \overline{y}|_n\, e^{-c/2}) \to a = e^{b\overline{x}},\ n \to \infty.$$

Остановимся на модели Лоренца [3] – [4], представимой системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx^{(1)}}{dt} = \sigma(x^{(2)} - x^{(1)}), \\ \dfrac{dx^{(2)}}{dt} = x^{(1)}(r - x^{(3)}) - x^{(2)}, \\ \dfrac{dx^{(3)}}{dt} = x^{(1)}x^{(2)} - bx^{(3)}. \end{cases} \quad (4)$$

Обозначим $x^{(1)}(ih) = x_i^{(1)}, x^{(2)}(ih) = x_i^{(2)}, x^{(3)}(ih) = x_i^{(3)}, i = 0,1,...,$ и выпишем для системы уравнений (4) систему разностных уравнений

$$\begin{cases} x_{i+1}^{(1)} = x_i^{(1)} + \sigma h(x_i^{(2)} - x_i^{(1)}), \\ x_{i+1}^{(2)} = x_i^{(2)} + (x_i^{(1)}(r - x_i^{(3)}) - x_i^{(2)})h, \\ x_{i+1}^{(3)} = x_i^{(3)} + (x_i^{(1)}x_i^{(2)} - bx_i^{(3)})h. \end{cases} \quad (4)$$

Рассмотрим аддитивные модели внесения ошибок $y_i^{(k)} = x_i^{(k)} + \varepsilon_i^{(k)}, k = 1,2,3,\ i = 0,1,...,$ где независимые случайные величины $\varepsilon_i^{(k)}$ имеют нулевые средние и дисперсии $c^{(k)}$, причем $d^{(k)} = D(\varepsilon_i^{(k)})^2 < \infty.$

Утверждение 3. *Имеют место сходимости по вероятности при* $n \to \infty$

$$\hat{(\sigma h)}_n = \frac{2\left(\overline{(y^{(1)})^2}\,|_n - c^{(1)} - \overline{y^{(1)}y^{(2)}}\,|_n\right)}{\overline{(y^{(1)})^2}\,|_n - c^{(1)} + \overline{(y^{(2)})^2}\,|_n - c^{(2)} - 2\overline{y^{(1)}y^{(2)}}\,|_n} \to \sigma h = \frac{2\left(\overline{(x^{(1)})^2} - \overline{x^{(1)}x^{(2)}}\right)}{\overline{(x^{(1)})^2} + \overline{(x^{(2)})^2} - 2\overline{x^{(1)}x^{(2)}}},$$

$$\hat{b}_n = \frac{\overline{y^{(1)}y^{(2)}}\,|_n}{\overline{y^{(3)}}\,|_n} \to b = \frac{\overline{x^{(1)}x^{(2)}}}{\overline{x^{(3)}}}, \hat{r}_n = \frac{\overline{y^{(2)}}\,|_n - c^{(2)} + \overline{y^{(1)}y^{(3)}}\,|_n}{\overline{y^{(1)}}\,|_n} \to r = \frac{\overline{x^{(2)}} + \overline{x^{(1)}x^{(3)}}}{\overline{x^{(1)}}}.$$

Вычислительный эксперимент

Вычислительные эксперименты проводились для всех трех моделей. Оценки всех параметров была вычислены 100 раз и построены гистограммы частот полученных значений с 5 интервалами.

Модель логистического роста. Расчеты $\hat{b}_n$ проводились для случая $x_0 = 0{,}75; a = 0{,}5; b = 3$ при $n = 1000$ (рис. 1). Рассматривалась аддитивная модель внесения ошибок в предположении, что $\varepsilon_i, i = 0,..,n-1,$ имеют равномерное распределение на отрезке $[-1/4, 1/4]$.

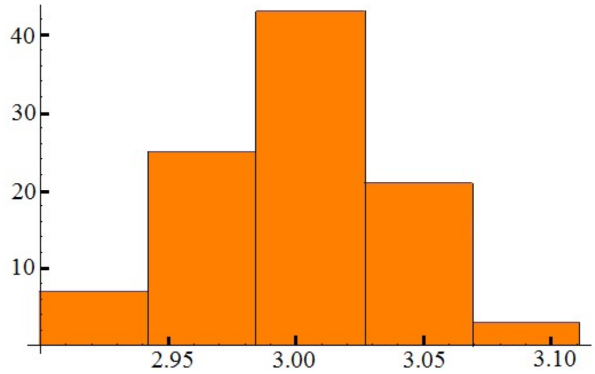

Рис. 1. Гистограмма частот для $\hat{b}_n$.

Модель Риккера. Расчеты $\hat{a}_n$, $\hat{b}_n$ проводились для случая $x_0 = 110{,}358$; $a = 300; b = 1$ при $n = 1000$ (рис. 2, рис. 3). Рассматривалась мультипликативная модель внесения ошибок в предположении, что $\varepsilon_i, i = 0,..,n-1$, имеют нормальное распределение со средним ноль и дисперсией 1/48.

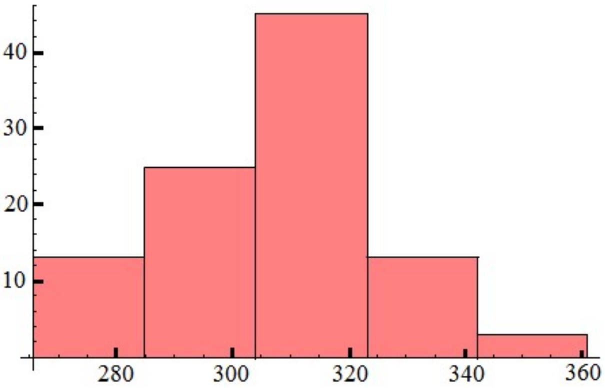

Рис. 2. Гистограмма частот для $\hat{a}_n$.

