Л. И. Фридман

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН С УЧЕТОМ ИНЕРЦИИ ВРАЩЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ СДВИГА

При исследованиях колебаний дисков компрессоров и турбин, шестерен и других деталей основные элементы их схематизируются одной или несколькими круглыми пластинами постоянной толщины.

До последнего времени оставалась нерешенной проблема колебаний круглых пластин при отказе от гипотезы Кирхгофа. Решение этой проблемы с целью определения области применения гипотезы Кирхгофа и уточнения частот, лежащих вне области применения последней, представляет практический интерес.

В работе исследуются колебания круговых пластин с учетом инерции вращения и деформаций сдвига в рамках гипотезы, являющейся аналогом теории Тимошенко для стержней.

1. Уравнения колебаний пластин, полученные на основе отказа от гипотезы Кирхгофа в безразмерной декартовой системе координат x_1, x_2, z, имеют вид [1]:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\varphi+a_{12}u &= -\frac{2(1+\nu)}{kE\varkappa}\,q(x_1, x_2, t)\\ a_{21}\varphi+a_{22}u &= -\eta\,\frac{6\nu(1+\nu)}{5E\varkappa}\,q(x_1, x_2, t), \end{aligned}\right| \tag{1.1}$$

$$\nabla^2\psi-\frac{2}{1-\nu}\left(b\psi+\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)=0. \tag{1.2}$$

Здесь u — безразмерный прогиб пластины, отнесенный к характерному линейному размеру l; t — безразмерное время, отнесенное к $\frac{l}{c}\sqrt{1-\nu^2}$; $c=\sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}$ — скорость распространения возмущений в одномерной задаче, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, g — ускорение силы тяжести, γ — удельный вес материала стержня, h — толщина пластины, $\varkappa=\frac{h}{l}$; $b=6k(1-\nu)\frac{1}{\varkappa^2}$; k — коэффициент распределения касательных напряжений, меняющийся в пределах $\frac{2}{3}\div\frac{5}{6}$ [2,3]; η — безразмерный коэффициент; $q(x_1, x_2, t)$ — распределенная нагрузка; a_{ij} $(i=1, 2;\ j=1, 2)$ — дифференциальные операторы: $a_{11}=\nabla^2$; $a_{12}=-\nabla^2+\frac{2}{k(1-\nu)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$; $a_{21}=\nabla^2-b^2-\frac{\partial^2}{\partial t^2}$; $a_{22}=b+\frac{\eta\nu}{5(1+\nu)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$; ∇^2 — оператор Лапласа; φ и ψ — безразмерные функции, связанные с проекциями угла поворота нормали к срединной плоскости (при пренебрежении деформациями сдвига) на координатные плоскости x_1oz и x_2oz зависимостями

$$\vartheta_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}; \quad \vartheta_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial\psi}{\partial x_1}.$$

Коэффициент η равен либо единице, либо нулю. В последнем случае пренебрегается напряжениями σ_z, при этом гипотеза колебаний пластин становится аналогом теории Тимошенко о колебаниях стержней [2,3].

Таким образом, в работе [1] задача сведена к нахождению функций φ и u из системы (1.1) и функции Ψ из уравнения (1.2).

Так как дифференциальные операторы $a_{ij} (i=1,2;\ j=1,2)$ являются линейными и не содержат переменных коэффициентов, то система (1.1) заменяется одним уравнением с одной неизвестной функцией (производящей функцией) [4]. Введем функции F и Φ, связанные с u и φ зависимостями:

$$\varphi = a_{22} F - a_{12}\Phi, \qquad (1.3)$$

$$u = -a_{21} F + a_{11}\Phi.$$

Подставляя равенства (1.3) в систему (1.1), получаем:

$$DF = -\frac{2(1+\nu)}{kE\varkappa}\, q; \qquad (1.4)$$

$$D\Phi = -\eta\,\frac{6\nu(1+\nu)}{5E\varkappa}\, q. \qquad (1.5)$$

Здесь D — дифференциальный оператор, вычисляемый как определитель, элементами которого являются операторы a_{ij}:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \nabla^2\nabla^2 - \left(\frac{2}{k(1-\nu)} + 1 + \frac{\eta\nu}{6\varkappa^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2 +$$

$$+ \frac{12}{\varkappa^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2}{k(1-\nu)}\frac{\partial^4}{\partial t^4}.$$

