ЛИТЕРАТУРА

1. Лозицкий Л. П. Расчет долговечности в условиях трехкомпонентного нагружения. В сб. «Надежность и долговечность авиационных ГТД». Вып. 1. Киев, КНИГА, 1971.

2. Сулима А. М. и др. Некоторые данные о влиянии повышенных частот на выносливость жаропрочных сплавов. В сб. «Труды научно-технической сессии по жаропрочности материалов и сплавов института металлургии им. А. А. Байкова АН СССР». М., «Металлургия», 1964.

3. Цейтлин В. И. Некоторые вопросы конструкционной прочности материалов. В сб. «Некоторые вопросы проектирования и доводки авиационных газотурбинных двигателей». Вып. 45. Куйбышев, КУАИ, 1970.

4. Форрест П. Г. Усталость металлов. Перевод с англ. М., «Машиностроение», 1968.

5. Хэйвуд Р. Б. Проектирование с учетом усталости. Перевод с англ. М., «Машиностроение», 1969.

Н. С. Кондрашов

КОЛЕБАНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК С СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССОЙ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ СЛУЧАЙНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ

В газотурбинных двигателях корпуса основных и форсажных камер сгорания, сопла, трубопроводы большого диаметра и некоторые другие конструкции представляют собой оболочки. В большинстве случаев оболочечные конструкции несут на своих поверхностях сосредоточенные включения масс в виде бобышек, штуцеров, мелких агрегатов. Основной динамической нагрузкой для таких деталей является пульсирующее давление в омывающем конструкцию потоке, которое в общем случае наиболее полно можно описать случайными процессами.

Вынужденные колебания механических систем с распределенными параметрами, подверженных случайным воздействиям, в том числе и тонкостенных оболочек, достаточно полно рассмотрены в работах [1, 3, 7, 10, 11]. В указанных работах решение представлено в виде разложения по собственным функциям. Применительно к системам с дополнительной сосредоточенной массой такой метод требует предварительного решения громоздкой детерминистической задачи. Для тонкостенных оболочек примеры решения таких задач приведены в работах [2, 5, 6. 12]. Каждую собственную форму колебаний в этом случае представляют в виде разложения по собственным функциям системы без дополнительной массы, а собственные частоты определяют из решения громоздких трансцендентных уравнений.

Изложенный в данной статье метод основан на использовании функции Грина [9]. Этот метод, с одной стороны, позволяет избежать решения трансцендентного уравнения, с другой, — получить решение в более компактном виде. Предлагаемый метод оказывается значительно эффективнее не только при решении задач о вынужденных колебаниях систем с дополнительной сосредоточенной массой, но и в отдельных случаях применительно к системам без дополнительной массы (например, когда функцию Грина удается представить в замкнутом виде).

1 Рассмотрим оболочку, несущую сосредоточенную массу M, координаты срединной поверхности которой определяются вектором x, а координаты места расположения сосредоточенной массы — вектором $x_м$. Оболочка нагружена случайным пульсирующим давлением, стационарным во времени, переменная составляющая которого — $p(x, t)$. Дальше будем учитывать только пульсирующую составляющую давления.

Пульсацию давления в точке x_1 представим в виде интеграла Фурье

$$p(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x, \omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega,$$

где ω — круговая частота,

t — время,

i — мнимая единица.

Положим далее, что связь между реакцией оболочки R (перемещением, внутренним усилием, напряжением и т. п.), в точке с координатой x и радиальным усилием P в точке x_1 на частоте ω определяется зависимостью

$$R(x, x_1, \omega, t) = P(x_1, \omega)\, \delta_R(x, x_1, \omega)\, e^{i\omega t},$$

где $\delta_R(x, x_1, \omega)$ — комплексная гармоническая функция влияния (функция Грина).

Тогда на основании принципа суперпозиции для линейных систем можно записать:

$$R(x, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \iint\limits_{s} R(x, x_1, \omega, t)\, ds_1\, d\omega = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big[\iint\limits_{s} p(x_1, \omega) \times \\ \times \delta_R(x, x_1, \omega)\, ds_1 + M\omega^2 w(x_м, \omega)\, \delta_R(x, x_м, \omega)\Big]\, e^{i\omega t}\, d\omega, \qquad (1)$$

где $w(x_м, \omega)$ — радиальные перемещения точки $x_м$ поверхности оболочки,

s_1 — элемент поверхности оболочки.

