Блатов И.А.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА-ПЕТРОВА К ПРИБЛИЖЕННОМУ ОТЫСКАНИЮ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

I. Постановка задачи. Формулировка основного результата

Рассмотрим задачу

$$-\varepsilon u''+p(x,u)u'+q(x,u)=0 \qquad (I.I)$$
$$u(a)=u(b)=0.$$

Предположим, что $p,q:[a,b]\times[-N,N]\to R$, где $N>0$ достаточно большое число. Зафиксируем целое $k\geqslant 2$. Пусть функции p и q $k+1$ раз непрерывно дифференцируемы:

$$p(x,y)\geqslant p_0>0 \qquad (I.2)$$

для всех $x\in[a,b]$, $y\in[-N,N]$. Пусть решение $\bar z_b(x)$ порождающей задачи

$$p(x,z_0)z_0'+q(x,z_0)=0$$
$$z_0(a)=0 \qquad (I.3)$$

существует на всем отрезке $[a,b]$

Пусть $z=b-\frac{2}{p_0}\varepsilon|\ln\varepsilon|$. В дальнейшем $\varepsilon>0$ будем считать фиксированным и достаточно малым.

Из результатов [I] вытекает

Т е о р е м а I. Существует такое $\varepsilon_0>0$, что для любого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ существует единственное решение задачи (I.I), удовлетворяющее оценкам

$$\|u_\varepsilon(x)-\bar z_0(x)\|_{C[a,z]}\leqslant C\varepsilon; \qquad (I.4)$$

для любого $x \in [z,b]$, $i=0,1,\dots,K+1$

$$|u_\varepsilon^{(i)}(x)| \leqslant C\left(1+\varepsilon^{-i} e^{p_0 \cdot \frac{x-b}{2\varepsilon}}\right), \qquad (I.5)$$

где C не зависит от x и ε.

Пусть $\varkappa = K+2$. Пусть $h_n = \frac{z-a}{n}$, $\hbar_m = \frac{1-\varepsilon^{1/\varkappa}}{m}$; $n, m \in \mathcal{N}$.
Выберем разбиение Δ_n^m отрезка $[a,b]$ следующим образом. На отрезке $[a,z]$ Δ_n^m есть равномерное разбиение с шагом h_n, а на отрезке $[z,b]$ – разбиение с узлами $x_{n+i} = b + \frac{2\varepsilon}{p_0}\varkappa \cdot$
$\cdot \ln(1-(m-i)\hbar_m)$

$a=x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \dots \quad x_{n-1} \quad x_n = z \quad x_{n+1} \dots \quad x_{n+m} = b$

Построим пространство решений. Пусть

$$H_0^K[\alpha,\beta] = \left\{u(x) : u, u', \dots u^{(K-1)} \in C[\alpha,\beta],\ u^{(K)} \in L_2[\alpha,\beta],\ u(\alpha)=u(\beta)=0\right\}$$

– пространство с нормой

$$\left(\|u\|_{K,2}^{[\alpha,\beta]}\right)^2 = \|u^{(K)}\|_2^2 + \|u^{(K-1)}\|_2^2 + \dots + \|u'\|_2^2 + \|u\|_2^2,$$

где $\|\cdot\|_2$ – обычная норма в $L_2[\alpha,\beta]$. Пусть

$$\mathcal{P}_K^{h_n} = \left\{u(x) \in C^{(K-1)}[a,z] : u(a)=0,\ u(x) = \mathcal{P}_i(x)\ \forall x \in [x_{i-1},x_i],\ i=1,\dots,n\right\},$$

где $\mathcal{P}_i(x)$ – полином степени $\leqslant K$.

Базис пространства $\mathcal{P}_K^{h_n}$ образуют функции $\bar{B}_{-K+1}(x), \dots, \bar{B}_{-1}(x)$,
$B_0(x), B_1(x), \dots, B_{n-(K+1)}(x), B_{n-K}(x), \dots, B_{n-1}(x)$,
где $B_i(x)$ – i-й B – сплайн степени K (см. [3]); $\bar{B}_{-K+1}, \dots,$
$\bar{B}_{-1}$ – такие функции из $\mathcal{L}(B_{-K}, B_{-K+1}, \dots, B_{-1})$ (линейной оболочки), что $B_i(a)=0$. Продолжим базисные функции с отрезка $[a,z]$ на отрезок $[a,b]$ непрерывным образом. Функции $\bar{B}_{-K+1}, \dots, \bar{B}_{-1}$, $B_0, \dots, B_{n-(K+1)}$ продолжим нулем и сохраним за ними прежние обозначения. Для $i = n-K, n-K+1, \dots, n-1$ положим

$$\tilde{B}_i(x) = \begin{cases} B_i(x), & x \leqslant z \\ f_i(x), & x \geqslant z \end{cases}$$

где $f_i(x) = \alpha_i\left(e^{p_0 \frac{x-b}{2\varepsilon}} - 1\right)$; коэффициент α_i выбирается так, чтобы $\tilde{B}_i(x)$ была непрерывна на $[a,b]$. Пусть

$$R_K^{h_n} = \mathcal{L}(\bar{B}_{-K+1}, \dots, \bar{B}_{-1}, B_0, \dots, B_{n-(K+1)}, \tilde{B}_{n-K}, \dots, \tilde{B}_{n-1});$$

$$Q_K^{\hbar m}=\left\{u\in H_0^K[z,b]: u(x)=\mathcal{P}_i\left(e^{\frac{p_0}{2\varepsilon}\frac{x-b}{\varepsilon}}\right)\forall x\in[x_{i-1},x_i],\right.$$

$\left. i=n+1,\dots,n+m\right\}$, где $\mathcal{P}_i(y)$ – полином степени $\leqslant K$.
Каждую из функций из $Q_K^{\hbar m}$ продолжим нулем влево на весь отрезок $[a,b]$ и сохраним за полученным пространством обозначение $Q_K^{\hbar m}$.