Из сравнения формул (1.4) и (1.5) следует (в предположении $k = \frac{5}{6}$):

$$\Phi = \frac{\nu\eta}{2}\, F.$$

Таким образом, система (1.1) заменена уравнением (1.4), и задача о колебаниях пластин с учетом инерции вращения и сдвига сводится к нахождению функций F и Ψ из уравнений (1.4) и (1.2). При этом

$$\vartheta_1 = -b\frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\nu\eta}{2}\left(\nabla^2 - \frac{7}{3k(1-\nu^2)}\right)\frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi}{\partial x_2};$$

$$\vartheta_2 = -b\frac{\partial F}{\partial x_2} - \frac{\nu\eta}{2}\left(\Delta^2 - \frac{7}{3k(1-\nu^2)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\partial F}{\partial x_2} - \frac{\partial\psi}{\partial x_1}; \qquad (1.6)$$

$$u = \nabla^2 F - \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - bF - \frac{\nu\eta}{2}\nabla^2 F.$$

Применяя метод Фурье к однородной задаче, можно уравнения (1.2) и (1.4) свести к уравнениям собственных функций. Условия ортогональности и решение неоднородных задач для прямоугольных пластин в предположении $\eta=0$ приведены в работе [3].

2. Уравнения равновесия элемента колеблющейся пластины, составленные с учетом инерции вращения, в безразмерных полярных координатах ρ и Θ имеют вид:

$$\frac{\partial Q_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} Q_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial Q_\Theta}{\partial \Theta} = -\frac{hE}{1-\nu^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - qR;$$

$$\frac{1}{R}\left(\frac{1}{\rho} M_\rho + \frac{\partial M_\rho}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} M_\Theta + \frac{1}{\rho}\frac{\partial M_{\rho\Theta}}{\partial \Theta}\right) - Q_\rho - \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)R^2}\cdot\frac{\partial^2 v_\rho}{\partial t^2} = 0;$$

$$\frac{1}{R}\left(\frac{\partial M_{\rho\Theta}}{\partial \rho} + 2\frac{1}{\rho} M_{\rho\Theta} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial M_\Theta}{\partial \Theta}\right) - Q_\Theta - \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)R^2}\frac{\partial^2 v_\Theta}{\partial t^2} = 0. \qquad (2.1)$$

Здесь R — наружный радиус пластины (характерным линейным размером здесь и далее везде считается R); M_ρ и M_Θ — погонные изгибающие моменты соответственно на линиях $\rho=\mathrm{const}$ и $\Theta=\mathrm{const}$; $M_{\rho\Theta}$ — погонный крутящий момент; Q_ρ и Q_Θ — погонные перерезывающие силы соответственно на линиях $\rho=\mathrm{const}$, и $\Theta=\mathrm{const}$; u — безразмерный прогиб; v_ρ и v_Θ — проекции угла поворота нормали (при пренебрежении деформациями сдвига) на радиальную и тангенциальную плоскости соответственно.

Предполагая справедливой для деформаций сдвига гипотезу, являющуюся аналогом теории Тимошенко для стержней [5], можно записать:

$$M_\rho = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)R}\left[\frac{\partial \vartheta_\rho}{\partial \rho} + \nu\left(\frac{1}{\rho} v_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \vartheta_\Theta}{\partial \Theta}\right)\right],$$

$$M_\Theta = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)R}\left[\frac{1}{\rho}\vartheta_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \vartheta_\Theta}{\partial \Theta} + \nu\frac{\partial \vartheta_\rho}{\partial \rho}\right],$$

$$M_{\rho\Theta} = \frac{Eh^3}{24(1+\nu)R}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial \vartheta_\rho}{\partial \Theta} + \frac{\partial v_\Theta}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\vartheta_\Theta\right], \qquad (2.2)$$

$$Q_\rho = \frac{kEh}{2(1+\nu)}\left(\vartheta_\rho - \frac{\partial u}{\partial \rho}\right),$$

$$Q_\Theta = \frac{kEh}{2(1+\nu)}\left(\vartheta_\Theta - \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \Theta}\right).$$

