Э.М. Фридман

УСТОЙЧИВЫЕ, ЦЕНТРАЛЬНО-УСТОЙЧИВЫЕ, ЦЕНТРАЛЬНЫЕ, ЦЕНТРАЛЬНО-НЕУСТОЙЧИВЫЕ, НЕУСТОЧИВЫЕ МНОГООБРАЗИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Для уравнений нейтрального типа вопросы существования и устойчивости центральных многообразий рассматривались в работах [I-3]. В случае дифференциально-разностных уравнений, регулярно зависящих от параметра, изучалась дифференцируемость центральных многообразий по фазовым переменным и параметру [2]. В настоящей работе исследуются интегральные многообразия одного класса сингулярно возмущенных систем функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа. В отличие от [3], где рассматривались уравнения с малым запаздыванием, здесь запаздывания не зависят от малого параметра. Для этого класса уравнений удается обобщить теорему А.Келли [4] о существовании пяти интегральных многообразий, изучить гладкость конечномерных многообразий по фазовым переменным и времени, доказать принцип сведения, исследовать асимптотику конечномерных многообразий по малому параметру. При этом существенно используются результаты Дж.Хейла [I,5-7]. Асимптотическое представление центральных многообразий сигнулярно возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений по степеням малого параметра было найдено в работах В.В.Стрыгина [8], В.А. Соболева [9]. Аналогичный результат для сигнулярно возмущенных систем запаздывающего типа получен в работе В.В.Стрыгина и автора [I0].

I. Пусть $R=(-\infty,\infty)$, R^j – j-мерное евклидово пространство с нормой $|\cdot|$ $(j=1,2\ldots)$. Через C^j обозначим пространство непрерывных функций $x:[-r,0]\to R^j$ с нормой $|x|=\sup\limits_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}|x(\theta)|$.

Рассмотрим следующую систему функционально-дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}\left[x(t)-Bx_t-P_1(\varepsilon)y_t-P_2(\varepsilon)z_t-G_1(t,x_t,y_t,z_t,\varepsilon,\varepsilon)\right]=Ax_t+$$
$$+Q_1(\varepsilon)y_t+Q_2(\varepsilon)z_t+F(t,x_t,y_t,z_t,\varepsilon,\varepsilon),$$
$$\varepsilon\frac{d}{dt}\left[y(t)-\sigma_1P_3(\varepsilon)z_t-G_2(t,x_t,y_t,z_t,\varepsilon,\varepsilon)\right]=Cy(t)+\sigma_1Q_3(\varepsilon)z_t+$$
$$+H(t,x_t,y_t,z_t,\varepsilon,\varepsilon), \qquad \text{(I)}$$

$$\varepsilon \frac{d}{dt}\left[z(t)-\varepsilon\sigma_2 P_4(b)y_t-\varepsilon G_3(t,x_t,y_t,z_t,\varepsilon,b)\right]=D(\varepsilon)z(t)+$$

$$+\varepsilon\sigma_2 Q_4(b)y_t+\varepsilon E(t,x_t,y_t,z_t,\varepsilon,b).$$

Здесь $x(t),G_1,\ F\in R^n;\ y(t),G_2,\ H\in R^m;\ z(t),G_3,\ E\in R^\ell;\ \varepsilon$ – малый положительный параметр, $b\in\mathcal{B}\subset R^k$ – векторный параметр, $x_t=x(t+\theta)$, $y_t=y(t+\theta),z_t=z(t+\theta)\ (-r\leqslant\theta\leqslant 0)$; $C-m\times m$ – матрица, $D(\varepsilon)=$ $=D_0+\varepsilon D_1-\ell\times\ell$ – матрица, $\sigma_1\sigma_2=0$; A,B – линейные ограниченные операторы, определенные на C^n со значениями в R^n; $P_1(b)$, $Q_1(b),P_4(b)$, $Q_4(b)$ – линейные ограниченные операторы, определенные на C^m со значениями в R^n,R^n,R^ℓ,R^ℓ соответственно; $P_2(b),Q_2(b),P_3(b),Q_3(b)$ – линейные ограниченные операторы, определенные на C^ℓ со значениями в R^n,R^n,R^m,R^m соответственно.

Предположим, что выполнены следующие условия.

1.1. Функции $G_i\ (i=\overline{1,3}),\ F,\ H,\ E$:

а) определены и непрерывны в области $\Omega=R\times C^n\times C^m\times C^\ell\times[0,\varepsilon_0]\times\mathcal{B}$;

б) обращаются в нуль при $(x,y,z)=0\ (x\in C^n,\ y\in C^m,\ z\in C^\ell)$;

в) удовлетворяют неравенствам

$$|G_i(t,x,0,0,\varepsilon,b)|\leqslant\beta,\quad |F(t,x,0,0,\varepsilon,b)|\leqslant\beta,$$

$$|H(t,x,0,0,\varepsilon,b)|\leqslant\beta,\quad |H(t,x,0,0,\varepsilon,b)|\leqslant\beta;$$

г) удовлетворяют условию Липшица с константой γ по переменным x,y,z.

2.2. Функции $G_i\ (i=\overline{1,3})$:

а) при всех t, ε, b зависят от $x(\theta),y(\theta),z(\theta)$ лишь при $\theta\leqslant-\sigma\ (\sigma>0)$;

б) имеют непрерывные по совокупности переменных частные производные по x, y, z;

в) при фиксированных ε, b равномерно непрерывны вместе со своими частными производными по x,y,z на любом замкнутом ограниченном подмножестве множества $R\times C^n\times C^m\times C^\ell$.

1.3. Пусть

$$Bx=\int_{-r}^{0}d\mu_0(\theta)x(\theta),\qquad P_i(b)y=\int_{-r}^{0}d\mu_i(\theta,b)y(\theta),\quad (i=1,4),$$

$$P_i(b)z=\int_{-r_1}^{0}d\mu_i(\theta,b)z(\theta),\ (i=2,3),$$

где $\mu_j\,(j=0,4)$ – матрицы соответствующих размерностей, элементами которых являются функции ограниченной вариации по θ; $x\in C^n$, $y\in C^m$, $z\in C^e$. Предположим, что при всех $x\in C^n$, $y\in C^m$, $z\in C^e$ выполнены неравенства

$$\left|\int_{-s}^{0} d\mu_0(\theta)x(\theta)\right|\leqslant\gamma(s)|x|,\qquad \left|\int_{-s}^{0} d\mu_i(\theta,\beta)y(\theta)\right|\leqslant\gamma(s)|y|\quad(i=1,4),$$

$$\left|\int_{-s}^{0} d\mu_i(\theta,\beta)z(\theta)\right|\leqslant\gamma(s)|z|\quad(i=2,3),$$

здесь $\gamma(s)$ – непрерывная скалярная функция, $\gamma(0)=0$.

I.4. Операторы $P_i, Q_i\ (i=\overline{1,4})$ сильно непрерывны по β и равномерно ограничены по норме константой L.

I.5. Собственные значения матрицы C имеют отрицательные действительные части.

I.6. Собственные значения λ_i матрицы $D(\varepsilon)$ удовлетворяют неравенствам

$$Re\lambda_i<-\varepsilon\alpha_1\quad(\alpha_1>0,\ i=\overline{1,\ell}),$$

причем $|e^{D(\varepsilon)t}|\leqslant K_0e^{-\varepsilon\alpha_0 t}$ при некоторых $K_0>0, \alpha_0>0$ и всех $t\geqslant 0$.