Определим пространство решений и тестовое пространство. Пусть

$$E_K^{\Delta_n^m}=R_K^{h_n}\dotplus Q_K^{\hbar m},\ \ \mathcal{F}_K^{\Delta_n^m}=D(R_K^{h_n})\Big|_{[a,z]}\dotplus(-\varepsilon^2D^2+I)Q_K^{\hbar m}=\Phi_K^n\dotplus\Psi_K^m,$$

где D – оператор дифференцирования, I – тождественный оператор, $|[a,z]$ обозначает ограничение на $[a,z]$ и продолжение нулем на отрезок $[z,b]$. Пусть $D_1,D_2,\dots,D_{n+K-1}$, $D_{n+K},\dots,D_\ell$; $\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2,\dots,\mathcal{F}_{n+K-1},\dots,\mathcal{F}_\ell$ – базисы в $E_K^{\Delta_n^m}$ и $\mathcal{F}_K^{\Delta_n^m}$ соответственно, причем $D_1,\dots,D_{n+K-1}$ и $\mathcal{F}_1,\dots,\mathcal{F}_{n+K-1}$ образуют базисы соответственно в $R_K^{h_n}$ и Φ_K^n, а $D_{n+K},\dots,D_\ell$ и $\mathcal{F}_{n+K},\dots,\mathcal{F}_\ell$ – базисы в $Q_K^{\hbar m}$ и Ψ_K^m.
Галеркинская задача формулируется следующим образом.

Найти такую $u_K\in E_K^{\Delta_n^m}$, что

$$(p(x,u_K)u_K'+q(x,u_K),\mathcal{F}_i)=0,\ \ i=1,\dots,n+K-1. \tag{I.6}$$

$$(-\varepsilon u_K''+p(x,u_K)u_K'+q(x,u_K),\mathcal{F}_i)=0,\ \ i=n+K,\dots,\ell, \tag{I.7}$$

где $(\cdot,\cdot)$ – обычное скалярное произведение в $L_2[a,b]$.

Основным результатом статьи является

Т е о р е м а 2. Найдутся такие числа $n_0,m_0\in\mathcal{N},\sigma>0$, что для $n\geqslant n_0,m\geqslant m_0$ задача (I.6), (I.7) имеет единственное решение u_K, для которого при $m\geqslant max(m_0,|\ln\varepsilon|^{1/4})$ справедливы оценки

$$\|u_K-u_\varepsilon\|_{C[a,z]}\leqslant C(\varepsilon+h_n^K) \tag{I.8}$$

$$\|u_K-u_\varepsilon\|_{C[z,b]}\leqslant C(\varepsilon+|\ln\varepsilon|\cdot\hbar_m^{K-1}+h_n^K) \tag{I.9}$$

$$\|u_K-\tilde{z}_0\|_{1,2}^{[a,z]}\leqslant\sigma, \tag{I.10}$$

где C не зависит от n,m,ε.

Будем искать u_K в виде $u_K=\sum\limits_{i=1}^{\ell}\alpha_iD_i=\sum\limits_{i=1}^{n+K-1}\alpha_iD_i+$
$+\sum\limits_{i=n+K}^{\ell}\alpha_iD_i=u_K^{(1)}(x)+u_K^{(2)}(x)$. Тогда, как нетрудно видеть, задача (I.6), (I.7) эквивалентна задаче отыскания такой $u_K=$

$\doteq u_K^{(1)} + u_K^{(2)}$, что

$$(p(x,u_K^{(1)})u_K^{(1)'} + q(x,u_K^{(1)}),\mathcal{F}_i) = 0,\ i=1,\dots,n+\kappa-1 \tag{I.II}$$

$$(-\varepsilon u_K'' + p(x,u_K(x))u_K' + q(x,u_K(x)),\mathcal{F}_i) = 0,\ i = n+\kappa,\dots,\ell. \tag{I.I2}$$

причем задача (I.II) решается независимо от задачи (I.I2).

II. Исследование задачи (I.II)

2.I. Сведение к интегральным уравнениям. Рассмотрим задачу (I.3) на отрезке $[a,z]$. Сделаем в ней замену $p(x,\bar z_0(x))z_0' = y$. Тогда задача (I.3) сводится к задаче отыскания решения интегрального уравнения

$$y = \left(p(x,\bar z_0(x)) - p\left(x,\int_a^x \frac{y(\xi)\,d\xi}{p(\xi,\bar z_0(\xi))}\right)\right)y(x)\cdot\frac{}{p(x,\bar z_0(x))} - q\left(x,\int_a^x\frac{y(\xi)\,d\xi}{p(\xi,\bar z_0(\xi))}\right) = Ty, \tag{2.1}$$

где оператор T действует в пространстве $L_2[a,z]$.