Подставляя формулы (2.2) в выражения (2.1), получим систему уравнений колебаний пластин с учетом инерции вращения и деформаций сдвига в полярных координатах:

$$\frac{\partial \vartheta_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\vartheta_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \vartheta_\Theta}{\partial \Theta} - \nabla^2 u + \frac{2}{k(1-\nu)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{2(1+\nu)}{kE\varkappa} q;$$

$$l\vartheta_\rho - \nabla^2\vartheta_\rho + \frac{1}{\rho^2}\vartheta_\rho + \frac{1+\nu}{2}\,\frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2\vartheta_\rho}{\partial\Theta^2} + \frac{\partial^2\vartheta_\rho}{\partial t^2} + \frac{3-\nu}{2}\,\frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial\vartheta_\Theta}{\partial\Theta} -$$

$$- \frac{1+\nu}{2}\,\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial^2\vartheta_\Theta}{\partial\rho\,\partial\Theta} - b\,\frac{\partial u}{\partial\rho} = 0; \tag{2.3}$$

$$- \frac{3-\nu}{2}\,\frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial\vartheta_\rho}{\partial\Theta} - \frac{1+\nu}{2}\,\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial^2\vartheta_\rho}{\partial\rho\,\partial\Theta} + b\vartheta_\Theta - \frac{1-\nu}{2}\,\nabla^2\vartheta_\Theta +$$

$$+ \frac{1-\nu}{2}\,\frac{1}{\rho^2}\,\vartheta_\Theta - \frac{1+\nu}{2}\,\frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2\vartheta_\Theta}{\partial\Theta^2} + \frac{\partial^2\vartheta_\Theta}{\partial t^2} - b\,\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial u}{\partial\Theta} = 0.$$

Метод производящих функций непосредственно к системе (2.3) не может быть применен, так как система (2.3) имеет переменные коэффициенты. Имея в виду, что $v_\Theta = v_{1(\Theta=0)}$, $v_\Theta = v_{2(\Theta=0)}$, из выражения (1.6) получим (при $\eta=0$):

$$\vartheta_\rho = -b\,\frac{\partial F}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\psi}{\partial\Theta};$$

$$\vartheta_\Theta = -b\,\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial F}{\partial\Theta} - \frac{\partial\psi}{\partial\rho}; \tag{2.4}$$

$$u = \nabla^2 F - \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - bF.$$

Подстановка выражений (2.4) в уравнения (2.3) показывает, что система (2.3) эквивалентна уравнениям (1.2) и (1.3) при $\eta=0$.

3. Решение однородной задачи следует искать в виде:

$$\vartheta_\rho = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\vartheta^*_{\rho\,mn}\cdot T_{mn};$$

$$\vartheta_\Theta = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\vartheta^*_{\Theta mn}\,T_{mn}; \tag{3.1}$$

$$u = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}u^*_{mn}\,T_{mn}; \tag{3.2}$$

$$F = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}F^*_{mn}\,T_{mn};$$

$$\psi = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\psi^*_{mn}\,T_{mn}.$$

Здесь $\vartheta^*_{\rho mn}$, $\vartheta^*_{\Theta mn}$, u^*_{mn}, F^*_{mn}, ψ^*_{mn} — функции координат ρ, Θ; T_{mn} — функция времени t, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{1}{T_{mn}}\cdot\frac{d^2T_{mn}}{dt^2} = -\lambda^2_{mn},$$

где λ_{nm} — безразмерная частота.

Подставляя выражения (3.1) в уравнения (2.3), получим систему уравнений собственных форм:

$$\frac{k(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial\vartheta^*_{\rho mn}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\vartheta^*_{\rho mn}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\vartheta^*_{\Theta mn}}{\partial\Theta}-\nabla^2 u^*_{mn}\right)=\lambda^2_{mn}u^*_{mn};$$

$$b\vartheta^*_{\rho mn}-\nabla^2\vartheta^*_{\rho mn}+\frac{1}{\rho^2}\vartheta^*_{\rho mn}+\frac{1+\nu}{2}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\vartheta^*_{\rho mn}}{\partial\Theta^2}+\frac{3-\nu}{2}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial v^*_{\Theta mn}}{\partial\Theta}-$$