Используя соотношение (1), установим связь между спектральными плотностями давления и функции $R(x,t)$.

Спектральные плотности перемещения сосредоточенной массы, взаимные спектральные плотности пульсаций давления и перемещения сосредоточенной массы, а также взаимные спектральные плотности пульсаций давления в точках с координатами x_1, x'_1 вводятся формулами [8]:

$$\langle w^*(x_м, \omega)\, p(x_1, \omega') \rangle = F_{wp}(x_м, x_1\, \omega)\, \delta(\omega - \omega'),$$
$$\langle p^*(x_1, \omega)\, w(x_м, \omega') \rangle = F_{pw}(x_м, x_1, \omega)\, \delta(\omega - \omega'), \qquad (2)$$

$$<w^*(x_м,\ \omega)\,w(x_м,\ \omega')> = F_w(x_м,\ \omega)\,\delta(\omega-\omega'),$$
$$<p^*(x_1,\ \omega)\,p(x_1',\ \omega')> = F_p(x_1,\ x_1',\ \omega)\,\delta(\omega-\omega').$$

Здесь угловыми скобками обозначена операция осреднения, а звездочкой — комплексно-сопряженная величина, $\delta(\omega-\omega')$ дельта-функция Дирака.

Функция $F_w(x_c,\ \omega)$ обладает свойством спектральной плотности, функции $F_{pw}(x_м,\ x_1,\ \omega)$, $F_{wp}(x_м,\ x_1,\ \omega)$, $F_p(x_1,\ x_1',\ \omega)$ по частоте обладают свойством спектральной плотности, по координате — свойством корреляционной функции.

Функции F_w, F_{pw}, F_{wp} могут быть получены также интегральным преобразованием Фурье соответствующих корреляционных функций:

$$F_{wp}(x_м,\ x_1,\ \omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}<w^*(x_м,\ \omega,\ t)\,p(x_1,\ \omega,\ t+\tau)>e^{-i\omega\tau}\,d\tau,$$

$$F_{pw}(x_м,\ x_1,\ \omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}<p^*(x_1,\ \omega,\ t)\,w(x_м,\ \omega,\ t+\tau)>e^{-i\omega\tau}\,d\tau; \quad (3)$$

$$F_w(x_м,\ \omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}<w^*(x_м,\ \omega,\ t)\,w(x_м,\ \omega,\ t+\tau)>e^{-i\omega\tau}\,d\tau.$$

После подстановки (1) в выражение (3) и несложных преобразований, учитывающих (2), легко убедиться что:

$$F_{wp}(x_м,\ x_1,\ \omega) = \frac{\iint\limits_S F_p\left(x_1,\ x_1',\ \omega\right)\delta_w^*\left(x_м,\ x_1',\ \omega\right)ds_1'}{1-M\omega^2\,\delta_w^*(x_м,\ x_м,\ \omega)},$$

$$F_{pw}(x_м,\ x_1,\ \omega) = \frac{\iint\limits_S F_p\left(x_1,\ x_1',\ \omega\right)\delta_w\left(x_м,\ x_1',\ \omega\right)ds_1''}{1-M\omega^2\,\delta_w(x_м,\ x_м,\ \omega)},$$

$$F_w(x_м,\ \omega) = \frac{\iint\limits_S\iint\limits_S F_p\left(x_1,\ x_1',\ \omega\right)\delta_w^*\left(x_м,\ x_1,\ \omega\right)\delta_w\left(x_м,\ x_1',\ \omega\right)ds_1\,ds_1'}{\left(1-M\omega^2\,\delta_\omega^*(x_м,\ x_м,\ \omega)\right)\left(1-M\omega^2\,\delta_w(x_м,\ x_м,\ \omega)\right)}. \quad (4)$$

Из полученных зависимостей можно установить, что величины $F_{wp}(x_м,\ x_1,\ \omega)$ и $F_{pw}(x_м,\ x_1,\ \omega)$ — комплексно-сопряженные, а величина $F_w(x_м,\ \omega)$ — действительная.