Пусть $\mathcal{P}_n$ – ортопроектор на Φ_K^n, а $\widetilde T$ – естественное расширение оператора T на пространство $L_2[a,z]$. Пусть $H_n^K = p(x,\bar z_0(x))D(R_K^{h_n})\big|_{[a,z]}$. Тогда задача (I.II) сводится к задаче отыскания такого $\tilde y_n \in p(x,\bar z_0(x))D(R_K^{h_n})$, что

$$\mathcal{P}_n\tilde y_n = \mathcal{P}_n\widetilde T\tilde y_n. \tag{2.2}$$

Пусть

$$y_n = \tilde y_n\big|_{L_2[a,z]} \tag{2.3}$$

Рассмотрим задачу отыскания такого $y_n \in H_K^n$, что

$$\mathcal{P}_n y_n = \mathcal{P}_n T y_n. \tag{2.4}$$

Замечание I. Очевидно, что задачи (2.2) и (2.4) разрешимы или нет одновременно, причем для их решений справедливо соотношение (2.3).

Л е м м а I. Оператор $\widetilde{\mathcal{P}}_n = \mathcal{P}_n\big|_{H_n^K}$ обратим, обратный оператор ограничен равномерно по n, и для любой $\kappa+1$ раз дифференцируемой функции f

$$\|\widetilde{\mathcal{P}}_n^{-1}\mathcal{P}_n f - f\|_{L_2[a,z]} \leqslant Ch_n^K, \tag{2.5}$$

где $C = C(f)$.

Доказательство этой и последующих лемм будут приведены в § 4.

Применяя оператор $\tilde{\mathcal{P}}_n^{-1}$ к обеим частям (2.4), сведем его к эквивалентному уравнению

$$y_n = \tilde{\mathcal{P}}_n^{-1}\mathcal{P}_n T y_n = T_n y_n . \qquad (2.6)$$

2.2. Одна теорема об операторных уравнениях. Пусть E – гильбертово пространство, $E_n \subset E$ – его подпространства. Пусть $\mathcal{P}_n$ – ортопроектор на E_n, $T: E \to E$, $T_n: E_n \to E_n$ – нелинейные операторы. Рассмотрим уравнения

$$x = Tx \qquad (2.7)$$

$$\xi_n = T_n \xi_n . \qquad (2.8)$$

Имеет место простой аналог теоремы Г.М.Вайникко ([3] , с.43).

Теорема 3. Пусть выполнены следующие условия:

1. Уравнение (2.7) имеет решение $x^* \in E$.
2. Оператор T дифференцируем по Фреше в точке x^*, оператор $T'(x^*)$ компактен, и однородное уравнение $\varphi - T'(x^*)\varphi = 0$ имеет лишь нулевое решение.
3. Операторы T_n дифференцируемы по Фреше, каждый в своем шаре $\{\xi_n \in E_n : \|\xi_n - \mathcal{P}_n x^*\|_{E_n} \leqslant \delta\}$, где $\delta > 0$ не зависит от n; операторы $T'(\mathcal{P}_n x^*)$ компактны, и $\|T_n'(\xi_n) - T'(\mathcal{P}_n x^*)\|_{E_n \to E_n} \leqslant \leqslant C(\|\xi_n - \mathcal{P}_n x^*\|_{E_n})$ при $\|\xi_n - \mathcal{P}_n x^*\|_{E_n} \leqslant \delta$.
4. $\|\mathcal{P}_n T x^* - T_n \mathcal{P}_n x^*\|_{E_n} \to 0$ при $n \to \infty$.
5. $\|T_n'(\mathcal{P}_n x^*) - \mathcal{P}_n T'(x^*)\|_{E_n \to E_n} \to 0$ при $n \to \infty$.
6. $\|\mathcal{P}_n f - f\|_E \to 0$ при $n \to \infty$ для любого $f \in E$.

Тогда найдутся такие числа $n_0 \in \mathcal{N}$ и $\delta_0 > 0$, что при $n \geqslant n_0$ уравнение (2.8) имеет единственное решение ξ_n^* в шаре $\|\xi_n - \mathcal{P}_n x^*\|_E \leqslant \delta_0$, и справедлива оценка

$$\|\xi_n^* - \mathcal{P}_n x^*\|_E \leqslant C \|\mathcal{P}_n T x^* - T_n \mathcal{P}_n x^*\|_E . \qquad (2.9)$$

Замечание 2. Как следует из доказательства, в (2.9) можно взять $C = 2\|(I - T'(x^*))^{-1}\|_{E \to E}$.

2.3. Проверим выполнение условий теоремы 3 для уравнений (2.I), (2.6). Решение уравнения (2.I) y^* существует в силу разрешимости задачи (I.3). Далее, как легко видеть, для любых $y \in D(T)$, $\xi \in L_2[a,z]$,

$$T'(y)\xi=\left(p(x,\bar z_0(x))-p\left(x,\int_a^x\frac{y(\xi)d\xi}{p(\xi,\bar z_0(\xi))}\right)\right)\cdot\frac{\xi}{p(x,\bar z_0(x))}-$$

$$-p'_u\left(x,\int_a^x\frac{y(\xi)d\xi}{p(\xi,\bar z_0(\xi))}\right)\cdot\frac{y(x)}{p(x,\bar z_0(x))}\cdot\int_a^x\frac{\xi(\xi)d\xi}{p(\xi,\bar z_0(\xi))}-q'_u\left(x,\int_a^x\frac{y(\xi)d\xi}{p(\xi,\bar z_0(\xi))}\right)\cdot \tag{2.10}$$

$$\cdot\int_a^x\frac{\xi(\xi)d\xi}{p(\xi,\bar z_0(\xi))}.$$

При $y=y^*$ из (2.10) следует выполнение условия 2.