$$-\frac{1+\nu}{2}\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 v^*_{\Theta mn}}{\partial\rho\,\partial\Theta}-b\frac{\partial u^*_{mn}}{\partial\rho}=\lambda^2_{mn}\vartheta^*_{\rho mn}; \tag{3.3}$$

$$-\frac{3-\nu}{2}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial\vartheta^*_{\rho mn}}{\partial\Theta}-\frac{1+\nu}{2}\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2\vartheta^*_{\rho mn}}{\partial\rho\,\partial\Theta}+b\vartheta^*_{\Theta mn}-\frac{1-\nu}{2}\nabla^2\vartheta^*_{\Theta mn}+$$

$$+\frac{1-\nu}{2}\frac{1}{\rho^2}\vartheta^*_{\Theta mn}-\frac{1+\nu}{2}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\vartheta^*_{\Theta mn}}{\partial\Theta^2}-b\frac{1}{\rho}\frac{\partial u^*_{mn}}{\partial\Theta}=\lambda^2_{mn}\vartheta^*_{\Theta mn}.$$

Умножая уравнения (3.3) соответственно на u^*_{rs}, $\frac{\varkappa^2}{12}\vartheta^*_{\rho rs}$, $\frac{\varkappa^2}{12}\vartheta^*_{\Theta rs}$, складывая их и интегрируя по срединной плоскости с учетом граничных условий на линии $\rho=\text{const}$:

$u=0,\ \ \vartheta_\rho=0,\ \ \vartheta_\Theta=0$ (заделанный край);
$u=0,\ \ \vartheta_\Theta=0,\ \ M_\rho=0$ (опертый край);
$M_\rho=0,\ \ M_{\rho\Theta}=0,\ \ Q_\rho=0$ (свободный край);

на линии $\Theta=\text{const}$:

$u=0,\ \ \vartheta_\rho=0,\ \ \vartheta_\Theta=0$ (заделанный край);
$u=0,\ \ \vartheta_\rho=0,\ \ M_\Theta=0$ (опертый край);
$M_\Theta=0,\ M_{\rho\Theta}=0,\ Q_\Theta=0$ (свободный край),

получим условие ортогональности при $m\neq r$, $n\neq s$:

$$\iint\left[u^*_{mn}u^*_{rs}+\frac{\varkappa^2}{12}\left(\vartheta^*_{\rho mn}\vartheta^*_{\rho rs}+\vartheta^*_{\Theta mn}\vartheta^*_{\Theta rs}\right)\right]\rho\,d\rho\,d\Theta=0. \tag{3.4}$$

Для круговых и кольцевых пластин следует положить:

$$\vartheta^*_{\rho mn}=\vartheta_{\rho mn}\cos n\Theta;\ \ \vartheta_{\Theta mn}=\vartheta_{\Theta mn}\cdot\sin n\Theta.$$

$$u^*_{mn}=u_{mn}\cos n\Theta \tag{3.5}$$

$$F^*_{mn}=F_{mn}\cos n\Theta;\ \ \psi^*_{mn}=\psi_{mn}\cdot\sin n\Theta. \tag{3.6}$$

Здесь m и n — число соответственно узловых окружностей и узловых диаметров; $\vartheta_{\rho mn}$, $\vartheta_{\Theta mn}$, u_{mn}, F_{mn}, ψ_{mn} — функции ρ:

$$\vartheta_{\rho mn}=-b\frac{dF_{mn}}{d\rho}+\frac{n}{\rho}\psi_{mn},$$

$$\vartheta_{\Theta mn} = b\frac{n}{\rho}F_{mn} - \frac{d\psi_{mn}}{d\rho}, \tag{3.7}$$

$$u_{mn} = \nabla^2 F_{mn} - \frac{n^2}{\rho^2}F_{mn} + \lambda_{mn}^2 F_{mn} - bF_{mn}.$$

Подставляя равенства (3.5) в (3.4) и интегрируя по Θ, получаем

$$\pi\int\limits_{\rho_0}^{1}\left[u_{mn}\cdot u_{rn} + \frac{\varkappa^2}{12}\left(\vartheta_{\rho mn}\cdot\vartheta_{\rho rn} + \vartheta_{\Theta mn}\cdot\vartheta_{\Theta vn}\right)\right]\rho d\rho = \delta_{mv} \tag{3.8}$$

Здесь δ_{mr} — символ Кронекера (предполагается, что функции $\sqrt{\pi}\cdot u_{mn}$, $\sqrt{\pi}\vartheta_{\rho mn}$, $\sqrt{\pi}\vartheta_{\Theta mn}$ — ортонормированы).