Аналогично, подставляя в равенство

$$F_R(x,\ \omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}<R^*(x,\ \omega,\ t)\,R(x,\ \omega,\ t+\tau)>e^{-i\omega\tau}\,d\tau$$

формулу (1) и учитывая (2), получим общую зависимость, связывающую спектральные плотности реакции оболочки и пульсаций давления

$$F_R(x, \omega) = \iint\limits_S \iint\limits_S F_p(x_1, x_1', \omega)\delta_R^*(x, x_1, \omega)\delta_R(x, x_1', \omega)ds_1 ds_1' +$$
$$+ M\omega^2[\delta_R(x, x_м, \omega)\iint\limits_S F_{pw}(x_м, x_1, \omega)\delta_R^*(x, x_1, \omega)ds_1 +$$
$$+ \delta_R^*(x, x_м, \omega)\iint\limits_S F_{wp}(x_м, x_1, \omega)\delta_R(x, x_1, \omega)ds_1] +$$
$$+ M^2\omega^4 F_w(x_м, \omega)\delta_R^*(x, x_м, \omega)\delta_R(x, x_м, \omega). \quad (5)$$

Подставляя выражения (4) в (5) и учитывая, что $F_{wp} = F_{pw}^*$, окончательно получим:

$$F_R(x, \omega) = \iint\limits_S \iint\limits_S F_p(x_1, x_1', \omega)\Phi(x, x_м, x, x_1', \omega, M)ds_1 ds_1', \quad (6)$$

где $\Phi(x, x_м, x_1, x_1', \omega, M) = \delta_R^*(x, x_1, \omega)\delta_R(x, x_1', \omega) +$

$$+ 2\,\mathrm{Re}\,M\omega^2 \frac{\delta_R(x, x_м, \omega)\,\delta_R^*(x, x_1, \omega)\,\delta_w(x_м, x_1', \omega)}{1 - M\omega^2\delta_w(x_м, x_м, \omega)} +$$
$$+ M^2\omega^4 \frac{\delta_R^*(x, x_м, \omega)\,\delta_R(x, x_м, \omega)\,\delta_w^*(x_м, x_1, \omega)\,\delta_w(x_м, x_1', \omega)}{[1 - M\omega^2\delta_w^*(x_м, x_м, \omega)][1 - M\omega^2\delta_w(x_м, x_м, \omega)]}.$$

Как следует из равенства (6), спектральная плотность реакции оболочки с сосредоточенной массой на пульсацию давления состоит из двух частей, одна из которых зависит от дополнительной сосредоточенной массы. Для замкнутых круговых оболочек это свойство является весьма важным по следующей причине.

В неподвижной системе координат уравнения движения замкнутых круговых оболочек без дополнительной массы допускают две системы решения, с четными и нечетными функциями окружной координаты. Поэтому такая оболочка потенциально обладает двумя спектрами частот. Однако, ввиду круговой симметрии, собственная частота инвариантна к четности функции окружной координаты, и оба спектра оказываются одинаковыми. Сосредоточенная масса вносит окружную асимметрию, и если начало координат совместить с местом ее расположения, то станет очевидным, что четной и нечетной функциям соответствуют два различных спектра. Причем один из них зависит от сосредоточенной массы, другой — не зависит. По густоте оба спектра в среднем равны, и, кроме того, густота каждого из них равна густоте спектра оболочки без сосредоточенной массы. При воздействии на оболочку с сосредоточенной массой широкополосной нагрузки спектр ее реакции будет содержать в два раза больше максимумов, и дисперсия реакции будет больше, чем у оболочки без дополнительной массы. Степень отличия дисперсий оболочек с дополнительной массой и без нее определяется величиной массы и частотным диапазоном возбуждающей нагрузки. Из равенства (6) следует также, что и для незамкнутых оболочек дополнительная масса приводит к дополнительному нагружению.