I.7. Пусть $\tilde{T}(t)$ – сильно непрерывная полугруппа операторов сдвига по траекториям системы

$$\frac{d}{dt}\left[x(t)-\int_{-r}^{0} d\mu_0(\theta)x(t+\theta)\right]=0.$$

Обозначим через

$a_0=\inf\Big\{$ вещественных a, для которых существует постоянная $K(a)$ удовлетворяющая неравенству

$$|\tilde{T}(t)\varphi|\leqslant K(a)e^{at}|\varphi|,\ \ t\geqslant 0,\ \varphi\in C^n,\ \varphi(0)-\int_{-r}^{0} d\mu_0(\theta)\varphi(\theta)=0\Big\}.$$

Предположим, что $a_0<0$.

При фиксированных $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $\beta\in\mathcal{B}$ тройка функций $\{x(t),y(t),z(t)\}$ называется решением системы (I) с начальными данными

$$(t_0, x_0, y_0, z_0)\in R\times C^n\times C^m\times C^e, \tag{2}$$

если существует такое $T>0$, что функции $x(t), y(t), z(t)$ непрерывны на отрезке $[t_0-r, t_0+T]$, функции

$$x(t)-Bx_t-P_1 y_t-P_2 z_t-G_1(t,x_t,y_t,z_t,\varepsilon,b),$$

$$y(t)-\delta_1 P_3 z_t-G_2(t,x_t,y_t,z_t,\varepsilon,b),$$

$$z(t)-\varepsilon\delta_2 P_4 y_t-\varepsilon G_3(t,x_t,y_t,z_t,\varepsilon,b)$$

непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют (I) при $t\in[t_0,t_0+T]$ [6,7].

Из сделанных предположений следует [6,7], что при всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $b\in\mathcal{B}$ задача Коши (I)-(2) имеет единственное решение, определенное при всех $t\in[t_0,\infty)$.

В дальнейшем удобно будет перейти от системы (I) к эквивалентной интегро-дифференциальной системе. Для этого введем в рассмотрение линейную систему

$$\frac{d}{dt}[x(t)-Bx_t]=Ax_t \tag{3}$$

и ее характеристический квазиполином

$$h(\lambda)=\det\Big[\lambda I-\lambda\int_{-r}^{0}d\mu_0(\theta)e^{\lambda\theta}-\int_{-r}^{0}d\eta(\theta)e^{\lambda\theta}\Big].$$

Здесь $\eta(\theta)$ – $n\times n$ -матрица, элементами которой являются функции ограниченной вариации, такая, что $A\varphi=\int_{-r}^{0}d\eta(\theta)\varphi(\theta)$ $(\varphi\in C^n)$.

Обозначим через $\Lambda_1=\{\lambda: h(\lambda)=0,\ \operatorname{Re}\lambda>0\}$, $\Lambda_2=\{\lambda: h(\lambda)=0, \operatorname{Re}\lambda=0\}$. Из условия I.7 следует, что множества Λ_1, Λ_2 конечны и пространство C^n разлагается в прямую сумму

$$C^n=\mathcal{P}_1\oplus\mathcal{P}_2\oplus Q,$$

где $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, Q инвариантные относительно полугруппы $T(t): C^n\to C^n$ $(t\geq 0)$ сдвигов по траекториям системы (3) подпространства [5,7]. Пространства $\mathcal{P}_i$ $(i=1,2)$ конечномерны, имеют размерность p_i и соответствуют начальным значениям решений уравнения (I), имеющих вид $\tilde{q}(t)e^{\lambda t}$, где $\lambda\in\Lambda_i$, $q(t)$ –полином. Обозначим через $p=p_1+p_2$.

Пусть $\Phi_i(\theta)$ – $n\times p_i$ –матрица, столбцы которой образуют базис в $\mathcal{P}_i$, а $\Psi_i(\theta)$ – $p_i\times n$ – матрица, строки которой образуют базис в пространстве $\mathcal{P}_i^*\subset C^n[0,r]$ * начальных значений решений

---

* $C^n_{[0,r]}$ пространство непрерывных на $[0,r]$ функций со значениями в R^n.

сопряженной системы

$$\frac{d}{d\tau}\left[v(\tau)-\int_{-r}^{0}v(\tau-\theta)d\mu_0(\theta)\right]=-\int_{-r}^{0}v(\tau-\theta)d\eta(\theta),$$

имеющих вид $q(t)e^{-\lambda t}$, $q(t)$ - полином, $\lambda\in\Lambda_i$.

Для элементов $\varphi\in C^n$, $\psi\in C^n[0,r]$, $\dot\psi\in C^n[0,r]$ определено скалярное произведение

$$(\psi,\varphi)=\psi(0)\left[\varphi(0)-\int_{-r}^{0}d\mu_0(\theta)\varphi(\theta)\right]+\int_{-r}^{0}\int_{0}^{\theta}\dot\psi(\xi-\theta)d\mu_0(\theta)\varphi(\xi)d\xi-$$
$$-\int_{-r}^{0}\int_{0}^{\theta}\psi(\xi-\theta)d\eta(\theta)\varphi(\xi)d\xi. \qquad (4)$$

Как показано в [5], $p_i\times p_i$ - матрица (Ψ_i,Φ_i) невырожденная и можно считать, что $(\Psi_i,\Phi_i)=I$. Через $\mathcal{U}_i$ обозначим такую $p_i\times p_i$ -матрицу, что $\frac{d}{d\theta}\Phi_i(\theta)=\Phi_i(\theta)\,\mathcal{U}_i$ $(i=1,2,\theta\in[-r,0])$.
Пусть $\Phi=(\Phi_1,\Phi_2)$, $\Psi=col(\Psi_1,\Psi_2)$, $\mathcal{U}=diag(\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2)$.

Введем в рассмотрение два семейства операторов $S(t,\varepsilon):C^m\to C^m$, $R(t,\varepsilon):C^e\to C^e(t\geq 0,\varepsilon\in(0,\varepsilon_0])$

$$S(t,\varepsilon)\varphi(\theta)=\begin{cases}e^{\frac{C}{\varepsilon}(t+\theta)}y(0), & t+\theta>0,\\ y(t+\theta), & t+\theta\leq 0;\end{cases}$$

$$R(t,\varepsilon)\varphi(\theta)=\begin{cases}e^{\frac{D(\varepsilon)}{\varepsilon}(t+\theta)}z(0), & t+\theta>0,\\ z(t+\theta), & t+\theta\leq 0,\end{cases}$$

здесь $y\in C^m$, $z\in C^e$. При каждом $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ семейство операторов $S(t,\varepsilon)(R(t,\varepsilon))$ образует сильно непрерывную полугруппу операторов [5]

Пусть $X_0-n\times n$, $Y_0-m\times m$, $Z_0-\ell\times\ell$ - матричные функции, причем

$$X_0(\theta)=\begin{cases}I, & \theta=0,\\ 0, & -r\leq\theta<0;\end{cases}\quad Y_0(\theta)=\begin{cases}I, & \theta=0,\\ 0, & -r\leq\theta<0;\end{cases}\quad Z_0(\theta)=\begin{cases}I, & \theta=0,\\ 0, & -r\leq\theta<0.\end{cases}$$

Обозначим через $X(t)$ $n\times n$ - матричную функцию, определенную при $t\in[0,\infty)$, имеющую ограниченную вариацию по t, непрерывную справа и такую, что

$$X(t)-BX_t=\int_0^t AX_s\,ds+I,\quad X(\theta)=X_0(\theta)\quad (t\geq 0,\ -r\leq\theta\leq 0).$$

$$T(t)X_0(\theta)=X(t+\theta),\quad S(t,\varepsilon)Y_0(\theta)=\begin{cases} e^{\frac{C}{\varepsilon}(t+\theta)}, & t+\theta\geq 0,\\ 0, & t+\theta<0,\end{cases}$$

$$R(t,\varepsilon)Z_0(\theta)=\begin{cases} e^{\frac{D(\varepsilon)}{\varepsilon}(t+\theta)}, & t+\theta\geq 0,\\ 0, & t+\theta<0.\end{cases}$$