Подставляя выражения (3.2) в (1.2) и (1.4), получаем:

$$\nabla^2\psi_{mn}^* - \frac{2}{1-\nu}\left(b-\lambda_{mn}^2\right)\psi_{mn}^* = 0. \tag{3.9}$$

$$\nabla^2\nabla^2 F_{mn}^* + \left(\frac{2}{k(1-\nu)}+1\right)\lambda_{mn}^2\nabla^2 F_{mn}^* +$$

$$+\left(\frac{2}{k(1-\nu)}\lambda_{mn}^4 - \frac{12}{\varkappa^2}\lambda_{mn}^2\right)F_{mn}^* = 0. \tag{3.10}$$

Уравнение (3.10) может быть заменено двумя уравнениями второго порядка:

$$\nabla^2 F_{1mn}^* - \alpha_{1mn}^2 F_{1mn}^* = 0;$$

$$\nabla^2 F_{2mn}^* + \alpha_{2mn}^2 F_{2mn}^* = 0. \tag{3.11}$$

Здесь

$$F_{1mn}^* + F_{2mn}^* = F_{mn}^*;$$

$$\alpha_{1mn} = \sqrt{-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{k(1-\nu)}+1\right)\lambda_{mn}^2 + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{2}{k(1-\nu)}+1\right)^2\lambda_{mn}^4 + \frac{12}{\varkappa^2}\lambda_{mn}^2}};$$

$$\alpha_{2mn} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{k(1-\nu)}+1\right)\lambda_{mn}^2 + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{2}{k(1-\nu)}+1\right)^2\lambda_{mn}^4 + \frac{12}{\varkappa^2}\lambda_{mn}^2}}.$$

Подставляя равенства (3.6) в выражения (3.9) и (3.11), получаем бесселевы уравнения:

$$\frac{d^2\psi_{mn}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\psi_{mn}}{d\rho} - \left(\frac{n^2}{\rho^2}+\beta_{mn}^2\right)\psi_{mn} = 0;$$

$$\frac{d^2F_{1mn}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dF_{1mn}}{d\rho} - \left(\frac{n^2}{\rho^2}+\alpha_{1mn}^2\right)F_{1mn} = 0; \tag{3.12}$$

$$\frac{d^2F_{2mn}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dF_{2mn}}{d\rho} - \left(\frac{n^2}{\rho^2}-\alpha_{2mn}^2\right)F_{2mn} = 0.$$

Здесь $\beta_{mn} = \sqrt{\frac{2}{1-\nu}\left(b-\lambda_{mn}^2\right)}$

$$F_{1mn}\cdot\cos n\Theta = F^*_{1mn}; \quad F_{2mn}\cdot\cos n\Theta = F^*_{2mn}.$$

Решая уравнения (3.11) при $\lambda^2_{mn} < b$, получаем:

$$F_{1mn} = A_{1mn} I_n(\rho\alpha_{1mn}) + B_{1mn} K_n(\rho\alpha_{1mn});$$
$$F_{2mn} = A_{2mn} I_n(\rho\alpha_{2mn}) + B_{2mn} Y_n(\rho\alpha_{2mn}); \tag{3.13}$$
$$\psi_{mn} = A_{3mn} I_n(\rho\beta_{mn}) + B_{3mn} K_n(\rho\beta_{mn}).$$

Здесь I_n — бесселева функция первого рода n-го порядка;
Y_n — бесселева функция второго рода n-го порядка;
In — модифицированная бесселева функция первого рода n-го порядка;
K_n — модифицированная бесселева функция второго рода n-го порядка.