Из (2.10) легко получить, что $\|T'(y_1)-T'(y_2)\|_{L_2\to L_2}\leqslant \leqslant C\|y_1-y_2\|_{L_2[a,z]}$. Поскольку $T'_n(\xi)=\tilde{\mathcal{P}}_n^{-1}\mathcal{P}_nT'(\xi)$ для любого $\xi\in D[T_n]$, то выполнено условие 3. Выполнение условия 4 вытекает из леммы I и условия 6. Далее имеем

$$\|T'_n(\mathcal{P}_ny^*)-\mathcal{P}_nT'(y^*)\|_{L_2\to L_2}\leqslant\|\tilde{\mathcal{P}}_n^{-1}\mathcal{P}_n\|_{L_2\to L_2}\cdot$$

$$\cdot\|T'(\mathcal{P}_ny^*)-T'(y^*)\|_{L_2\to L_2}+\|\tilde{\mathcal{P}}_n^{-1}\mathcal{P}_nT'(y^*)-\mathcal{P}_nT'(y^*)\|_{L_2\to L_2}.$$

Первое слагаемое стремится к нулю в силу (2.10), леммы I и условия 6. Второе слагаемое стремится к нулю в силу леммы I, условия 6 и компактности оператора $T'(y^*)$. Значит, выполнено и условие 5.

Проверим выполнение условия 6. Очевидно, достаточно проверить его для $K+1$ раз дифференцируемой f. Рассмотрим задачу $u'=f(x),\ u(a)=0$. Ее решение $u(x)\equiv\int_a^x f(\xi)d\xi$ является $K+1$ раза непрерывно дифференцируемым. Согласно известной теореме аппроксимации ([3] , с.139) существует такая функция $V_K(x)\in\mathcal{P}_K^{h_n}$, что

$$\|V_K(x)-u(x)\|_{C[a,z]}\leqslant Ch_n^{K+1},\ \|V'_K(x)-u'(x)\|_{C[a,z]}\leqslant Ch_n^K.$$

Но $V'_K(x)\in\Phi_K^n$. Значит, $\|\mathcal{P}_nf-f\|_{L_2[a,z]}\leqslant Ch_n^K\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

Таким образом, все условия теоремы 3 проверены. При этом в силу леммы I и того, что $\|\mathcal{P}_ny^*-y^*\|_{L_2[a,z]}\leqslant Ch_n^K$, оценка (2.9) будет иметь вид $\|y_n-\mathcal{P}_ny^*\|_{L_2[a,z]}\leqslant Ch_n^K$, где y_n - решение уравнения (2.4). Отсюда $\|y_n-y^*\|_{L_2[a,z]}\leqslant Ch_n^K$. Поэтому в силу связи уравнения (2.4) с задачей (I.II) справедлива

Л е м м а 2. Найдутся такие числа $n_0\in\mathcal{N}$ и $\sigma_0>0$, что для $n\geqslant n_0$ задача (I.II) имеет единственное решение $u_K^{(1)}\in R_K^{h_n}$, удовлетворяющее оценкам

$$\|u_K^{(1)}(x)-\bar z_0(x)\|_{C[a,z]}\leq Ch_n^K,\ \|u_K^{(1)}(x)-\bar z_0(x)\|_{1,2}^{[a,z]}\leq\sigma_0.$$

III. Исследование задачи (I.I2)

3.I. Пусть задача (I.II) решена, т.е. найдены коэффициенты $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n+k-1}$. Обозначим $f(x)=\sum_{i=n-1}^{n+k-1}\alpha_i D_i(x)$, $p(x,u_k^{(2)}(x)+f(x))=$ $=\mathcal{P}(\frac{x-b}{\varepsilon}, u_k^{(2)})$, $q(x,u_k^{(2)}(x)+f(x))=Q(\frac{x-b}{\varepsilon}, u_k^{(2)})$.

Рассмотрим задачу отыскания такой $u_k^{(2)}\in Q_k^{hm}$, что

$$(-\varepsilon u_k^{(2)''}+\mathcal{P}(\frac{x-b}{\varepsilon}, u_k^{(2)})\overline{u}_k^{(2)'}+\mathcal{P}(\frac{x-b}{\varepsilon}, u_k^{(2)})f'(x)-\varepsilon f''(x)+$$

$$+Q\left(\frac{x-b}{\varepsilon}, u_k^{(2)}\right),\mathcal{F}_i)=0,\ i=n+k,\dots,\ell. \qquad (3.II)$$

Очевидно, что задачи (3.I) и (I.I2) разрешимы или нет одновременно, причем для их решений будем иметь: $u_k^{(2)}(x)+f(x)\equiv u_k(x)$ для любого $x\in[z,b]$. Сделаем замену переменных $\tau=\frac{x-b}{\varepsilon}$. Пусть $M=$ $=\frac{b-z}{\varepsilon}=\frac{2}{p_0}|\ln\varepsilon|$, $f(x)=\tilde{f}(\tau)$, $u_k^{(2)}(x)=S_k(\tau)$. В терминах переменной пространству $L_2[z,b]$ будет соответствовать пространство $L_2[-M,0]$.

Пусть $\overline{Q}_k^{hm}=\{u(\tau)\in L_2[-M,0]: u(\frac{x-b}{\varepsilon})\in Q_k^{hm}\}$,

$\overline{\Psi}_k^{m}=\{u(\tau)\in L_2[-M,0]: u(\frac{x-b}{\varepsilon})\in \psi_k^{m}\}$.

