А.П. Котенко

ВЫДЕЛЕНИЕ МЕДЛЕННЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ

При изучении ряда гироскопических приборов возникает необходимость исследования систем сингулярно возмущенных уравнений [см., напр., I], для которых не выполняются условия теорем А.Н.Тихонова [2,3]. В этом случае оказывается полезной теория интегральных многообразий [4,5]. Методы асимптотического представления устойчивых интегральных многообразий сингулярно возмущенных гироскопических систем и их применение к теории прецессионных уравнений были развиты в ряде работ В.В.Стрыгина и В.А.Соболева [6,7,8]. Однако в ряде задач необходимо исследовать конкретные решения на больших промежутках времени. В настоящей работе предложен метод нахождения медленной составляющей решения, лежащей на интегральном многообразии и отличающейся от исходного решения на слагаемое, затухающее по экспоненте.

I. Постановка задачи.

Пусть X, Y – конечномерные векторные пространства, $\dim X = m, \dim Y = n;\ m, n > 1$. Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x} = y, \tag{I}$$

$$\varepsilon \dot{y} = G(x)y - \varepsilon B(x)y + \varepsilon P(x,y), \tag{2}$$

$$x(0) = d,\ y(0) = \varepsilon\beta. \tag{3}$$

Здесь $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ – малый параметр; $x, d \in X;\ y, \beta \in Y$; собственные значения $g_i(x), i \in \overline{1,n}$, матрицы $G(x)$ равномерно относительно $x \in X$ отделены от нуля и друг от друга. Пусть $N > 1$ – фиксированное целое число. Через $\mathcal{P}_N$ обозначим множество целочисленных n-мерных векторов $p = (p_1, \ldots, p_n)$ с неотрицательными координатами, удовлетворяющих условию $2 \leqslant |p| = \sum p_j \leqslant N$. Через $g(x)$ обозначим вектор $(g_1(x), \ldots, g_n(x))$. Пусть множество $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_N$ состоит из векторов p, для которых $(p, g(x)) \equiv 0$, а $\mathcal{P}_c$ – из векторов p, для которых существует такое $d_p > 0$, что $|(p, g(x))| \geqslant d_p,\ x \in X$. Предположим, что $\mathcal{P}_N = \mathcal{P} \cup \mathcal{P}_c$.

Через $H(x)$ обозначим матрицу, приводящую $G(x)$ к диагональному виду, т.е. $\Lambda = H^{-1}GH = \mathrm{diag}\,[g_1(x), \ldots, g_n(x)]$.

Пусть матрицы $G(x), G^{-1}(x), H(x), H^{-1}(x), B(x)$ и вектор-функция $P(x,y)$ бесконечно дифференцируемы и равномерно ограничены вместе со всеми производными, при этом $P_y(x,0)=0$. Наконец, пусть диагональные элементы γ_{ss} матрицы $\Gamma = H^{-1}BH$ лежат справа от мнимой оси и равномерно относительно $x \in X$ отделены от нее на расстояние, не меньшее некоторого $\beta > 0$.

При этих предположениях система (I,2) имеет интегральное многообразие $y = \varepsilon h(x,\varepsilon) = \varepsilon h_1(x) + \varepsilon^2 h_2(x) + \ldots + \varepsilon^N h_N(x) + \varepsilon^{N+1} h_{N+1}(x,\varepsilon)$, движение по которому описывается системой $\dot{x} = \varepsilon h(x,\varepsilon)$ [8].

Покажем, что для решения (x,y) задачи Коши (I-3) найдется такое начальное условие $x_0 = d + O(\varepsilon^2)$ задачи Коши

$$\dot{\bar{x}} = \varepsilon h(\bar{x},\varepsilon), \tag{4}$$

$$\bar{x}(0) = x_0, \tag{5}$$

что при некоторых $C>0, \sigma>0$ имеет место неравенство

$$\|y(t) - \varepsilon h(\bar{x}(t),\varepsilon)\| + \|x(t) - \bar{x}(t)\| < Ce^{-\sigma t}, \; t \geqslant 0. \tag{6}$$

Ниже построено асимптотическое разложение x_0 в ряд по степеням ε. Таким образом, исследование задачи Коши (I-3) при $t \to \infty$ будет сведено к решению регулярно возмущенной задачи Коши (4,5) более низкой размерности.