Структуру равенства (6) можно интерпретировать следующим образом. Первое слагаемое соответствует реакции оболочки без сосредоточенной массы, второе слагаемое обусловлено работой пульсаций на перемещениях, вызванных действием сосредоточенной силы инерции, и работой сосредоточенной силы инерции на перемещении, вызванном пульсациями, третье слагаемое обусловлено работой сосредоточенной силы инерции на вызванном ею перемещении.

Равенство (6) легко обобщается на случай подсоединения к оболочке сосредоточенного осциллятора. В этом случае

$$\Phi(x,\ x_{\text{м}},\ x_1,\ x_1',\ \omega,\ M) = \delta_R^*(x,\ x_1,\ \omega)\,\delta_R(x,\ x_1',\ \omega) +$$

$$+ 2\operatorname{Re}(M\omega^2 - c)\,\frac{\delta_R(x,\ x_{\text{м}},\ \omega)\,\delta_R^*(x,\ x_1,\ \omega)\,\delta_w(x,\ x_1',\ \omega)}{1 - (M\omega^2 - c)\,\delta_w(x_{\text{м}},\ x_{\text{м}},\ \omega)} +$$

$$+ (M\omega^2 - c^*)(M\omega^2 - c)\,\delta_R^*(x,\ x_{\text{м}},\ \omega)\,\delta_R(x,\ x_{\text{м}},\ \omega)\times$$

$$\times\frac{\delta_w^*(x_{\text{м}},\ x_1,\ \omega)\,\delta_w(x_{\text{м}},\ x_1',\ \omega)}{[1 - (M\omega^2 - c^*)\,\delta_w^*(x_{\text{м}},\ x_{\text{м}},\ \omega)]\,[1 - (M\omega^2 - c)\,\delta_w(x_{\text{м}},\ x_{\text{м}},\ \omega)]},$$

где c — комплексная жесткость осциллятора.

Полагая в (6) $M \longrightarrow \infty$, получим реакцию оболочки, неподвижно закрепленной в точке $x_{\text{м}}$.

При действии на оболочку дельта-коррелированных и стационарных в пространстве пульсаций, спектральная плотность которых

$$F_p(x_1,\ x_1',\ \omega) = F_p(\omega)\,\delta(x_1 - x_1'),$$

спектральная плотность реакции вычисляется по формуле

$$F_R(x,\ \omega) = F_p(\omega)\iint_s \Phi(x,\ x_{\text{м}},\ x_1,\ \omega,\ M)\,ds_1.$$

2. Рассмотрим подробнее замкнутую цилиндрическую оболочку при воздействии стационарных в пространстве пульсаций. Для этого используем полученную в работе [4] систему гармонических функций влияния.

Для радиального прогиба

$$\delta_w(\xi,\ \varphi,\ \xi_1,\ \varphi_1\ \omega) = A_w\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{4}\frac{\sin\lambda_m\xi\,\sin\lambda_m\xi_1}{(1 - e^{-2\pi\sigma_j})\,d_j}\,[E_{1j}(\varphi,\ \varphi_1)(c_{rj}^w +$$

$$+ ic_{ij}^w)\cos\sigma_j(\varphi - \varphi_1) + E_{2j}(\varphi,\ \varphi_1)(s_{rj}^w + is_{ij}^w)\sin\sigma_j(\varphi - \varphi_1)]; \qquad (7)$$

для функций напряжений

$$\delta_\psi(\xi, \varphi, \xi_1, \varphi_1, \omega) = A_\psi \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{4} \frac{\sin\lambda_m\xi \sin\lambda_m\xi_1}{(1 - e^{-2\pi\rho_j})\, d_j} \times$$

$$\times [E_{1j}(\varphi, \varphi_1)(c_{rj}^{\psi} + ic_{tj}^{\psi})\cos\sigma_j(\varphi - \varphi_1) +$$

$$+ E_{2j}(\varphi, \varphi_1)(s_{rj}^{\psi} + is_{tj}^{\psi})\sin\sigma_j(\varphi - \varphi_1)],$$