Обозначим через PC^n множество функций $\varphi:[-r,0]\to R^n$, равномерно непрерывных на $[-r,0)$, положим $|\varphi|=\sup|\varphi(\theta)|$. Пространство PC^n банахово. Пусть $R\times PC_{y_1}\times C^m\times C^\ell\times(0,\varepsilon_0]\times\mathcal{B}$ замкнутое подмножество пространства $R\times PC^n\times C^m\times C^\ell\times(0,\varepsilon_0]\times\mathcal{B}$, определенное следующим образом:

$$R\times PC_{y_1}\times C^m\times C^\ell\times(0,\varepsilon_0]\times\mathcal{B}=\{(t,\varphi,y,z,\varepsilon,b)\in R\times PC^n\times C^m\times C^\ell\times(0,\varepsilon_0]\times\mathcal{B}:\ \varphi(0)=\varphi(0^-)-P_1y-P_2z-G_1(t,\varphi,y,z,\varepsilon,b)\}.$$

Поскольку G_1 не зависит от $X(0)$, отображения

$$h:R\times C^n\times C^m\times C^\ell\times(0,\varepsilon_0]\times\mathcal{B}\to R\times PC_{y_1}\times C^m\times C^\ell\times(0,\varepsilon_0]\times\mathcal{B},$$

$$h(t,x,y,z,\varepsilon,b)=(t,x-X_0[P_1(b)y+P_2(b)z+G_1(t,x,y,z,\varepsilon,b)],y,z,\varepsilon,b)$$

и

$$g:R\times PC_{y_1}\times C^m\times C^\ell\times(0,\varepsilon_0]\times\mathcal{B}\to R\times C^n\times C^m\times C^\ell\times(0,\varepsilon_0]\times\mathcal{B},$$

$$g(t,\varphi,y,z,\varepsilon,b)=(t,\varphi+X_0[P_1(b)y+P_2(b)z+$$
$$+G_1(t,\varphi,y,z,\varepsilon,b)],y,z,\varepsilon,b)$$

– гомеоморфизмы и $h\cdot g$, $g\cdot h$ – тождественные операторы.

Для $\varphi\in PC^n$ можно определить p -вектор (ψ,φ) по формуле (4). Пусть $Q=\{\varphi\in PC^n:(\psi,\varphi)=0\}$. Обозначим через $X_0^p=\Phi\Psi(0)$, $T(t)X_0^Q=T(t)X_0-T(t)X_0^p$.

Проводя рассуждения, аналогичные [I], можно показать, что задача Коши (I),(2) эквивалентна следующей системе:

$$\dot u = \mathcal{U}u + \mathcal{F}(t,u,\omega_t,y_t,z_t,\varepsilon,b),$$

$$\omega_t = T(t-t_0)\omega_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-s)X_0^Q \mathcal{F}_3(s,u(s),\omega_s,y_s,z_s,\varepsilon,b)ds -$$

$$-\int_{t_0}^{t} d_s\left[T(t-s)X_0^Q\right]\mathcal{Y}_1(s,u(s),\omega_s,y_s,z_s,\varepsilon,b),$$

$$y_t - Y_0\mathcal{Y}_2(t,u,\omega_t,y_t,z_t,\varepsilon,b) = S(t-t_0,\varepsilon)[y_0 - Y_0\mathcal{Y}_2(t_0,u_0,\omega_0,$$

$$y_0,z_0,\varepsilon,b)] + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} S(t-s,\varepsilon)Y_0\mathcal{H}(s,u(s),\omega_s,y_s,z_s,\varepsilon,b)ds - \qquad (5)$$

$$-\int_{t_0}^{t} d_s\left[S(t-s,\varepsilon)Y_0\right]\mathcal{Y}_2(s,u,\omega_s,y_s,z_s,\varepsilon,b),$$

$$z_t - \varepsilon Z_0\mathcal{Y}_3(t,u,\omega_t,y_t,z_t,\varepsilon,b) = R(t-t_0,\varepsilon)[z_0 - \varepsilon Z_0\mathcal{Y}_3(t_0,u_0,\omega_0,y_0,$$

$$z_0,\varepsilon,b)] + \int_{t_0}^{t} R(t-s,\varepsilon)Z_0\mathcal{E}(s,u(s),\omega_s,y_s,z_s,\varepsilon,b)ds - \varepsilon\int_{t_0}^{t} d_s[R(t-$$

$$-s,\varepsilon)Z_0]\mathcal{Y}_3(s,u,\omega_s,y_s,z_s,\varepsilon,b),$$

$$x_t - X_0[P_1(b)y_t + P_2(b)z_t + G_1(t,x_t,y_t,z_t,\varepsilon,b)] = \Phi u(t) + \omega_t,\ \omega_t \in \bar Q,$$

$$u(t) = (\Psi, x_t - X_0[P_1(b)y_t + P_2(b)z_t + G_1(t,x_t,y_t,z_t,\varepsilon,b)]) \quad (t \geq t_0),$$

$$u(t_0) = u_0,\ \omega_{t_0} = \omega_0;$$

$$\mathcal{F}_3(t,u,\omega,y,z,\varepsilon,b) = Q_1(b)y + Q_2(b)z + F[g(t,\Phi u + \omega,y,z,\varepsilon,b)],$$

$$\mathcal{Y}_1(t,u,\omega,y,z,\varepsilon,b) = P_1(b)y + P_2(b)z + G_1(t,\Phi u + \omega,y,z,\varepsilon,b), \qquad (6)$$

$$\mathcal{F}(t,u,\omega,y,z,\varepsilon,b) = \Psi(0)F_3(t,u,\omega,y,z,\varepsilon,b) + \mathcal{U}\Psi(0)\mathcal{Y}_1(t,u,\omega,y,z,\varepsilon,b),$$

$$\mathcal{Y}_2(t,u,\omega,y,z,\varepsilon,b) = \sigma_1 P_3(b)z + G_2(t,\Phi u + \omega,y,z,\varepsilon,b),$$

$$\mathcal{H}(t,u,\omega,y,z,\varepsilon,b) = \sigma_1 Q_3(b)z + H[g(t,\Phi u + \omega,y,z,\varepsilon,b)],$$

$$\mathcal{Y}_3(t,u,\omega,y,z,\varepsilon,b) = \sigma_2 P_4(b)y + G_3(t,\Phi u + \omega,y,z,\varepsilon,b),$$

$$\mathcal{E}(t,u,\omega,y,z,\varepsilon,b) = \sigma_2 Q_4(b)z + E[g(t,\Phi u + \omega,y,z,\varepsilon,b)].$$

Интегралы в правых частях уравнений (5) определены при каждом $\theta \in [-r,0]$ как обычные интегралы в R^n, R^m, R^e. Очевидно, $u = col(u_1,u_2)$, $\mathcal{F} = col(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$, где $u_i, \mathcal{F}_i \in R^{p_i}$ $(i=1,2)$.