За базисными функциями в $\overline{\psi}_k^m$ сохраним обозначения $\mathcal{F}_i$. В результате замены задача (3.I) сведется к задаче отыскания такой

$S_k\in\overline{Q}_k^{hm}$, что

$$(-\ddot{S}_k+\mathcal{P}(\tau,S_k)\dot{S}_k+\mathcal{P}(\tau,S_k)\dot{\tilde{f}}-\ddot{\tilde{f}}+\varepsilon Q(\tau,S_k),\mathcal{F}_i)=0. \qquad (3.2)$$

где скалярное произведение понимается в смысле $L_2[-M,0]$, точки означают дифференцирование по τ. Порождающей краевой задачей для проекционной задачи (3.2) является задача

$$L_\varepsilon S=-\ddot{S}+\mathcal{P}(\tau,S)\dot{S}+\mathcal{P}(\tau,S)\dot{\tilde{f}}-\ddot{\tilde{f}}+\varepsilon Q(\tau,S)=0$$
$$S(-M)=S(0)=0. \qquad (3.3)$$

Рассмотрим также задачу

$$L_\varepsilon\overline{S}=0$$
$$\overline{S}(-M)=u_\varepsilon(z)-f(z),\ \overline{S}(0)=0. \qquad (3.4)$$

Очевидно, что ее решением будет функция $\overline{S}(\tau)=u_\varepsilon(x)-f(x)$.

Л е м м а 3. Для достаточно малых $\varepsilon > 0$, $h_n > 0$, существует решение задачи (3.3), для которого справедливы оценки

$$\|\bar{S}(\tau) - S(\tau)\|_{C[-M,0]} \le C(\varepsilon + h_n^{\kappa}). \tag{3.5}$$

$$|\overset{(i)}{S}(\tau)| \le C e^{p_0 \frac{\tau}{2}}, \quad i = 1, 2, \ldots, K+1, \tag{3.6}$$

где C не зависит от n и ε.

3.2. Сведение к интегральным уравнениям. Сделаем замену искомой функции: $-\ddot{S} + S = \varphi$. Тогда $S(\tau) = \int^{0} G(\tau, \xi)\varphi(\xi)d\xi$, где

$$G(\tau,\xi) = \frac{1}{2(1-e^{-2M})}\begin{cases}(1-e^{2\xi})e^{\tau-\xi} - e^{-2M}(1-e^{-M}e^{2\xi})e^{-(\tau+\xi)}, & -M \le \tau < \xi\\ (e^{-2M} - e^{2\xi})e^{\tau-\xi} - (e^{-2M} - e^{2\xi})e^{-(\tau+\xi)}, & \xi < \tau \le 0.\end{cases}$$

Легко видеть, что

$$|G(\tau,\xi)| \le Ce^{-|\tau-\xi|}, \quad \left|\frac{\partial G}{\partial \tau}(\tau,\xi)\right| \le Ce^{-|\tau-\xi|}. \tag{3.7}$$

После замены задача (3.3) сведется к отысканию в $L_2[-M,0]$ решения интегрального уравнения

$$\varphi = T\varphi = -\Big(\mathcal{P}(\tau, G\varphi)\frac{\partial G}{\partial \tau}\varphi + \mathcal{P}(\tau, G\varphi)\dot{\tilde{f}}(\tau) - \ddot{\tilde{f}}(\tau) + \varepsilon Q(\tau, G\varphi) - G\varphi\Big), \tag{3.8}$$

где $G\varphi = \int_{-M}^{0} G(\tau,\xi)\varphi(\xi)d\xi$, $\frac{\partial G}{\partial \tau}\varphi = \int_{-M}^{0}\frac{\partial G}{\partial \tau}(\tau,\xi)\varphi(\xi)d\xi$,

а задача (3.2) к задаче отыскания такого $\varphi_m \in \bar{\Psi}_K^m$, что для любого

$$\psi \in \bar{\Psi}_K^m \quad (\varphi_m, \psi) = (T\varphi_m, \psi). \tag{3.9}$$

Отыскание решения задачи (3.9) очевидно эквивалентно решению операторного уравнения

$$\varphi_m = \mathcal{P}_m T\varphi_m, \tag{3.10}$$

где $\mathcal{P}_m$ – ортопроектор на $\bar{\Psi}_K^m$.

3.3. Некоторые вспомогательные утверждения. Покажем, что $\bar{Q}^{\,k}_{m}$ содержит хорошую аппроксимацию $S(\tau)$ – решения задачи (3.3). Сделаем замену переменных $\tau = \frac{2}{p_0}\varkappa \ln y$, $\tau \in [-M, 0]$. Тогда $y = e^{\frac{p_0}{2\varkappa}\tau}$, $y \in [\varepsilon^{1/\varkappa}, 1]$. Пусть $S(\tau) = \hat{S}(y)$.

Л е м м а 4. Имеют место оценки

$$\left|\hat{S}_y^{(i)}(y)\right| \leqslant C e^{\frac{p_0}{2}}\left(1-\frac{i}{\varkappa}\right)\tau, \tag{3.11}$$

где C зависит лишь от $k, i=1,2,\dots,k+1$.