где $$E_{1j}(\varphi, \varphi_1) = e^{-\rho_j(2\pi+\varphi-\varphi_1)} + e^{-\rho_j(\varphi-\varphi_1)};$$

$$E_{2j}(\varphi, \varphi_1) = e^{-\rho_j(2\pi+\varphi-\varphi_1)} - e^{-\rho_j(\varphi_1-\varphi)};$$

$$A_w = \frac{2R^3}{Dl(1+\eta^2)}; \quad A_\psi = -4\sqrt{3(1-\mu^2)}\frac{R^3}{Eh}; \lambda_m = \frac{m\pi R}{l}, \quad (m = 1, 2, \ldots);$$

ξ, φ — относительные координаты поверхности цилиндрической оболочки, отсчитываемые соответственно от левого края оболочки по ее образующей и от места расположения сосредоточенной массы по окружности; $(\varphi < \varphi_1)$;

$D = \dfrac{Eh^3}{12(1-n^2)}$ — цилиндрическая жесткость;

l, R, h — соответственно длина, радиус и толщина стенки оболочки;

E, μ, η — соответственно модуль упругости, коэффициент Пуассона, коэффициент внутренних потерь материала оболочки;

$$d_j,\ \rho_j,\ \sigma_j,\ c_{rj}^{w},\ c_{tj}^{w},\ s_{rj}^{w},\ s_{tj}^{w},\ c_{rj}^{\psi},\ c_{tj}^{\psi},\ s_{rj}^{\psi},\ s_{tj}^{\psi} —$$

функции номера члена ряда m, частоты и параметров оболочки, значения которых определяются по рекуррентным зависимостям, приведенным в работе [4].

Функции влияния для внутренних усилий, T_1, T_2, S, M_1, M_2, M_{12} связаны с выражениями (7) и (8) известными зависимостями:

для мембранных усилий

$$\delta_{T_1} = \frac{\partial^2 \delta_\psi}{R^2\, \partial\varphi^2}, \quad \delta_{T_2} = \frac{\partial^2 \delta_\psi}{R^2\, \partial\xi^2}, \quad \delta_S = \frac{\partial^2 \delta_\psi}{R^2\, \partial\xi\, \partial\varphi};$$

для моментных усилий

$$\delta_{M_1} = \frac{D(1+i\eta)}{R^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \mu\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\delta_w,$$

$$\delta_{M_2} = \frac{D(1+i\eta)}{R^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \mu\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right)\delta_w,$$

$$\delta_{M_{12}} = \frac{D(1-\mu)(1+i\eta)}{R^2}\,\frac{\partial^2\delta_w}{\partial\xi\partial\varphi}.$$

Заметим, что функции влияния (7), (8) зависят от разности углов $\varphi - \varphi_1$. Поэтому, не нарушая общности, положим $\varphi = 0$. Тогда функция влияния реакции оболочки может быть записана в общем виде

$$\delta_R(\xi, \xi_1, \varphi_1, \omega) = A_R \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{4} \frac{\sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m \xi_1}{(1 - e^{-2\pi\rho_j})\, d_j} \times$$

$$\times \left[(c_{rj}^R + i c_{tj}^R) E_{1j}(\varphi_1) \cos \sigma_j \varphi_1 - (s_{rj}^R + i s_{tj}^R) E_{2j}(\varphi_1) \sin \sigma_j \varphi_1 \right]; \quad (9)$$

для мембранных усилий $A_R = \dfrac{2R}{Dl(1+\eta^2)}$;

$$c_{rj}^{T_1} = c_{rj}^{\psi}(\rho_j^2 - \sigma_j^2) - 2 s_{rj}^{\psi} \rho_j \sigma_j; \quad c_{tj}^{T_1} = c_{tj}^{\psi}(\rho_j^2 - \sigma_j^2) - 2 s_{tj}^{\psi} \rho_j \sigma_j;$$

$$s_{rj}^{T_1} = s_{rj}^{\psi}(\rho_j^2 - \sigma_j^2) + 2 c_{rj}^{\psi} \rho_j \sigma_j; \quad s_{tj}^{T_1} = s_{tj}^{\psi}(\rho_j^2 - \sigma_j^2) + 2 c_{tj}^{\psi} \rho_j \sigma_j;$$

$$c_{rj}^{T_2} = -\lambda_m^2 c_{rj}^{\psi}; \quad c_{tj}^{T_2} = -\lambda_m^2 c_{tj}^{\psi}; \quad s_{rj}^{T_2} = -\lambda_m^2 s_{rj}^{\psi}; \quad s_{tj}^{T_2} = -\lambda_m^2 s_{tj}^{\psi};$$