Из условий I.5 – I.7 следует, что существуют постоянные $K>1$, $\alpha>0$, при которых для всех $t \geq 0$ справедливы неравенства [I] :

$$|T(t)\varphi|\leqslant Ke^{-\alpha t}|\varphi| \qquad (\varphi\in Q),$$

$$\sup_{\theta\in[-r,0]}|T(t)X_0^Q(\theta)|+\sup_{\theta\in[-r,0]}\int_0^t|d_s T(t-s)X_0^Q(\theta)|\leqslant Ke^{-\alpha t},$$

$$|S(t,\varepsilon)Y_0(\theta)|\leqslant Ke^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t+\theta)}, \quad \left|\frac{d}{dt}S(t,\varepsilon)Y_0(\theta)\right|\leqslant\frac{K}{\varepsilon}e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t+\theta)} \qquad (t+\theta\geqslant 0),$$

$$|R(t,\varepsilon)z_0|\leqslant Ke^{-\alpha t}, \qquad \left|\frac{d}{dt}R(t,\varepsilon)z_0\right|\leqslant\frac{K}{\varepsilon}e^{-\alpha t},$$

$$|S(t,\varepsilon)y|\leqslant Ke^{-\alpha t}|y|, \qquad |R(t,\varepsilon)z|\leqslant Ke^{-\alpha t}|z| \qquad (y\in C^m, z\in C^e).$$

При $t<0$ имеем $|e^{u_1 t}|\leqslant Ke^{\alpha t}$.
Далее для каждого $\mu>0$ существует такое $K>0$,что

$$|e^{u_2 t}|\leqslant Ke^{\mu|t|} \qquad (t\in R) \tag{7}$$

Определение I. Множество точек $\mathcal{M}$ пространства $R\times R^p\times\bar{Q}\times$ $\times C^m\times C^e$ называется интегральным многообразием системы (5), если при каждом $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $b\in\mathcal{B}$ для любой точки $(t_0,u_0,\omega_0,y_0,z_0)\in\mathcal{M}$ выполняется $(t,u(t),\omega_t,y_t,z_t)\in\mathcal{M}$ при всех $t\geqslant t_0$, где $u(t),\omega_t,y_t,z_t$ – решение уравнения (5) с начальными данными $(t_0,u_0,\omega_0,y_0,z_0)$.

Т е о р е м а I. Пусть выполнены условия I.I – I.7, тогда существуют такие положительные постоянные N_0, Δ_0 , что для любых $N<N_0$, $\Delta<\Delta_0$ при всех $b\in\mathcal{B}$ и достаточно малых ε,β,ν система (I) имеет интегральные многообразия

$$\mathcal{M}^-=\left\{\begin{array}{l}(t,u,\omega,y,z):\quad t\in R,\ u_1\in R^{p_1},\quad u_2=\xi^-(t,u_1,\varepsilon,b),\\ \omega=\varphi^-(t,u_1,\varepsilon,b),\ y=\psi^-(t,u_1,\varepsilon,b),\ z=\chi^-(t,u_1,\varepsilon,b)\end{array}\right\},$$

$$\mathcal{M}^{*-}=\Big\{(t,u,\omega,y,z): t\in R,\ u\in R^p,\ \omega=\varphi^{*-}(t,u,\varepsilon,b),$$
$$y=\psi^{*-}(t,u,\varepsilon,b),\ z=\chi^{*-}(t,u,\varepsilon,b)\Big\},$$

$$\mathcal{M}^*=\left\{\begin{array}{l}(t,u,\omega,y,z): t\in R,\ u_1=\xi^*(t,u_2,\varepsilon,b),\ u_2\in R^{p_2},\\ \omega=\varphi^*(t,u_2,\varepsilon,b),\ y=\psi^*(t,u_2,\varepsilon,b),\ z=\chi^*(t,u_2,\varepsilon,b)\end{array}\right\},$$

где

$$\xi^-, \varphi^-, \psi^-, \chi^-, \varphi^{*-}, \psi^{*-}, \chi^{*-}, \xi^*, \varphi^*, \psi^*, \chi^* \tag{8}$$

непрерывные по совокупности переменных функции, удовлетворяющие по фазовым переменным условию Липшица с константой Δ , обращающиеся в нуль при $u_1 = 0$, $u = 0$ и $u_2 = 0$ соответственно. Функция ξ^- удовлетворяет неравенству $|\xi^-| \leq N|u_1|$, а все остальные функции (8) по норме не превосходят N .

Многообразия $\mathcal{M}^-, \mathcal{M}^{*-}, \mathcal{M}^*$ называются соответственно неустойчивым, центрально-неустойчивым и центральным.

Доказательство теоремы проводится по схеме Н.Н.Боголюбова и Ю.А. Митропольского. В данной ситуации удобно воспользоваться рассуждениями Дж.Хейла [I] .

Замечание I. Нетрудно видеть, что для существования многообразий $\mathcal{M}^-, \mathcal{M}^{*-}, \mathcal{M}^*$ достаточно, чтобы функции $\mathcal{F}, \mathcal{F}_3, \mathcal{G}_i\ (i=\overline{1,3}), \mathcal{H}, \mathcal{E}$ были определены и обладали указанными в теореме I свойствами лишь при $|\omega| + |y| + |z| \leq \rho$ $(\rho > 0)$.

Отметим некоторые свойства многообразий $\mathcal{M}^*, \mathcal{M}^{*-}$.

Поведение решений системы (5) на $\mathcal{M}^*, \mathcal{M}^{*-}$ описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\dot{u}_2 = \mathcal{U}_2 u_2 + \mathcal{F}_2 [t, \xi^*(t,u_2,\varepsilon,b), u_2, \varphi^*(t,u_2,\varepsilon,b), \psi^*(t,u_2,\varepsilon,b), \chi^*(t,u_2,\varepsilon,b)\varepsilon, b]$$

и

$$\dot{u} = \mathcal{U}u + \mathcal{F}[t, u, \varphi^{*-}(t,u,\varepsilon,b), \psi^{*-}(t,u,\varepsilon,b), \chi^{*-}(t,u,\varepsilon,b), \varepsilon, b]$$

соответственно.

Если в системе (I) при всех фиксированных $\varepsilon < \varepsilon_0$, $b \in \mathcal{B}$ функции $G_i\ (i=\overline{1,3})$, F , H почти периодические по t равномерно относительно x , y , z , то можно доказать, что для каждого b и достаточно малого ε функции $\xi^*, \varphi^*, \psi^*, \chi^*, \varphi^{*-} \psi^{*-} \chi^{*-}$ почти периодические по t равномерно относительно x, y, z.

Предположим теперь, что функция G_1 не зависит от t, x. При фиксированных ε , b обозначим через

$$Q_{\mathcal{G}_1} \times C^m \times C^e = \{(\omega, y, z) \in \bar{Q} \times C^m \times C^e : \omega(0) = \omega(0^-) - \mathcal{G}_1(y,z,\varepsilon,b)\}.$$

Далее, пусть

$$Q_{\mathcal{G}_1} \times C^m \times C^e \times (0,\varepsilon_1) \times \mathcal{B} = \{(\omega,y,z,\varepsilon,b) \in \bar{Q} \times C^m \times C^e \times (0,\varepsilon_1] \times \mathcal{B} : \omega(0) = \omega(0^-) - \mathcal{G}_1(y,z,\varepsilon,b)\}.$$

Т е о р е м а 2. Пусть система (I) удовлетворяет условиям I.I - I.7 и функция G_1 не зависит от t, x, тогда для любого $b\in(0,\alpha)$ существуют такие положительные постоянные M, M', ε_1, ν_1, что при всех $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$, $\beta\in\mathcal{B}$, $0<\nu\leqslant\nu_1$ система (5) обладает интегральными многообразиями

$$\mathcal{M}^+=\{(t,u,\omega,y,z): t\in R,\ u=\xi^+(t,\omega,y,z,\varepsilon,\beta),\ (\omega,y,z)\in Q_{y_1}\times C^m\times C^e\},$$

$$\mathcal{M}^{*+}=\{(t,u,\omega,y,z): t\in R,\ u_1=\xi^{*+}(t,u_2,\omega,y,z,\varepsilon,\beta),\ u_2\in R^{p_2},$$
$$(\omega,y,z)\in Q_{y_1}\times C^m\times C^e\},$$

где функции ξ^+, ξ^{*+}, непрерывны по t, удовлетворяют по фазовым переменным условию Липшица с константой M, $\xi^+(t,0,0,0,\varepsilon,\beta)=0$, $\xi^{*+}(t,0,0,0,0,\varepsilon,\beta)=0$, причем решения системы (5) на $\mathcal{M}^+$ подчиняются неравенству

$$|u(t)|+|\omega_t|+|y_t|+|z_t|\leqslant M'e^{-b(t-t_0)}(|\omega_0|+|y_0|+|z_0|), \qquad (9)$$

на $\mathcal{M}^{*+}$ неравенству

$$|u(t)|+|\omega_t|+|y_t|+|z_t|\leqslant M'e^{b(t-t_0)}(|\omega_0|+|y_0|+|z_0|).$$

Если функция G_1 не зависит от $\varepsilon(\beta)$, то ξ^+, ξ^{*+} непрерывны по $(t,\varepsilon)((t,\beta))$.