Разбиению Δ_n^m отрезка $[z,b]$ в переменных τ будет соответствовать разбиение $\bar{\Delta}_n^m$ отрезка $[-M,0]$ с узлами $\tau_i=\frac{2}{p_0}\varkappa \ln(1-i\hbar_m)$ в свою очередь, разбиению $\bar{\Delta}_n^m$ отрезка $[-M,0]$ будет соответствовать равномерное с шагом $\hbar_m$ разбиение отрезка $[\varepsilon^{1/\varkappa},1]$, на котором меняется y. Пусть

$$\bar{\mathcal{P}}_k^{\hbar_m}=\left\{u\in H_0^k[\varepsilon^{1/\varkappa},1]: u(y)=\mathcal{P}_i(y),\ y\in[y_{i-1},y_i],\ i=1,\dots,m\right\},$$

где $\mathcal{P}_i(y)$ - полином степени $\leqslant k$.

Л е м м а 5. Существует $\hat{W}_k(y)\in\bar{\mathcal{P}}_k^{\hbar_m}$.

$$\left\|\hat{W}_k^{(i)}(y)-\hat{S}^{(i)}(y)\right\|_{C[\varepsilon^{2/\varkappa},1]}\leqslant C\hbar_m^{k+1-i}, \tag{3.12}$$

где C зависит лишь от $k, i=1,2,\dots,k$.

Пусть $\hat{W}_k(y)=W_k(\tau)$. Тогда $W_k(\tau)\in\bar{Q}_k^{\hbar_m}$.

<u>Л е м м а 6</u>. Имеют место оценки

$$\left\|W_k(\tau)-S(\tau)\right\|_{C[-M,0]}\leqslant Ch_m^{k+1},$$

$$\left|\overset{(i)}{W}(\tau)-\overset{(i)}{S}(\tau)\right|\leqslant Ce^{\frac{p_0\tau}{2\varkappa}}h_m^{k+1-i}, \tag{3.13}$$

где C зависит лишь от $k, i=1,2,\dots,k$.

Лемма 6 очевидным образом вытекает из леммы 5.

Л е м м а 7. Имеет место оценка

$$\left\|\left(I-T'(\varphi^*)\right)^{-1}\right\|_{L_2[-M,0]\to L_2[-M,0]}\leqslant C|\ln\varepsilon|, \tag{3.14}$$

где φ^* - решение уравнения (3.8), C не зависит от ε.

3.4. Доказательство разрешимости задачи (3.2) и оценки точности. Проверим выполнение условий теоремы 2 для уравнений (3.8), (3.10). Условие I выполнено в силу леммы 3. В силу (3.7), (3.8) оператор T определен в некотором шаре $B(\delta)=\{\zeta\in L_2[-M,0]: \|\zeta-\varphi^*\|_{L_2[-M,0]}\leqslant\delta\}$, где $\delta>0$ не зависит от ε. Нетрудно видеть, что T дифференцируем по Фреше в любой точке φ своей области определения, и для любого $\zeta\in L_2[-M,0]$

$$
T'(\varphi)\zeta = -\Big(\mathcal{P}_S'(\tau, G\varphi)\frac{\partial G}{\partial\tau}\varphi\cdot G\zeta + \mathcal{P}(\tau, G\varphi)\frac{\partial G}{\partial\tau}\zeta +
+ \mathcal{P}_S'(\tau, G\varphi)\ddot{\tilde{f}}(\tau)\frac{\partial G}{\partial\tau}\zeta + \varepsilon Q_S'(\tau, G\varphi)G\zeta - G\zeta\Big). \tag{3.15}
$$

Из (3.15) и леммы 7 вытекает выполнение условия 3. Далее из (3.15) легко получить, что для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in D(T)$ $\|T'(\varphi_1) - T'(\varphi_2)\|_{L_2\to L_2} \leqslant$ $\leqslant C\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L_2[-M,0]}$. Следовательно, выполнено и условие 3. Условие 5 следует из липшицевости $T'(\varphi)$ и условия 6, выполнение которого будет доказано ниже. Из формулы конечных приращений и леммы 6 имеем

$$
\|\mathcal{P}_m T\varphi^* - T_m\mathcal{P}_m\varphi^*\|_{L_2[-M,0]} \leqslant C\|\varphi^* - \mathcal{P}_m\varphi^*\|_{L_2[-M,0]} \leqslant
\leqslant C(|\ln\varepsilon|^{1/2}h_m^{K+1} + h_m^{K-1}),
$$

т.е. выполнено условие 4.

Проверим, что выполнено условие 6. Очевидно, достаточно, как и ранее проверить его для $K+1$ раз дифференцируемой функции g. Рассмотрим задачу $-\ddot{S} + S = g$, $S(-M) = S(0) = 0$. Ее решением будет функция $\tilde{S}(\tau) = \int_{-M}^{0} G(\tau,\xi)g(\xi)d\xi$. Если теперь мы найдем последовательность таких функций $S_K^{(m)} \in Q_K^{h_m}$, что

$$
\|S_K^{(m)} - \tilde{S}\|_{L_2[-M,0]} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0, \quad \|\ddot{S}^{(m)} - \ddot{\tilde{S}}\|_{L_2[-M,0]} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0, \tag{3.17}
$$

то для последовательности функций $\psi_K^m \in \Psi_K^m$: $\psi_K^m = -\ddot{S}_K^{(m)} + S_K^{(m)}$

будем иметь: $\|\psi_K^m - g\|_{L_2[-M,0]} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$, т.е. получим требуемое.