для моментных усилий $A_R = -4\sqrt{3(1-\mu^2)}\dfrac{R}{Eh}$;

$$c_{rj}^{M_1} = (c_{rj}^{w} - \eta c_{tj}^{w})\left[\mu(\rho_j^2 - \sigma_j^2) - \lambda_m^2\right] - 2(s_{rj}^{w} - \eta s_{tj}^{w}) \mu \rho_j \sigma_j;$$

$$c_{tj}^{M_1} = (\eta c_{rj}^{w} + c_{tj}^{w})\left[\mu(\rho_j^2 - \sigma_j^2) - \lambda_m^2\right] - 2(\eta s_{rj}^{w} + s_{tj}^{w}) \eta \rho_j \sigma_j;$$

$$s_{rj}^{M_1} = (s_{rj}^{w} - \eta s_{tj}^{w})\left[\mu(\rho_j^2 - \sigma_j^2) - \lambda_m^2\right] + 2(c_{ri}^{w} - \eta s_{tj}^{w}) \mu \rho_j \sigma_j,$$

$$s_{tj}^{M_1} = (\eta s_{rj}^{w} + s_{tj}^{w})\left[\mu(\rho_j^2 - \sigma_j^2) - \lambda_m^2\right] + 2(\eta c_{rj}^{w} + c_{tj}^{w}) \mu \rho_j \sigma_j;$$

$$c_{rj}^{M_2} = (c_{rj}^{w} - \eta c_{tj}^{w})(\rho_j^2 - \sigma_j^2 - \mu \lambda_m^2) - 2(s_{rj}^{w} - \eta s_{tj}^{w}) \rho_j \sigma_j;$$

$$c_{tj}^{M_2} = (\eta c_{rj}^{w} + c_{tj}^{w})(\rho_j^2 - \sigma_j^2 - \mu \lambda_m^2) - 2(\eta s_{rj}^{w} + s_{tj}^{w}) \rho_j \sigma_j;$$

$$s_{rj}^{M_2} = (s_{rj}^{w} - \eta s_{tj}^{w})(\rho_j^2 - \sigma_j^2 - \mu \lambda_m^2) + 2(c_{rj}^{w} - \eta c_{tj}^{w}) \rho_j \sigma_j;$$

$$s_{tj}^{M_2} = (\eta s_{rj}^{w} + s_{tj}^{w})(\rho_j^2 - \sigma_j^2 - \mu \lambda_m^2) + 2(\eta c_{rj}^{w} + c_{tj}^{w}) \rho_j \sigma_j.$$

Спектральную плотность пульсаций давления представим в виде

$$F_p(\xi_1, \xi_1', \varphi_1, \varphi_1', \omega) = F_p(\omega) K_p(\xi_1, \xi_1') K_p(\varphi_1, \varphi_1'),$$

где $$K_p(\xi_1, \xi_1') = e^{-\alpha_\xi (\xi_1 - \xi_1')} \cos \beta_\xi (\xi_1 - \xi_1'); \quad (10)$$

$$K_p(\varphi, \varphi_1') = e^{-\alpha_\varphi (\varphi_1 - \varphi_1')} \cos \beta_\varphi (\varphi_1 - \varphi_1');$$

α_ξ, α_φ, β_ξ, β_β — константы, характеризующие пространственную корреляцию пульсаций давления.