Многообразия $\mathcal{M}^+$, $\mathcal{M}^{*+}$, называются соответственно устойчивым и центрально-устойчивым.

Идея доказательства существования многообразия $\mathcal{M}^+$, обладающего указанными выше свойствами состоит в следующем. Зафиксируем $b\in(0,\alpha)$. Пусть $\mu<b$, где μ - константа из неравенства (7). Введем в рассмотрение множество $\overline{H}$ функций ξ со следующими свойствами:

I) $\xi: R\times Q_{y_1}\times C^m\times C^e\times(0,\varepsilon_1]\times\mathcal{B}\to R^p$,

2) ξ непрерывна по t,

3) $\xi(t,0,0,0,\varepsilon,\beta)=0$,

4) ξ удовлетворяет по ω, y, z условию Липшица с константой M, где $M>0$ некоторое фиксированное число.

Для ξ, $\bar\xi\in\overline{H}$ определим метрику

$$|||\xi-\bar\xi|||=\sup_{\substack{t,\varepsilon,\beta\\ \omega,y,z}}\frac{|\xi(t,\omega,y,z,\varepsilon,\beta)-\bar\xi(t,\omega,y,z,\varepsilon,\beta)|}{|\omega|+|y|+|z|}.$$

$\boxed{H}$ с введенной метрикой – полное метрическое пространство. Пусть $\xi \in \boxed{H}$, рассмотрим систему уравнений:

$$\omega_t = T(t-t_0)\omega_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-s) X_0^Q \mathcal{F}_3^{\xi}(s, \omega_s, y_s, z_s, \varepsilon, b) ds - $$
$$ - \int_{t_0}^{t} d_s \left[T(t-s) X_0^Q \right] \mathcal{G}_1(y_s, z_s, \varepsilon, b),$$

$$y_t = Y_0 \mathcal{G}_2^{\xi}(t, \omega_t, y_t, z_t, \varepsilon, b) + S(t-t_0, \varepsilon)[y_0 - Y_0 \mathcal{G}_2^{\xi}(t_0, \omega_0, y_0, z_0, \varepsilon, b)] +$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t} S(t-s, \varepsilon) Y_0 \mathcal{H}^{\xi}(s, \omega_s, y_s, z_s, \varepsilon, b) ds - \int_{t_0}^{t} d_s [S(t-s, \varepsilon) Y_0] \mathcal{G}_2^{\xi}(s, \qquad (10)$$
$$\omega_s, y_s, z_s, \varepsilon, b),$$

$$z_t = \varepsilon Z_0 \mathcal{G}_3^{\xi}(t, \omega_t, y_t, z_t, \varepsilon, b) + R(t-t_0, \varepsilon)[z_0 - \varepsilon Z_0 \mathcal{G}_3^{\xi}(t_0, \omega_0, y_0,$$
$$z_0, \varepsilon, b)] + \int_{t_0}^{t} R(t-s, \varepsilon) Z_0 \mathcal{E}^{\xi}(s, \omega_s, y_s, z_s, \varepsilon, b) ds - \varepsilon \int_{t_0}^{t} d_s [R(t-$$
$$-s, \varepsilon) Z_0] \mathcal{G}_3^{\xi}(s, \omega_s, y_s, z_s, \varepsilon, b).$$

Здесь $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$, $b \in \mathcal{B}$, $(\omega_0, y_0, z_0) \in Q_{\mathcal{G}_1} \times C^m \times C^e$,

$$\mathcal{F}_3^{\xi}(t, \omega, y, z, \varepsilon, b) = \mathcal{F}_3[t, \xi(t, \omega, y, z, \varepsilon, b), \omega, y, z, \varepsilon, b]$$

и т.д.

При фиксированных начальных данных $(t_0, \omega_0, y_0, z_0)$, а также $\xi \in \boxed{H}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$, $b \in \mathcal{B}$ тройку функций ω_t, y_t, z_t будем называть решением (10), если существует такое $T > t_0$, что

1) функции ω_t, y_t, z_t определены на $[t_0, T]$ и принимают значения в $\bar{Q}, C^m, C^e$ соответственно,

2) функции ω_t, y_t, z_t непрерывны и удовлетворяют (10) при $t \in [t_0, T]$.

Используя принцип обобщенного сжатия, можно показать, что существуют положительные постоянные M_1, M_2, для которых при достаточно малых ε, ν и всех $b \in \mathcal{B}$ система (10) имеет единственное решение, определенное при всех $t \geq t_0$, удовлетворяющее неравенству

$$|\omega_t| + |y_t| + |z_t| \leq M_1 e^{-b(t-t_0)} (|\omega_0| + |y_0| + |z_0|), \qquad (11)$$

условию Липшица по ω_0, y_0, z_0 с константой $M_1 e^{-b(t-t_0)}$, а по ξ с константой $\nu M_2 e^{-b(t-t_0)} (|\omega_0| + |y_0| + |z_0|)$.

Пусть ω_t, y_t, z_t – решение (IO). Определим на $\overline{H}$ оператор

$$(\Pi\xi)(t_0,\omega_0,y_0,z_0,\varepsilon,b)=\int_{\infty}^{t_0} e^{u(t-s)}\mathcal{F}^{\xi}(s,\omega_s,y_s,z_s,\varepsilon,b)ds.$$

Нетрудно показать, что существует такое $M>0$, для которого при достаточных малых ε,ν $\Pi:\overline{H}\to\overline{H}$ и является сжимающим оператором. Следовательно, Π имеет неподвижную точку ξ^+, которая и описывает искомое многообразие $\mathcal{M}^+$. Пусть $M'\geqslant 3M_1(M+1)$. Тогда (IO) следует из липшицевости ξ^+ по ω, y, z и неравенства (II).

Если G_1 не зависит, например, от ε, то множество $Q_{y_1}\times C^m\times C^e$ не зависит от ε и вместо $\overline{H}$ следует рассматривать множество $\overline{H}'$ функций ξ, обладающих свойствами I,3,4 множества $\overline{H}$ и непрерывно зависящих от (t,ε).

Существование $\mathcal{M}^{*+}$ доказывается аналогично.

Для системы (5) справедлив принцип сведения.

Т е о р е м а 3. Предположим, что система (I) удовлетворяет условиям I.I – I.7, причем функция G_1 не зависит от t, x. линейна по y, z. Тогда при любых $b\in\mathcal{B}$, $b\in(0,\alpha)$ и достаточно малых ε, ν для произвольного решения $u(t),\omega_t,y_t,z_t$ системы (5) с начальными данными $(t_0,u_0,\omega_0,y_0,z_0)$ существует решение $p(t),q_t,r_t,s_t$ системы (5), располагающееся на многообразии $\mathcal{M}^{*-}$ и такое, что для него справедливы оценки

$$|u(t)-p(t)|+|\omega_t-q_t|+|y_t-r_t|+|z_t-s_t|\leqslant M'e^{-b(t-t_0)}(|\omega_{t_0}-$$

$$-q_{t_0}|+|y_{t_0}-r_{t_0}|+|z_{t_0}-s_{t_0}|).$$

Здесь M' – константа, не зависящая от ε,b,ν.