При $\lambda^2_{mn} > b$ функции $I_n(\rho\alpha_{1mn})$, $K_n(\rho\alpha_{1mn})$, $I_n(\rho\beta_{mn})$, $K_n(\rho\beta_{mn})$ переходят соответственно в $I_n(\rho i\,\alpha_{1mn})$, $Y_n(\rho i\,\alpha_{1mn})$, $I_n(\rho i\,\beta_{mn})$, $Y_n(\rho i\,\beta_{mn})$, где i — мнимая единица, а $i\alpha_{1mn}$, $i\beta_{mn}$ — действительные числа.

Полученные зависимости решают проблему свободных колебаний круглых и кольцевых пластин с учетом инерции вращения и деформации сдвига.

4. В качестве примера рассмотрим свободные колебания кольцевой пластины, заделанной по внутреннему краю ($\rho=\rho_0$) и свободной по внешнему краю ($\rho=1$).

Из зависимостей (2.2), (3.1) и (3.5) получим:

$$M_\rho = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)R}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} M_{\rho mn}\cdot\cos n\Theta\cdot T_{mn},$$

$$M_\Theta = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)R}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} M_{\Theta mn}\cos n\Theta\cdot T_{mn},$$

$$M_{\rho\Theta} = \frac{Eh^3}{24(1+\nu)R}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} M_{\rho\Theta mn}\sin n\Theta\cdot T_{mn},$$

$$Q_\rho = \frac{kEh}{2(1+\nu)}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} Q_{\rho mn}\cos n\Theta\cdot T_{mn},$$

$$Q_\Theta = \frac{kEh}{2(1+\nu)}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} Q_{\Theta mn}\sin n\Theta\, T_{mn}.$$

Здесь

$$M_{\rho mn} = \frac{d\vartheta_{\rho mn}}{d\rho} + v\left(\frac{1}{\rho}\,\vartheta_{\rho mn} + \frac{n}{\rho}\,\vartheta_{\Theta mn}\right);$$

$$M_{\Theta mn} = \nu\frac{d\vartheta_{\rho mn}}{d\rho} + \frac{1}{\rho}\,\vartheta_{\rho mn} + \frac{n}{\rho}\,\vartheta_{\Theta mn}$$

$$M_{\rho\Theta mn} = -\frac{n}{\rho}\vartheta_{\rho mn} + \frac{d\vartheta_{\Theta mn}}{d\rho} - \frac{1}{\rho}\vartheta_{\Theta mn}.$$

$$Q_{\rho mn} = \vartheta_{\rho mn} - \frac{du_{mn}}{d\rho};$$

$$Q_{\Theta mn} = \vartheta_{\Theta mn} + \frac{n}{\rho}u_{mn}.$$

Граничные условия для рассматриваемого случая запишутся в виде:

$$\rho = \rho_0 \quad u_{mn} = 0, \quad \vartheta_{\rho mn} = 0, \quad \vartheta_{\Theta mn} = 0.$$

$$\rho = 1 \quad M_{\rho mn} = 0, \quad Q_{\rho mn} = 0, \quad M_{\rho\Theta mn} = 0. \qquad (4.1)$$

Условия (4.1) дают шесть однородных уравнений относительно постоянных интегрирования A_{jmn}, B_{jmn} ($j=1, 2, 3$).

Геометрические параметры	Число m	Частота λ_{mn} при следующих n						
		0	1	2	3	4	5	6
$\frac{R}{h}=10$, $\rho_0=0,3$	0	0,192 0,188	0,189 0,184	0,229 0,224	0,383 0,38	0,637 0,63	0,969 0,942	1,368 1,304
	1	1,23 1,09	1,288 1,15	1,471 1,316	1,791 1,605	2,255 2,006	2,852 2,495	3,561 3,04
	2	3,564 2,841	3,632 2,9	3,842 3,062	4,206 3,352	4,736 3,735	5,439 4,237	6,307 4,82
$\frac{R}{h}=30$, $\rho_0=,03$	0	0,0641 0,0639	0,0631 0,0629	— —	— —	— —	— —	— —
	1	0,41 0,404	0,429 0,423	0,49 0,484	0,597 0,59	0,752 0,742	0,951 0,937	1,127 1,166
	2	1,188 1,151	1,211 1,172	1,281 1,239	1,402 1,356	1,579 1,525	1,813 1,748	2,102 2,02
$\frac{R}{h}=30$, $\rho_0=0,7$	0	0,356 0,353	0,361 0,357	0,378 0,375	0,430 0,408	0,463 0,461	0,538 0,536	0,638 0,635
	1	2,308 2,153	2,322 2,167	2,363 2,207	2,432 2,274	2,528 2,363	2,65 2,482	2,798 2,623
	2	6,55 5,652	6,563 5,663	6,603 5,697	6,671 5,755	6,765 5,834	6,686 5,937	7,034 6,061

Примечание. Для каждой формы колебаний верхняя цифра соответствует частоте, полученной по гипотезе Кирхгофа.