П. Вспомогательное построение

Пусть $\bar{x}$ - решение задачи Коши (4,5) с произвольным начальным условием $x_0 = \alpha + O(\varepsilon^2)$. Через $U(x_0)(t,\tau)$ обозначим фундаментальную матрицу системы

$$\varepsilon \dot{y} = \Lambda(\bar{x}(t))y - \varepsilon \Gamma(\bar{x}(t))y, \tag{7}$$

удовлетворяющую условию $U(x_0)(\tau,\tau) = E$ - единичная $n \times n$ матрицы $0 \leqslant \tau \leqslant t < \infty$.

Легко получить оценку

$$\|U(x_0)(t,\tau)\| \leqslant Ce^{-\sigma(t-\tau)}, \; 0<\sigma<\beta, \; 0 \leqslant \tau \leqslant t < \infty. \tag{9}$$

Пусть $e_i(t,\varepsilon,x_0)$ - i-линейное ограниченное, непрерывное по x_0 и дифференцируемое по t отображение $Y x \ldots x Y \to X$. Его значение на векторах $y_1, \ldots, y_i \in Y$ обозначим через $e_i[y_1, \ldots, y_i]$, а при $y_1 = \ldots = y_i = y$ через $e_i[y]^i$.

В (I-2) сделаем замену $\xi = x - \bar{x}$, $H(\bar{x})\eta = y - \varepsilon h(\bar{x},\varepsilon)$. Получим систему

$$\dot{\xi} = H\eta, \tag{10}$$

$$\varepsilon\dot{\eta} = H^{-1}[G(\bar{x}+\xi) - \varepsilon B(\bar{x}+\xi)][H\eta + \varepsilon h] + \varepsilon H^{-1} P(\bar{x}+\xi, H\eta + \varepsilon h) -$$
$$- H^{-1}[G(\bar{x}) - \varepsilon B(\bar{x})]\varepsilon h - H^{-1}P(\bar{x}, \varepsilon h) - \varepsilon^2 H^{-1} H_x h \eta. \tag{11}$$

Подставим выражение

$$\xi = \varepsilon\{\ell_1 \eta + \ell_2 [\eta]^2 + \ldots + \ell_N [\eta]^N\} \tag{12}$$

в (10,11) и приравняем в (10) коэффициенты при одинаковых степенях ε. Получим следующие уравнения для определения ℓ_i:

$$\varepsilon \dot{\ell}_1 + \ell_1 [\Lambda(\bar{x}) - \varepsilon \Gamma(x)] + \varepsilon^2 Q_1(\ell_1) = H, \tag{13}$$

где $Q_1(\ell_1) = \ell_1 H^{-1}[G_x - \varepsilon B_x] h H \ell + \ell_1 H^{-1} P_x(\bar{x}, 0)\ell_1 -$
$- \ell_1 H^{-1} H_x h \ell_1;$

$$\varepsilon \dot{\ell}_2 [\eta]^2 + \ell_2[\Lambda(\bar{x})\eta - \varepsilon\Gamma(\bar{x})\eta, \eta] + \ell_2[\eta, \Lambda(\bar{x})\eta - \varepsilon\Gamma(\bar{x})\eta] +$$
$$+ \varepsilon^2 Q_2(\ell_1)\ell_2[\eta]^2 = \varepsilon\Phi_2(\ell_1)[\eta]^2; \tag{14}$$

аналогичные уравнения получаются при $i \in \overline{3, N-1}$;

$$\varepsilon \dot{\ell}_N [\eta]^N + \ell_N [\Lambda(\bar{x})\eta - \varepsilon\Gamma(\bar{x})\eta, \eta, \ldots, \eta] + \ldots + \ell_N[\eta, \ldots, \eta, \Lambda(\bar{x})\eta -$$
$$- \varepsilon\Gamma(\bar{x})\eta] + \varepsilon^2 Q_N(\ell_1, \ldots, \ell_{N-1})\ell_N[\eta]^N = \varepsilon\Phi_N(\ell_1, \ldots, \ell_{N-1})[\eta]^N +$$
$$+ \varepsilon\Psi(\ell_1, \ldots, \ell_N, \eta)[\eta]^N, \tag{15}$$

где N – линейные отображения Φ_N, $\Psi(\ell_N, \eta)$ известны, если найдены $\ell_1, \ldots, \ell_{N-1}$.