Доказательство теоремы 3 проводится по схеме [II]. Поясним лишь ограничения, накладываемые на функцию G_1. При доказательстве теоремы делается замена переменных, аналогичная описанной в [II], в результате которой получается система типа (5), зависящая от некоторого параметра $C\in R^p$. Для дальнейшего нужно, чтобы полученная система обладала многообразием $\mathcal{M}^+$, непрерывным по C. Для этого достаточно, чтобы функция G_1 была линейна по y, z и не зависела от t, x.

Исследование дифференцируемости конечномерных многообразий для уравнений нейтрального типа проводится аналогично исследованию дифференцируемости соответствующих многообразий обыкновенных дифференциальных уравнений (см. 10).

Предположим, что $G_1=0$, $P_1=0$, $P_2=0$. В этом случае в системе (5) $\omega_t \in Q$ при всех $t \geq t_0$ и $\varphi^* \in Q, \varphi^{*-} \in Q, \varphi^- \in Q$. Многообразия $\mathcal{M}^+, \mathcal{M}^{*+}$ определены при всех $t \in R, \omega \in Q, y \in C^m, z \in C^e$, а функции ξ^+, ξ^{*+} непрерывны по совокупности аргументов.

Т е о р е м а 4. Пусть $G_1=0$, $P_1=0$, $P_2=0$, система (I) удовлетворяет условиям I.Ia – I.Iв, I–2 – I.7. Предположим, что функции G_2, G_3, F, H, E имеют в Ω равномерно ограниченные частные производные по t, x, y, z до $(j+1)$ -го порядка включительно. Пусть первые частные производные этих функций по норме не превосходят ν. Тогда функции (8) j раз непрерывно дифференцируемы по $(t,u_2),(t,u)$ и (t,u_1) соответственно.

Замечание 2. Утверждение теоремы 4 остается верным, если функции $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_3$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{G}_3$ в системе (5) определены и удовлетворяют условиям теоремы 4 лишь при $|\omega|+|y|+|z| \leq \rho$.

2. Асимптотическое разложение функций (8) по степеням получено для систем вида

$$\frac{d}{dt}[x(t)-Bx_t]=Ax_t+Q_1(b)y_t+Q_2(b)z(t)+F(t,x_t,y_t,z(t),\varepsilon,b),$$

$$\varepsilon\frac{d}{dt}[y(t)-\varepsilon G_2(t,x_t,y_t,\varepsilon,b)]=Cy(t)+\sigma_1 Q_3(b)z_t+\varepsilon H(t,x_t,y_t,z(t),\varepsilon,b),$$

$$\varepsilon\frac{d}{dt}[z(t)-\varepsilon G_3(t,x_t,y_t,\varepsilon,b)]=D(\varepsilon)z(t)+\varepsilon\sigma_2 Q_4(b)y_t+\varepsilon E(t,x_t,y_t,z_t,\varepsilon,b). \quad (12)$$

Предположим, что выполнены следующие условия.

2.I. Функции F, H, E $(2S+3)$ раза непрерывно дифференцируемы по t,x,y,z,ε в области $R\times C_\rho^n\times C_\rho^m\times R_\rho^e\times[0,\varepsilon_0]\times\mathcal{B}$, где $C_\rho^i=\{\varphi\in C^i:|\varphi|\leq\rho\}$ $(i=n,m)$, $R_\rho^e=\{z\in R^e:|z|\leq\rho\}$, равномерно ограничены вместе со всеми своими производными в рассматриваемой области, обращаются в нуль при $(x,y,z)=0$. Первые частные производные функции F,E обращаются в нуль при $(x,y,z,\varepsilon)=0$.

2.2. Функции G_2, G_3 $(2S+3)$ раза непрерывно дифференцируемы по t, x, y, ε в области $R\times C_\rho^n\times C_\rho^m\times[0,\varepsilon_0]\times\mathcal{B}$, равномерно ограничены вместе со всеми своими производными в этой области; при всех t, ε, b зависят от $x(\theta)$, $y(\theta)$ лишь при

$\theta \leq -\sigma (\sigma > 0)$; обращаются в нуль при $(x,y)=0$. Первые частные производные функции G_3 по x , y обращаются в нуль при $(x,y,\varepsilon)=0$.

2.3. Пусть выполнены условия I.? - I.7 и матрица D_0 невырождена.

Из условия I.5 следует, что для любого $T>0$ найдутся такие ρ^* , ε^* , что решение (I2), выпущенное из области $C^n_{\rho^*} \times C^m_{\rho^*} \times R^e_{\rho^*}$ в произвольный момент времени t_0 , определено на отрезке длиной T сразу при всех $0<\varepsilon \leq \varepsilon^*$, $b \in \mathcal{B}$.

Система (I2) с начальными данными $(t_0, x_0, y_0, z_0) \in R \times C^n_{\rho^*} \times C^m_{\rho^*} \times R^e_{\rho^*}$ эквивалентна системе

$$\frac{du}{dt} = \mathcal{U}u + \mathcal{F}(t,u,\omega_t, y_t, z(t), \varepsilon, b),$$

$$\omega_t = T(t-t_0)\omega_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-s) X_0^Q \mathcal{F}_3(s,u,\omega_s,y_s,z(s),\varepsilon,b)ds,$$

$$y_t - \varepsilon Y_0 \mathcal{Y}_2(t,u,\omega_t,y_t,\varepsilon,b) = S(t-t_0,\varepsilon)[y_0 - \varepsilon Y_0 \mathcal{Y}_2(t_0,u_0,\omega_0,y_0,\varepsilon,b)] +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} S(t-s,\varepsilon)Y_0 \left\{\varepsilon \mathcal{H}(s,u(s),\omega_s,y_s,z(s),\varepsilon,b) + \sigma_1 Q_3(b) z(s)\right\}ds - \tag{I3}$$

$$-\varepsilon \int_{t_0}^{t} d_s [S(t-s,\varepsilon)Y_0]\mathcal{Y}_2(s,u,\omega_s,y_s,\varepsilon,b),$$

$$\varepsilon \frac{d}{dt}\left[z(t) - \varepsilon \mathcal{Y}_3(t,u,\omega_t,y_t,\varepsilon,b)\right] = D(\varepsilon)z(t) + \varepsilon \mathcal{E}(t,u,\omega_t,y_t,z(t),\varepsilon,b),$$

здесь $x_t = \Phi u(t) + \omega t$, $u(t) = (\Psi, x_t)$ $(t \geq t_0)$, $\omega_t \in Q$, $x_0 = \Phi u_0 + \omega_0$,

$$\mathcal{H}(t,u,\omega,y,z,\varepsilon,b) = H(t,\Phi u + \omega, y, z, \varepsilon, b),$$

функции $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_3$, $\mathcal{Y}_2$, $\mathcal{Y}_3$, $\mathcal{E}$ вычисляются по формулам (6).

Изменим гладко функции $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_3$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{Y}_2$, $\mathcal{Y}_3$, так, чтобы они были определены при всех $u \in R^p$, совпадали с исходными при $|u| \leq \frac{\rho}{2}$, обращались в нуль при $|u| \geq \rho$, были $(2s+3)$ раза непрерывно дифференцируемы, достаточно малы, имели достаточно малые первые частные производные по u , ω , y , z и были равномерно ограничены вместе со всеми частными производными. Новые функции будем обозначать теми же буквами и в дальнейшем будем считать, что функции в системе (I3) определены при всех

$u \in R^p$. Тогда согласно замечаниям I,2, существует такое $\rho_1 > 0$, что при всех $b \in \mathcal{B}$ и достаточно малых ε система (I3) имеет многообразия $\mathcal{M}^*$, $\mathcal{M}^{*-}$, $\mathcal{M}$, непрерывно дифференцируемые по фазовым переменным и времени.