Условие равенства нулю определителя системы дает уравнение, из которого определяется безразмерная частота λ_{mn}.

Такие вычисления были проведены на ЭЦВМ М-220 для пластины с параметрами $\frac{R}{h}=10$, 20, 30 и $\rho_0=0{,}3$; 0,7. Наиболее характерные результаты этих вычислений приведены в табл. 1. Для сравнения там же даны частоты, полученные на основе гипотезы Кирхгофа.

Анализ результатов показывает, что при граничных условиях (4.1) частоты, полученные по предлагаемой методике с учетом инерции вращения и деформаций сдвига, существенно отличаются от частот, полученных по гипотезе Кирхгофа для форм пластин с узловыми окружностями.

Переход от безразмерных частот λ_{mn} к размерным ω_{mn} осуществляется по формуле

$$\omega_{mn}=\lambda_{mn}\frac{1}{R}\sqrt{\frac{Eg}{(1-\nu^2)\gamma}}.$$

5. Решение неоднородной задачи ищем в виде:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_{mn}\cdot u_{mn}\cdot\cos n\Theta;\\ \vartheta_\rho &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_{mn}\,\vartheta_{\rho mn}\cos n\Theta;\\ \vartheta_\Theta &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_{mn}\,\vartheta_{\Theta mn}\sin n\Theta. \end{aligned}\tag{5.1}$$

Подставляя выражения (5.1) в (2.3), умножая полученные уравнения соответственно на $u_{rs}\cos s\Theta$, $\frac{\varkappa^2}{12}\cdot\vartheta_{\rho rs}\cos s\Theta$, $\frac{\varkappa^2}{12}\vartheta_{\Theta rs}\sin s\Theta$, складывая их и интегрируя по срединной плоскости, с учетом равенств (3.5) и (3.8) получим

$$\frac{d^2\varphi_{mn}}{dt^2}+\lambda_{mn}^2\varphi_{mn}=f_{mn}(t).\tag{5.2}$$

Здесь

$$f_{mn}(t)=-\frac{1-\nu^2}{\varkappa E}\iint q\cdot u_{mn}\cos n\Theta\cdot\rho d\rho d\Theta.$$

Полагая при $t=0$ $u=0$, $\vartheta_\rho=0$, $\vartheta_\Theta=0$, $\frac{\partial u}{\partial t}=0$, $\frac{\partial\vartheta_\rho}{\partial t}=0$, $\frac{\partial\vartheta_\Theta}{\partial t}=0$ или при $t=0$ $\varphi_{mn}=0$, $\frac{\partial\varphi_{mn}}{\partial t}=0$, решение уравнения (5.2) получим в виде

$$\varphi_{mn}=\frac{1}{\lambda_{mn}}\int_0^t f_{mn}(\tau)\cdot\sin\lambda_{mn}(t-\tau)\,d\tau,$$

где τ — безразмерный параметр интегрирования.

Полученное в замкнутом виде решение уравнений собственных колебаний круглых пластин с учетом инерции вращения и сдвига позволяет уточнить частоты колебаний круглых пластин в сравнении с вычисленными на основе гипотезы Кирхгофа и определить область применения последней.

ЛИТЕРАТУРА

1. Москаленко В. Н. К применению уточненных теорий изгиба пластин в задаче о собственных колебаниях. Инженерный журнал, том I, вып. 3. 1961.
2. Уфлянд Я. С. Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин. ПММ, т. XII, 1948.
3. Дубинкин М. В. Колебания плит с учетом инерции вращения и сдвига. «Известия АН СССР, ОТН 1958, № 12.
4. Уилсон, Хук. О производящих функциях в прикладной механике. Русский перевод. «Прикладная механика», М., «Мир», 1969, № 14.
5. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М., ГИФМЛ, 1959.