Подставляя выражения (9) и (10) в (6), получаем формулу для определения спектральной плотности реакции замкнутой цилиндрической оболочки

$$F_R(\xi,\ \xi_м,\ \varphi_м,\ \omega) = F_p(\omega)\sum_{m=1}^{\infty}\ \sum_{n=1}^{\infty} I_{mn}\,[A_R^2\, I_{mn}^{RR}(\xi,\ \xi_м,\ \varphi_м,\ \varphi) +$$

$$+ 2A_R\, A_w\, I_{mn}^{Rw}(\xi,\ \xi_м,\ \varphi_м,\ \omega) + A_w^2\, I_{mn}^{ww}(\xi,\ \xi_м,\ \varphi_м,\ \omega)],$$

где

$$I_{mn} = \int_0^{\xi_0}\int_0^{\xi_0} K_p(\xi_1,\ \xi_1')\sin\lambda_m\xi_1\sin\lambda_n\xi_1'\,d\xi_1\,d\xi_1';$$

$$\xi_0 = \frac{l}{R};\quad \lambda_n = \frac{n\pi R}{l};\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ldots);$$

$$I_{mn}^{RR} = N_{1mn}^{RR}\sin\lambda_m\xi\sin\lambda_n\xi;$$

$$I_{mn}^{Rw} = \frac{M\omega^2\sin\lambda_m\xi\sin\lambda_n\xi_м}{(1 - M\omega^2 w_1)^2 + (M\omega^2 w_2)^2}\,\{[R_1(\xi)(1 - M\omega^2 w_1) +$$

$$+ R_2(\xi)M\omega^2 w_2]\,N_{1mn}^{Rw} - [R_2(\xi)(1 - M\omega^2 w_1) - R_1(\xi)M\omega^2 w_2]\,N_{2mn}^{Rw}\};$$

$$I_{mn}^{ww} = N_{1mn}^{ww}\sin\lambda_m\xi_м\sin\lambda_n\xi_м\,(R_1^2(\xi) + R_2^2(\xi))\,M^2\omega^4;$$

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = A_w\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{4}\frac{1 + e^{-2\pi\rho_j}}{1 - e^{-2\pi\rho_j}}\,\frac{\sin^2\lambda_m\xi_м}{d_j}\begin{pmatrix} c_{rj}^{w} \\ c_{tj}^{w} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} R_1(\xi) \\ R_2(\xi) \end{pmatrix} = A_R\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{4}\frac{\sin\lambda_m\xi\sin\lambda_m\xi_м}{(1 - e^{-2\pi\rho_j})\,d_j}\left[\begin{pmatrix} c_{rj}^{R} \\ c_{tj}^{R} \end{pmatrix}E_{1j}(\varphi_м)\cos\sigma_j\varphi_м -\right.$$

$$\left. - \begin{pmatrix} s_{rj}^{R} \\ s_{tj}^{R} \end{pmatrix}E_{2j}(\varphi_м)\sin\sigma_j\varphi_м\right];$$

$$\begin{pmatrix} N_{1mn}^{Rw} \\ N_{2mn}^{Rw} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{4}\Omega_j\,\Omega_k\left\{i_{1jk}\left[c_{rj}^{R}\begin{pmatrix} c_{rk}^{w} \\ c_{tk}^{w} \end{pmatrix} + c_{tj}^{R}\begin{pmatrix} c_{tk}^{w} \\ -c_{rk}^{w} \end{pmatrix}\right] \pm\right.$$

$$\pm i_{2jk}\left[s_{rk}^{w}\begin{pmatrix} c_{rj}^{R} \\ c_{tj}^{R} \end{pmatrix} + s_{tk}^{w}\begin{pmatrix} c_{tj}^{R} \\ -c_{rj}^{R} \end{pmatrix}\right] \pm i_{3jk}\left[c_{rk}^{w}\begin{pmatrix} s_{rj}^{R} \\ s_{tj}^{R} \end{pmatrix} + c_{tk}^{w}\begin{pmatrix} s_{tj}^{R} \\ -s_{rj}^{R} \end{pmatrix}\right] +$$

$$\left. + i_{4jk}\left[s_{rj}^{R}\begin{pmatrix} s_{rk}^{w} \\ s_{tk}^{w} \end{pmatrix} + s_{tj}^{R}\begin{pmatrix} s_{tk}^{w} \\ s_{rk}^{w} \end{pmatrix}\right]\right\},$$

$$\Omega_j = \frac{1}{(1 - e^{-2\pi\rho_j})\,d_j};\quad \Omega_k = \frac{1}{(1 - e^{-2\pi\rho_j})\,d_k};$$