Обозначим $\tilde{S}(\tau) = \hat{S}(e^{p_0\frac{\tau}{2\varkappa}}) = \hat{S}(y)$. Согласно соответствию между y и τ пространству $\bar{Q}_K^{h_m}$ с узлами τ_i соответствует пространство $\mathcal{P}_K^{h_m}$ полиномиальных сплайнов на равномерной сетке. Тогда согласно теореме Стечкина и Субботина ([3], с.139) существует такая $\hat{S}_K^{(m)}(y) \in \bar{\mathcal{P}}_K^{h_m}$, что для $i = 0, \dots, K$

$$
\|(\hat{S}_K^{(m)})_y^{(i)} - \hat{S}_y^{(i)}\|_{C[\varepsilon^{1/\varkappa},1]} \leqslant Ch_n^{K+1-i}\cdot\|\hat{S}_{(y)}^{K+1}\|_{C[\varepsilon^{1/\varkappa},1]}.
$$

Положим $\hat{S}_K^{(m)}(y) = S_K^{(m)}(\tau)$. Тогда получим

$$
|S_K^{(m)}(\tau) - \tilde{S}(\tau)| \leqslant Ch_m^{K+1}\cdot\|\hat{S}_{(y)}^{(K+1)}\|_{C[\varepsilon^{1/\varkappa},1]}, \quad |\ddot{S}_K^{(m)}(\tau) - \ddot{\tilde{S}}(\tau)| \leqslant
$$

$$\leqslant C\hbar_m^{K-1}\cdot\left\|\hat{S}^{(K+1)}_{(y)}\right\|_{C[\varepsilon^{1/K},1]}\cdot e^{p_0\frac{\tau}{2K}}.$$

Поэтому при фиксированном $\varepsilon>0$ и $m\to\infty$ имеем сходимость (3.I7). Тем самым завершена проверка условия 6.

Таким образом все условия теоремы 3 проверены. Значит, справедливо утверждение теоремы 3 относительно уравнений (3.8),(3.10). При этом в силу (3.I6), леммы 7 и оценки (2.9) $\|\varphi_n-\varphi^*\|_{L_2[-M,0]}\leqslant$ $\leqslant C|\ln\varepsilon|\cdot\|\varphi^*-\mathcal{P}_m\varphi^*\|_{L_2[-M,0]}\leqslant C|\ln\varepsilon|\cdot(|\ln\varepsilon|^{1/2}\cdot\hbar_m^{K+1}+\hbar_m^{K-1})\leqslant C\hbar_m^{K-1}|\ln\varepsilon|$, если $m\geqslant|\ln\varepsilon|^{1/4}$. Здесь C не зависит от ε, m.

В силу связи решений уравнений (3.8), (3.I0) и задач (3.3), (3.2) справедлива

Л е м м а 8. Найдутся такие числа $m_0\in\mathcal{N}$ и $\sigma_1>0$, что для $m\geqslant m_0$ задача (3.2) имеет единственное решение $S_K\in Q_K^{\hbar_m}$, удовлетворяющее при $m\geqslant max\{m_0,|\ln\varepsilon|^{1/4}\}$ оценкам

$$\|S_K-S\|_{C[-M,0]}\leqslant C|\ln\varepsilon|\hbar_m^{K-1},\quad \|S_K-S\|_{2,2}^{[-M,0]}\leqslant\sigma_1,$$

где S – решение задачи (3.3), C – не зависит от m,ε.

Из лемм 2,3,8 и того, что $u_K^{(2)}(x)=S_K(b+\varepsilon\tau)$, $u_K^{(2)}(x)+f(x)\equiv$ $\equiv u_K(x)$ на $[x,b]$, вытекает утверждение теоремы 2.

Теорема 2 доказана.

IУ. Приложение. Доказательства лемм

Доказательство леммы I. I. Докажем, что найдется такое c, что для всех $n\geqslant n_0$, $f\in H_n^K$

$$\|\mathcal{P}_n f\|_{L_2[a,z]}\geqslant C\|f\|_{L_2[a,z]},\tag{4.I}$$

где C не зависит от n и f. Пусть $f\in H_n^K$. Тогда $f=p(x,\bar z_0(x))u'(x)$, где $u\in\mathcal{P}_K^{h_n}$. Пусть $g(x)=u'(x)$. Тогда $(g,f)=(p(x,\bar z_0(x))u'(x),u'(x))\geqslant p_0(u'(x),u'(x))\geqslant$ $\geqslant C\|g\|_{L_2[a,z]}\cdot\|f\|_{L_2[a,z]}$ откуда и вытекает неравенство (4.I). Из неравенства (4.I) следует, что

$$\|\tilde{\mathcal{P}}_n^{-1}\|_{\Phi_K^n\to H_n^K}\leqslant C,\tag{4.2}$$

где C не зависит от n.