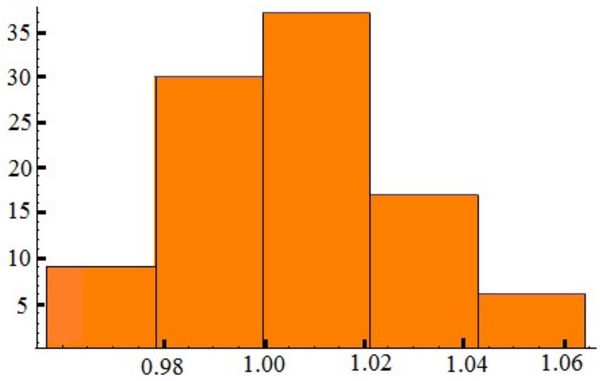

Рис. 3. Гистограмма частот для $\hat{b}_n$.

Модель Лоренца. Расчеты $(\widehat{\sigma h})_n$, $\hat{b}_n$, $\hat{r}_n$ проводились для случая (рис. 4 – рис. 6)

$$x_0^{(1)} = 2.9, x_0^{(2)} = 1.7, x_0^{(3)} = 2.3, h = 0{,}1, \sigma = 19, b = 3, r = 2, n = 200.$$

Рассматривались аддитивные модели внесения ошибок в предположении, что $\varepsilon_i^{(k)}, i = 0,..,n-1,\ k = 1,2,3,$ имеют нормальное распределение со средним ноль и дисперсией 1/48.

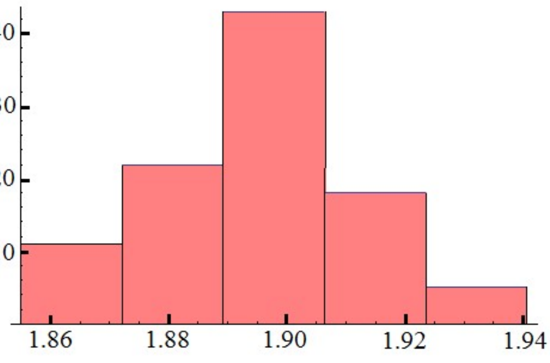

Рис. 4. Гистограмма частот для $(\widehat{\sigma h})_n$.

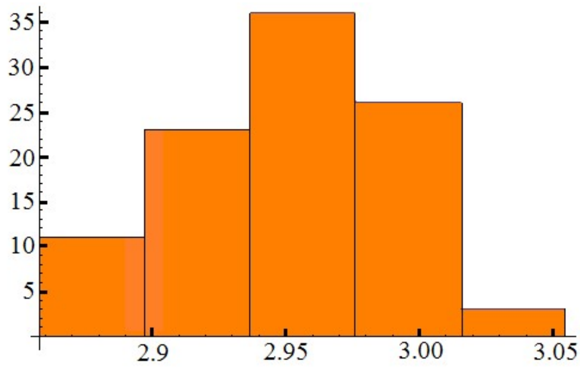

Рис. 5. Гистограмма частот для $\hat{b}_n$.

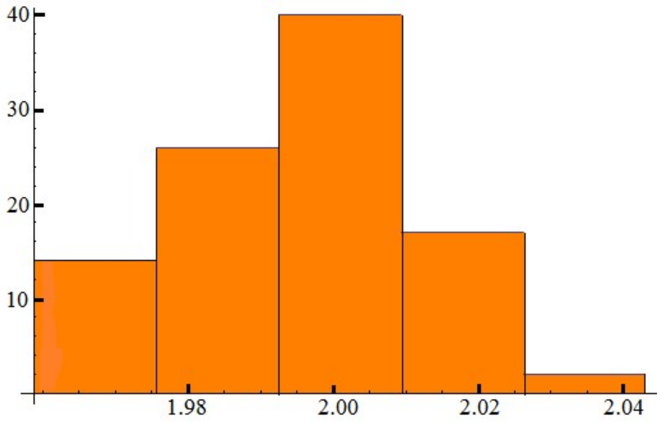

Рис. 6. Гистограмма частот для $\hat{r}_n$.

Литература

1. Шарковский А. Н. Разностные уравнения и динамика численности популяций. Препринт 82.18. Киев: Институт математики АН УССР, 1982.

2. Geritz S., Kisdi E. On the mechanistic underpinning of discrete-time population models with complex dynamics. Journal of Theoretical Biology. 2004. V. 228. P. 261–269.

3. Lorenz E. N. Deterministic non-periodic flow. J. Atmos. Sci. 1963. V. 20. P. 131–141.

4. Leonov G. A., Kuznetsov N., Korzhemanova N. A., Kusakin D. V. Lyapunov dimension formula for the global attractor of the Lorenz system. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2016. V. 41. P. 841–103.

О.В. Ширяева, Л.С. Зеленко

РАЗРАБОТКА ERP-СИСТЕМЫ ДЛЯ НЕЗАВИСИМОГО МУЗЫКАЛЬНОГО ИЗДАТЕЛЬСТВА

(Самарский университет)

С каждым годом цифровая трансформация не только охватывает все больше различных сфер жизни и бизнеса, но и активно изменяет те сферы, которые работают в онлайн уже давно, например, интернет-магазины. Если современный магазин хочет быть конкурентоспособным, каталога товаров и значка корзины уже недостаточно, необходимы мобильные и полнофункциональные веб-приложения, которые не просто позволяют купить товар, но и выполняют такие функции, как рекомендации, уведомления о скидках, интересные материалы в ленте блога, интеграция с социальными сетями.

Цифровая трансформация нужна и владельцам бизнеса: они должны своевременно получать информацию в удобном виде по состоянию своей ком-