Будем искать ограниченное при $t \geqslant 0$ решение уравнения (13) в виде

$$\ell_1 = \ell_1^0 + \varepsilon \ell_1^1 + \ldots + \varepsilon^N \ell_1^N + \varepsilon^{N+1} \ell_1^{N+1}. \tag{16}$$

Подставим (16) в (13) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. Получим

$$\ell_1^0 \Lambda(\bar{x}) = H(\bar{x}); \quad \ell_1^1 \Lambda(\bar{x}) = \ell_1^0 \Gamma(\bar{x}) = 0;$$

аналогично при ε^i, $i \in \overline{2, N}$;

$$\varepsilon \dot{\ell}_1^{N+1} + \ell_1^{N+1}[\Lambda(\bar{x}) - \varepsilon\Gamma(\bar{x})] + \varepsilon^2 M_1(\ell_1^{N+1}, \bar{x}, \varepsilon) +$$
$$+ \varepsilon^{N+3} M_2(\ell_1^{N+1}, \bar{x}, \varepsilon) = S_1(\bar{x}, \varepsilon), \tag{17}$$

где при некотором $C>0$

$$\|M_1\|\leqslant C\|\ell_1^{N+1}\|,\ \|M_2\|\leqslant C\|\ell_1^{N+1}\|^2,\ \|S_1\|\leqslant C,$$

$$\|M_2(\ell_1^{N+1})-M_2(\ell)\|\leqslant C\max\{\|\ell_1^{N+1}\|,\|\ell\|\}\|\ell_1^{N+1}-\ell\|.$$

Теперь легко найти $\ell_1^0=H\Lambda^{-1}$. Аналогично вычисляются все ℓ_1^j, $j\in\overline{1,N}$. Ограниченное при $t\geqslant 0$ решение уравнения (I7) легко найти из интегрального уравнения

$$z=-\int_t^{+\infty}\{\varepsilon^{-1}S_1(\bar{x},\varepsilon)+\varepsilon M_1(z,\bar{x},\varepsilon)+\varepsilon^{N+2}M_2(z,\bar{x},\varepsilon)\}(s)U(x_0)(s,t)\,ds.$$

При этом можно показать, что $\varepsilon^{N+1}\ell_1^{N+1}=O(\varepsilon^N)$.

Перейдем к уравнению (I4). В силу вырожденности главной части, его нельзя решить аналогично (I3). Через K обозначим множество таких билинейных отображений ℓ, что

$$\ell[\Lambda y_1,y_2]+\ell[y_1,\Lambda y_2]=0$$

при всех $y_1,y_2\in Y$, а через $K^\perp$ обозначим его прямое дополнение.

Будем теперь искать ограниченное при $t\geqslant 0$ решение уравнения (I4) в виде

$$\ell_2=\ell_2^0+\varepsilon\{\ell_2^1+\ell_2^{1\perp}\}+\ldots+\varepsilon^N\{\ell_2^N+\ell_2^{N\perp}\}+\varepsilon^{N+1}\ell_2^{N+1}, \tag{I8}$$

где $\ell_2^j\in K$ при $j\in\overline{0,N}$ и $\ell_2^{j\perp}\in K^\perp$ при $j\in\overline{1,N}$.