Проводя рассуждения, аналогичные [I0], можно показать, что функции ξ^*, φ^*, ψ^*, χ^* представимы в виде

$$
\begin{aligned}
&\xi^*(t,u_2,\varepsilon,b) = \xi_0^*(t,u_2,b)+\varepsilon\xi_1^*(t,u_2,b)+\dots+\varepsilon^{s-1}\xi_{s-1}^*(t,u_2,b)+\\
&+\varepsilon^s\xi_s^*(t,u_2,\varepsilon,b),\\
&\varphi^*(t,u_2,\varepsilon,b)=\varphi_0^*(t,u_2,b)+\varepsilon\varphi_1^*(t,u_2,b)+\dots+\varepsilon^{s-1}\varphi_{s-1}^*(t,u_2,b)+\\
&+\varepsilon^s\varphi_s^*(t,u_2,\varepsilon,b),\\
&\psi^*(t,u_2,\varepsilon,b)=\varepsilon\psi_1^*(t,u_2,b)+\dots+\varepsilon^{s-1}\psi_{s-1}^*(t,u_2,b)+\varepsilon^s\psi_s^*(t,u_2,\varepsilon,b),\\
&\chi^*(t,u_2,\varepsilon,b)=\varepsilon\chi_1^*(t,u_2,b)+\dots+\varepsilon^{s-1}\chi_{s-1}^*(t,u_2,b)+\varepsilon^s\chi_s^*(t,u_2,\varepsilon,b).
\end{aligned}
\tag{I4}
$$

Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 5. Пусть система (I2) удовлетворяет условиям 2.I – 2.3. Тогда существуют такие положительные ρ_1, ε_1, что при $0<\varepsilon\ll\varepsilon_1$ система (I3) обладает интегральным многообразием $\mathcal{M}^*$, представимым в виде (I4). Функции в правой части (I4) непрерывны по совокупности аргументов, при фиксированных b, ε имеют частные производные по u_2, t, непрерывные по совокупности переменных. Функции $\varphi_i^*, \psi_i^* (i=\overline{1,s-1})$ и φ_s^*, ψ_s^* имеют частную производную по $\theta\in[-r,0]$, непрерывную по (t,u_2,b,θ) и $(t,u_2,\varepsilon,b,\theta)$ соответственно.

Аналогичные утверждения справедливы для многообразий $\mathcal{M}^{*-}$, $\mathcal{M}^-$.

Укажем некоторый алгоритм для практического отыскания разложений (I4). Для описания алгоритма введем операторы $\bar{A}$, $\overline{C(\varepsilon)}$, определенные на множествах $\mathcal{D}(\bar{A})=\left\{x\in C^n : \frac{dx(\theta)}{d\theta}\in C^n\right\}$, $\mathcal{D}(\overline{C(\varepsilon)})=\left\{y\in C^m : \frac{dy(\theta)}{d\theta}\in C^m\right\}$ соответственно. Для $x\in\mathcal{D}(\bar{A})$, $y\in\mathcal{D}(\overline{C(\varepsilon)})$ пусть

$$
\bar{A}x(\theta)=\begin{cases}\dfrac{dx(\theta)}{d\theta}, & -r\leqslant\theta<0,\\[2mm] \displaystyle\int_{-r}^{0}d\mu_0(\theta)\dot{x}(\theta)+\int_{-r}^{0}d\eta(\theta)x(\theta), & \theta=0;\end{cases}
$$

1/2 18-6501

$$\overline{C(\varepsilon)}y(\theta)=\begin{cases}\dfrac{dy(\theta)}{d\theta}, & -r\leqslant\theta<0,\\ \dfrac{c}{\varepsilon} & \theta=0.\end{cases}$$

Очевидно, $\bar{\mathcal{A}}$, $\overline{C(\varepsilon)}$ принимают значения в PC^n , PC^m соответственно.

Реализация алгоритма включает три этапа.

I^0. Найдем матричные функции Φ , ψ , X_0^Q , матрицу $\mathcal{U}$, функции $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_3$, $\mathcal{Y}_2$, $\mathcal{Y}_3$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{E}$ (определенные при всех $u\in R^p$).

2^0. Введем в рассмотрение систему уравнений:

$$\frac{\partial\xi^*}{\partial t}-\frac{\partial\xi^*}{\partial u_2}\left\{\mathcal{U}_2u_2+\mathcal{F}_2(t,\xi^*,u_2,\varphi^*,\psi^*,x^*,\varepsilon,b)\right\}=$$

$$=\mathcal{U}_1\xi^*+\mathcal{F}_1(t,\xi^*,u_2,\varphi^*,\psi^*,x^*,\varepsilon,b),$$

$$\frac{\partial\varphi^*(\theta)}{\partial t}+\frac{\partial\varphi^*(\theta)}{\partial u_2}\left\{\mathcal{U}_2u_2+\mathcal{F}_2(t,\xi^*,u_2,\varphi^*\psi^*,x^*,\varepsilon,b)\right\}=$$

$$=\bar{\mathcal{A}}\varphi^*(\theta)+X_0^Q(\theta)\mathcal{F}_3(t,\xi^*,u_2,\varphi^*,\psi^*,x^*,\varepsilon,b), \qquad (I5)$$

$$\varepsilon\frac{\partial\psi^*(\theta)}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial\psi^*(\theta)}{\partial u_2}\left\{\mathcal{U}_2u_2+\mathcal{F}_2(t,\xi^*,u_2,\varphi^*,\psi^*,x^*,\varepsilon,b)\right\}=$$

$$=\varepsilon\overline{C(\varepsilon)}\psi^*(\theta)+\sigma_1Y_0(\theta)Q_3(b)x^*+\varepsilon Y_0(\theta)\mathcal{H}(t,\xi^*,u_2,\varphi^*,\psi^*,x^*\varepsilon,b)+$$

$$+\varepsilon Y_0(\theta)\frac{d}{dt}\mathcal{Y}_2(t,\xi^*,u_2,\varphi^*\psi^*,\varepsilon,b)+\varepsilon Y_0(\theta)\frac{d\mathcal{Y}_2(t,\xi^*,u_2,\varphi^*,\psi^*,\varepsilon,b)}{du_2}\times$$

$$\times\left\{\mathcal{U}_2u_2+\mathcal{F}_2(t,\xi^*,u_2,\varphi^*,\psi^*,x^*,\varepsilon,b)\right\}\qquad(\theta\in[-r,0]),$$

$$\varepsilon\frac{\partial x^*}{\partial t}+\varepsilon\left[\frac{\partial x^*}{\partial u_2}-\frac{\partial\mathcal{Y}_3(t,\xi^*,u_2,\varphi^*,\psi^*,\varepsilon,b)}{du_2}\right]\left[\mathcal{U}_2u_2+\right.$$

$$\left.+\mathcal{F}_2(t,\xi^*,u_2,\varphi^*,\psi^*,x^*,\varepsilon,b)\right]=D(\varepsilon)x^*+\varepsilon\mathcal{E}(t,\xi^*,u_2,\varphi^*\psi^*,x^*,\varepsilon,b)+$$

$$+\varepsilon^2\frac{d}{dt}\mathcal{Y}_3(t,\xi^*,u_2,\varphi^*,\psi^*,\varepsilon,b).$$

3^0 Подставим в них разложения (I4) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε . Получим уравнения для отыскания функций $\xi_0^*,\varphi_0^*,\psi_i^*,x_i^*,\xi_i^*,\varphi_i^*$ ($i=\overline{1,s-1}$). Можно показать, что полученные уравнения имеют единственное решение.

Коэффициенты разложений $\xi^{*-}, \varphi^{*-}, \psi^{*-}, x^{*-}, \xi^{-}, \varphi^{-}, \psi^{-}, x^{-}$ можно также находить из уравнений, полученных в результате подстановки соответствующих разложений в уравнения типа (I5) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε .

Подсчитаем коэффициенты $\xi_0^*, \varphi_0^*, \xi_1^*, \varphi_1^*, \psi_1^*, x_1^*$. Функции ξ_0^*, φ_0^* описывают центральное многообразие вырожденной системы

$$\frac{du}{dt} = \mathcal{U}u + \mathcal{F}(t, u, \omega_t, 0, 0, 0, \beta),$$

$$\omega_t = T(t-t_0)\omega_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-s) X_0^Q \mathcal{F}_3(s, u, \omega_s, 0, 0, 0, \beta)\, ds.$$

Далее,

$$x_1^*(t, u_2, \beta) = -D_0^{-1}\mathcal{E}(t, \xi_0^*, u_2, \varphi_0^*, 0, 0, 0, \beta),$$

$$\psi_1^*(t, u_2, \beta)(0) = -C^{-1}\left[Q_3 x_1^* + \mathcal{H}(t, \xi_0^*, u_2, \varphi_0^*, 0, 0, 0, \beta)\right],$$

$$\psi_1^*(t, u_2, \beta)(\theta) = \psi_1^*(t, u_2(t+\theta), \beta)(0),$$

где $u_2(t+\theta)$ - решение задачи Коши

$$\frac{du_2(s)}{ds} = \mathcal{U}_2 u_2(s) + \mathcal{F}_2(s, \xi_0^*, u_2, \varphi_0^*, 0, 0, 0, \beta), \quad u_2(t) = u_2,$$

вычисленное в точке $s = t+\theta$.

Функции ξ_1^*, φ_1^* описывают центральное многообразие системы

$$\frac{du_1}{dt} = \mathcal{U}_1 u_1 + \frac{\partial \mathcal{F}_1[t]}{\partial u_1} u_1 + \frac{\partial \mathcal{F}_1[t]}{\partial \omega}\omega_t + \frac{\partial \mathcal{F}_1[t]}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \mathcal{F}_1[t]}{\partial y}\psi_1^*(t, u_2, \beta) +$$
$$+ \frac{\partial \mathcal{F}_1[t]}{\partial z} x_1^*(t, u_2, \beta) - \frac{\partial \xi_0^*(t, u_2, \beta)}{\partial u_2}\left\{\frac{\partial \mathcal{F}_2[t]}{\partial u_1} u_1 + \frac{\partial \mathcal{F}_2[t]}{\partial \omega}\omega_t +\right.$$
$$\left. + \frac{\partial \mathcal{F}_2[t]}{\partial y}\psi_1^*(t, u_2, \beta) + \frac{\partial \mathcal{F}_2[t]}{\partial z} x_1^*(t, u_2, \beta) + \frac{\partial \mathcal{F}_2[t]}{\partial \varepsilon}\right\},$$

$$\frac{du_2}{dt} = \mathcal{U}_2 u_2 + \mathcal{F}_2[t],$$

$$\omega_t = T(t-t_0)\omega_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-s) X_0^Q \left\{\frac{\partial \mathcal{F}_3[s]}{\partial u_1} u_1 + \frac{\partial \mathcal{F}_3[s]}{\partial \omega}\omega_s + \right.$$

$$+\frac{\partial\mathcal{F}_3[s]}{\partial\varepsilon}+\frac{\partial\mathcal{F}_3[s]}{\partial y}\psi_1^*(s,u_2,b)+\frac{\partial\mathcal{F}_3[s]}{\partial z}x_1^*(s,u_2,b)\Big\}ds-$$

$$-\int_{t_0}^{t}T(t-s)\frac{\partial\varphi_0^*(s,u_2,b)}{\partial u_2}\times\Big\{\frac{\partial\mathcal{F}_2[s]}{\partial u_1}u_1+\frac{\partial\mathcal{F}_2[s]}{\partial\omega}\omega_s+\frac{\partial\mathcal{F}_2[s]}{\partial\varepsilon}+$$

$$+\frac{\partial\mathcal{F}_2[s]}{\partial y}\psi_1^*(s,u_2,b)+\frac{\partial\mathcal{F}_2[s]}{\partial z}x_1^*(s,u_2,b)\Big\}ds.$$

Здесь $\dfrac{\partial\mathcal{F}_1[t]}{\partial u_1}\equiv\dfrac{\partial\mathcal{F}_1[t,\xi_0^*(t,u_2(t),b),u_2(t),\varphi_0^*(t,u_2(t),b),0,0,0,b]}{\partial u_1}$

и т.д.

Автор благодарит В.В.Стрыгина за постановку задачи и помощь в работе.

Литература

1. Hale J.K. Critical cases for neutral differential equations. – J. Differential Equations, N1, 1971, p. 59–89.

2. Колесов Ю.С., Швитра Д.И. Автоколебания в системах с запаздыванием. – Вильнюс, Мокслас, 1979.

3. Фодчук В.И., Черевко И.М. К теории интегральных многообразий сингулярно возмущенных дифференциально-разностных уравнений.– Укр. матем. ж., 1982, № 6, т.34.

4. Kelley A. The stable, center-stable, center, center-unstable, unstable manifolds. – J. Differential Equations, N3, 1967, p. 546–570.

5. Hale J.K., Meyer K.R. A class of functional equations of neutral type.– Mem. Amer. Math. Soc., N76, 1967, p.1–65.

6. Hale J.K. Forward and backward continuation for neutral functional differential equations. – J. Differential Equations, N9, 1971, p. 168–181.

7. Hale J.K. Theory of functional differential equations.– New York: Springer, 1977. – 365 p.

8. Стрыгин В.В. Интегральные многообразия в задаче о сингулярном и параметрическом возмущении автоколебательной системы.–/ Труды семинара по дифференциальным уравнениям. Куйбышев, 1975, с.108–127.

9. Соболев В.А. Об интегральных многообразиях сингулярно возмущенных систем в одном критическом случае. - Дифференциальные уравнения. Куйбышев: КГУ, 1976, с.63-71.

10. Стрыгин В.В., Фридман Э.М. Об асимптотическом представлении интегральных многообразий сингулярно возмущенных функционально-дифференциальных уравнений. - В кн.: Приближенные методы исследования дифференциальных уравнений и их приложения. Куйбышев: КГУ, 1982, с. 133-141.

11. Плисс В.А. Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1977, 304 с.

С.О.Стрыгина

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОЛИНОМОВ В МЕТОДЕ ГАЛЕРКИНА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим краевую задачу

$$L_\varepsilon u \equiv -\varepsilon u'' + p(x) u' = q(x, u) \qquad (1)$$

$$u(-1) = u(1) = 0 \qquad (2)$$

с малым положительным параметром ε при старшей производной. Известно [3,6], что характерной особенностью решения такого рода краевых задач является наличие пограничного слоя. В последнее время интенсивно развиваются численные методы решения сингулярно возмущенных краевых задач, и среди них - метод Галеркина, которому посвящен ряд работ (см., напр., [1,2,7]). Базисные функции в этих работах конструировались из сплайнов и функций типа погранслоя. В настоящей работе дается обоснование метода Галеркина с использованием в качестве базисных функций обычных полиномов и функции типа погранслоя, близость точного и приближенного решения оценивается в равномерной метрике.

1. Постановка задачи и формулировка результата. Относительно функций $p(x)$ и $q(x,u)$ в уравнении (1) будем предполагать, что $p: [-1,1] \to \mathbb{R}$, $q: [-1,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) \geq p_0 > 0 \; (x \in [-1,1])$ и обе функции достаточно гладкие. Кроме того, предположим, что q, q_u, q_{uu} равномерно ограничены.

При $\varepsilon = 0$ уравнение (1) переходит в дифференциальное уравне-