$$\begin{pmatrix} i_{1jk} \\ i_{2jk} \\ i_{3jk} \\ i_{4jk} \end{pmatrix} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} K_p(\varphi_1,\ \varphi_1')\begin{pmatrix} E_{1j}(\varphi_1)\,E_{1k}(\varphi_1')\cos\sigma_j\varphi_1\cos\sigma_k\varphi_1' \\ E_{1j}(\varphi_1)\,E_{2k}(\varphi_1')\cos\sigma_j\varphi_1\sin\sigma_k\varphi_1' \\ E_{2j}(\varphi_1)\,E_{1k}(\varphi_1')\sin\sigma_j\varphi_1\cos\sigma_k\varphi_1' \\ E_{2j}(\varphi_1)\,E_{2k}(\varphi_1')\sin\varphi_j\varphi_1\sin\sigma_k\varphi_1' \end{pmatrix}d\varphi_1\,d\varphi_1'.$$

Значения коэффициентов ρ, σ, c, s, d с нижним индексом κ определяются по формулам для вычисления соответствующих коэффициентов с индексом j, заменяя в них i на κ.

Значения N^{RR}_{1mn}, N^{ww}_{1mn} получаются из N^{Rw}_{1mn} заменой в верхних индексах соответственно w на R и R на w.

Интегралы типа I_{mn}, $i_{1j\kappa}$, $i_{2j\kappa}$, $i_{3j\kappa}$, $i_{4j\kappa}$ можно представить в виде суммы двух интегралов, например,

$$I_{mn} = \int\limits_0^{\xi_0} \sin \lambda_m \xi_1 \int\limits_0^{1} e^{-\alpha_\xi \left(\xi_1 - \xi_1' \right)} \cos \beta_\xi (\xi_1 - \xi_1') \sin \lambda_m \xi'' \, d\xi_1 \, d\xi_1' +$$

$$+ \int\limits_0^{\xi_1} \sin \lambda_m \xi_1 \int\limits_{\xi_1}^{\xi_0} e^{-\alpha_\xi \left(\xi_1' - \xi_1 \right)} \cos \beta_\xi (\xi_1 - \xi_1') \sin \lambda_m \xi_1' \, ds_1 \, ds_1',$$

каждый из которых выражается через табличные интегралы от произведения тригонометрических и показательных функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Статистические методы в строительной механике. М., ГСИ, 1961.

2. Даревский В. М., Шаринов И. Л. Свободные колебания цилиндрической оболочки с сосредоточенной массой. Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. М., «Наука», 1966.

3. Диментберг М. Ф. Вынужденные колебания пластин при нагрузке, представляющей собой пространственно-временной случайный процесс. Инженерный журнал, т. 1, вып. 2, 1961.

4. Кондрашов Н. С. О гармонических функциях влияния цилиндрической оболочки. «Прикладная механика», 1972, № 5.

5. Ли Те Вей. Колебания пологих сферических оболочек с сосредоточенной массой. «Прикладная механика». Труды американского общества инженеров-механиков. Серия Е (русский перевод), 1966, № 4.

6. Лиходед А. И., Малинин А. А. Колебания подкрепленных оболочек вращения с сосредоточенными массами и осцилляторами. МТТ, 1971, № 1.

7. Николаенко Н. А. Вероятностные методы динамического расчета машиностроительных конструкций. М, «Машиностроение», 1967.

8. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. Судпромгиз, 1961.

9. Скучик Е. Простые и сложные колебательные системы. М. «Мир», 1971.

10. Унгар. Статистический энергетический анализ колебательных систем. Конструирование и технология машиностроения. Труды американского общества инженеров-механиков. Серия В (русский перевод), 1967, № 4.

11. Федоров Ю. А. Колебания замкнутой круговой цилиндрической оболочки в поле случайных акустических давлений. Инженерный журнал, вып. 3, 1963.

12. Хомченко А. Н., Христенко А. К. К вопросу о колебаниях оболочки с сосредоточенной массой. «Прикладная механика», 1972, № 1.