Подставим (I8) в (I4) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. Получим

$$\ell_2^0[\Lambda\eta,\eta]+\ell_2^0[\eta,\Lambda\eta]=0; \tag{I9}$$

$$\ell_2^1[\Lambda\eta,\eta]+\ell_2^1[\eta,\Lambda\eta]+\ell_2^{1\perp}[\Lambda\eta,\eta]+\ell_2^{1\perp}[\eta,\Lambda\eta]-$$

$$-\ell_2^0[\Gamma\eta,\eta]-\ell_2^0[\eta,\Gamma\eta]=\Phi_2(\ell_1)[\eta]^2; \tag{20}$$

аналогично при ε^i, $i\in\overline{2,N}$;

$$\varepsilon\dot{\ell}_2^{N+1}[\eta]^2+\ell_2^{N+1}[\Lambda\eta-\varepsilon\Gamma\eta,\eta]+\ell_2^{N+1}[\eta,\Lambda\eta-\varepsilon\Gamma\eta]+$$

$$+\varepsilon^2Q_2(\ell_2^{N+1},\bar{x},\varepsilon)=S_2(\bar{x},c), \tag{2I}$$

где при некотором $C>0$

$$\|Q_2\|\leqslant C\|\ell_2^{N+1}\|,\ \|S_2\|\leqslant C.$$

Пусть e_i – n -мерный вектор с единицей на i -ом месте и нулями на остальных. Тогда из (I8) получим

$$e_2^0[\Lambda e_i, e_j] + e_2^0[e_i, \Lambda e_j] = (g_i + g_j) e_2^0 [e_i, e_j] = 0.$$

Отсюда $e_2^0[e_i, e_j] = 0$ при $g_i + g_j \neq 0$. Пусть теперь $g_i + g_j = 0$. Из (I9) получим в силу выбора e_2^1, e_2^{11}

$$-e_2^0[\Gamma \eta e_i, e_j] - e_2^0[e_i, \Gamma e_j] = \Phi_2(e_1)[e_i, e_j].$$

Отсюда легко найти

$$e_2^0[e_i, e_j] = -(\gamma_{ii} + \gamma_{jj})^{-1} \Phi_2(e_1)[e_i, e_j].$$

Таким образом, e_2^0 найдено. Аналогично будут найдены все $e_2^j, j \in \overline{1, N}$. Рассмотрим теперь (I9) при $g_i + g_j \neq 0$. В силу выбора e_2^j получим

$$e_2^{11}[\Lambda e_i, e_j] + e_2^{11}[e_i, \Lambda e_j] = e_2^0[\Gamma e_i, e_j] + e_2^0[e_i, \Gamma e_j] + \Phi_2(e_1)[e_i, e_j].$$

Отсюда легко найти

$$e_{23}^{11}[e_i, e_j] = (g_i + g_j)^{-1} \{ e_2^0[\Gamma e_i, e_j] + e_2^0[e_i, \Gamma e_j] + \Phi_2(e_1)[e_i, e_j] \}.$$

Кроме того, очевидно $e_2^{11}[e_i, e_j] = 0$ при $g_i + g_j = 0$.
Таким образом, e_2^{11} найдено. Аналогично будут найдены все $e_2^{j1}, j \in \overline{2, N}$.

Ограниченное при $t \geqslant 0$ решение уравнения (2I) легко найти из интегрального уравнения

$$z[y_1, y_2] = -\int_t^{+\infty} \{ \varepsilon^{-1} S_2(\bar{x}, \varepsilon) + \varepsilon^2 Q_2(z, \bar{x}, \varepsilon) \}(s) [U(x_0)(s,t) y_1, U(x_0)(s,t) y_2] ds$$

При этом можно показать, что $\varepsilon^{N+1} e_2^{N+1} = O(\varepsilon^N)$.

Аналогично находятся все $e_i, i \in \overline{3, N-1}$. Из теоремы Ляпунова-Перрона [5], условия которой для системы (II, I6) проверяются с помощью неравенства (8), следует оценка

$$\|\eta(t)\| \leqslant C e^{-\sigma t}, \quad t \geqslant 0,$$

и существование ограниченного решения уравнения (I6). Тогда из (I2) и ограниченности e_i получим оценку (6).

Ш. Нахождение начального условия медленной составляющей

Положим в (12) $t=0$. Получим следующее уравнение для нахождения x_0:

$$d-x_0=\varepsilon\{\varepsilon\ell_1(0,\varepsilon,x_0)[\beta-h(x_0,\varepsilon)]+\ldots+\varepsilon^N\ell_N(0,\varepsilon,x_0)[\beta-h(x_0,\varepsilon)]^N\}. \quad (22)$$

Будем искать его решение в виде

$$x_0=d+\varepsilon^2x_2+\ldots+\varepsilon^{N+1}x_{N+1}. \quad (23)$$

Подставляя (23) в (22) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, найдем

$$x_2=-\ell_1^0(\alpha)[\beta-h_1(\alpha)]=H(\alpha)\Lambda^{-1}(\alpha)[\beta-h_1(\alpha)];$$

аналогично находятся все $x_i, i\in\overline{3,N}$. С помощью принципа Шаудера нетрудно установить оценку $\varepsilon^{N+1}x_{N+1}=O(\varepsilon^N)$. Таким образом, начальное условие для задачи Коши (4,5) регулярно зависит от ε и может быть найдено с точностью до $O(\varepsilon^N)$.

Выражаю глубокую благодарность В.В.Стрыгину и В.А.Соболеву за обсуждение результатов и помощь в работе.

Литература

I. Меркин Д.Р. Гироскопические системы. М.: Наука, 1974, 344с.

2. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных.- Матем.сб., 1952, 31, № 3, с.373-390.

3. Тихонов А.Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра. - Матем.сб., 1948, 22, с.193-204.

4. Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука, 1973, 512с.

5. Плисс В.А. Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1977, 304 с.

6. Стрыгин В.В. Интегральные многообразия в задаче о сингулярном и параметрическом возмущении автоколебательной системы.- В сб.: Дифференц.уравн.и их применение, № 2, Куйбышев: Политехнич.ин-т, 1975.

7. Стрыгин В.В., Соболев В.А. Метод интегральных многообразий в задаче о стабилизации тел с помощью пассивных демпферов.- В сб.: Дифференц.уравнения.Куйбышев,гос.ун-т,1976,с.127-164.

8. Соболев В.А. К теории интегральных многообразий систем

сингулярно возмущенных уравнений.- В сб.: Приближенные методы исследования дифференциальных уравнений и их приложения. Куйбышев: КГУ, 1980, с.124-147.

В.И. Кузнецова

О ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ С МАЛЫМ ОТКЛОНЕНИЕМ АРГУМЕНТА

В статье предлагается приближенный метод исследования устойчивости функционально-дифференциального уравнения нейтрального типа с неограниченным запаздыванием, зависящим от малого параметра ε . Предполагается,что при $\varepsilon=0$ запаздывание в уравнении становится нулевым, т.е. уравнение превращается в обыкновенное. Выписываются условия, при наличии которых можно из устойчивости уравнения при $\varepsilon=0$ сделать вывод о наличии устойчивости и при $\varepsilon>0$. Близкие вопросы изучались в работах Ван Ляня [1], Эльсгольца Л.Э. [2], Рябова Ю.А. [3], Ахмерова Р.Р. [4] и др. Отличие настоящей работы от предыдущих заключается в том, что,во-первых, ранее рассматривались лишь уравнения с ограниченным запаздыванием, во-вторых, в работах, посвященных уравнениям с малым запаздыванием, обычно предполагается, что оператор A , действующий на производную, является тождественным (уравнение запаздывающего типа) или представим в виде $I+D$, где $\|D\|<1$, в настоящей работе это требование заменяется условием обратимости оператора A . Эффективные признаки обратимости оператора A описываются в п.2.

1. Устойчивость функционально-дифференциальных уравнений с малым отклонением аргумента

Примем следующие обозначения: R - поле действительных чисел; C^n - n -мерное комплексное арифметическое пространство с нормой $|\cdot|$; C - пространство ограниченных непрерывных функций $x:$ $R\to C^n$ с нормой $\|x\|=\sup_{t\in R}|x(t)|$; C^1- пространство функций $x: R\to C^n$, которые принадлежат C вместе с первой производной, с нормой $\|x\|=\|x\|_C+\|x'\|_C$.

Говорят, что линейный ограниченный оператор $A: C\to C$