2. Докажем оценку (2.5). Зафиксируем произвольную $f \in C^{(k+1)}[a,z]$. Пусть Q_n – ортопроектор на H_n^k. В пункте 2.3 § 2 было установлено неравенство

$$\|\mathcal{P}_n f - f\|_{L_2[a,z]} \leqslant C h_n^k, \tag{4.3}$$

где $C = C(f)$. Аналогичным образом устанавливается неравенство

$$\|Q_n f - f\|_{L_2[a,z]} \leqslant C h_n^k. \tag{4.4}$$

Из (4.3), (4.4) получаем

$$\|Q_n f - \mathcal{P}_n f\|_{L_2[a,z]} \leqslant C h_n^k. \tag{4.5}$$

Пусть $g_n = Q_n \mathcal{P}_n f$. Тогда в силу (4.5)

$$\|g_n - \mathcal{P}_n f\|_{L_2[a,z]} \leqslant C h_n^k, \quad \|\mathcal{P}_n g_n - \mathcal{P}_n f\|_{L_2[a,z]} \leqslant C h_n^k. \tag{4.6}$$

Обозначим $\tilde{\mathcal{P}}_n^{-1} \mathcal{P}_n f = f_n$, $t_n = g_n - f_n$, $l_n = \mathcal{P}_n g_n - \mathcal{P}_n f$. Тогда $\mathcal{P}_n t_n = l_n$. В силу (4.2), (4.6) имеем $\|t_n\|_{L_2[a,z]} = \|\tilde{\mathcal{P}}_n^{-1} l_n\|_{L_2[a,z]} \leqslant C h_n^k$. Тогда в силу (4.3), (4.6) $\|f - f_n\|_{L_2[a,z]} \leqslant$
$\leqslant \|\mathcal{P}_n f - f_n\|_{L_2[a,z]} + C h_n^k \leq \|g_n - f_n\|_{L_2[a,z]} + C h_n^k = \|t_n\|_{L_2[a,z]} + C h_n^k \leq C h_n^k$.

Лемма I доказана.

Доказательство леммы 3. I. Пусть $u_\varepsilon(z) - f(z) = t$. В силу леммы 2

$$|t| \leqslant C(\varepsilon + h_n^k). \tag{4.7}$$

Сделаем в задаче (3.3) замену

$$\tilde{S}(\tau) = S(\tau) - t\frac{\tau}{M}. \tag{4.8}$$

Тогда задача (3.3) примет вид

$$\tilde{L}_\varepsilon \tilde{S} = -\ddot{\tilde{S}} + \mathcal{P}(\tau, \tilde{S} + t\tfrac{\tau}{M})(\dot{\tilde{S}} + \tfrac{t}{M}) + \mathcal{P}(\tau, \tilde{S} + t\tfrac{\tau}{M})\dot{\tilde{f}} - \ddot{\tilde{f}} +$$
$$+ \varepsilon Q(\tau, \tilde{S} + t\tfrac{\tau}{M}) = 0, \tilde{S}(-M) = t, \tilde{S}(0) = 0. \tag{4.9}$$

Задача (4.9) является регулярно возмущенной по отношению к задаче (3.4). При этом в силу (4.7) абсолютная величина возмущения не превосходит $C(\varepsilon + h_n^k)$. Поэтому, используя методы теории регулярных возмущений (см.например [I]), нетрудно доказать, что найдутся такие числа $n_0 \in N$ и $\varepsilon_0 > 0$, что для всех $n \geqslant n_0$ и $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ существует единственное решение задачи (4.9) $\tilde{S}$, удовлетворяющее оценке

$$\|\bar{S}-\tilde{S}\|_{C[-M,0]} \leqslant C(\varepsilon+h_n^\kappa),\ \|\dot{\bar{S}}-\dot{\tilde{S}}\|_{C[-M,0]} \leqslant C(\varepsilon+h_n^\kappa), \qquad (4.10)$$

где $S(\tau)$ – решение задачи (3.4). Тогда в силу (4.7), (4.8), (4.10) задача (3.3) имеет единственное решение $S(\tau)$, для которого справедлива оценка (3.5).

2. Докажем оценку (3.6). Сделаем в задаче (3.3) замену $\tau=\frac{x-b}{\varepsilon}$, $\tilde{u}(x)=S(\tau)+\tilde{f}(\tau)$. Тогда задача (3.3) примет вид:

$$-\varepsilon\tilde{u}''+p(x,\tilde{u})\tilde{u}'+q(x,\tilde{u})=0 \qquad (4.11)$$
$$\tilde{u}(z)=\tilde{u}(b)=0.$$

Решением этой задачи будет функция $\tilde{u}(x)=S(\tau)+\tilde{f}(\tau)$, где $S(\tau)$ – решение задачи (3.3). При этом в силу (3.5), (1.4)

$$|\tilde{u}(z)-z_0(z)|\leqslant C(\varepsilon+h_n^\kappa). \qquad (4.12)$$

Продолжим решение задачи (4.11) на отрезок $[a,z]$. Для этого рассмотрим задачу

$$-\varepsilon V''+p(x,V)V'+q(x,V)=0 \qquad (4.13)$$
$$V(z)=\tilde{u}(z),\ V'(z)=\tilde{u}'(z).$$

Порождающей задачей для нее будет задача

$$p(x,z)z'+q(x,z)=0 \qquad (4.14)$$
$$z(z)=\tilde{u}(z).$$

В силу (4.12) задача (4.14) будет регулярно возмущенной по отношению к задаче (1.3), если для последней задать начальное условие на первом конце. Поэтому при малых $\varepsilon>0$ и $h_n>0$ задача (4.14) имеет единственное решение $z(x)$, для которого выполнена оценка $\|z(x)-z_0'(x)\|_{C[a,z]}\leqslant C(\varepsilon+h_n^\kappa)$. Тогда согласно результатам [1] задача (4.13) при малых $\varepsilon>0$ и $h_n>0$ имеет единственное решение $V_\varepsilon(x)$, причем $|V_\varepsilon(a)-z(a)|\leqslant C\varepsilon$, откуда $|V_\varepsilon(a)|\leqslant C(\varepsilon+h_n^\kappa)$. Тогда функция

$$\omega(x)=\begin{cases} V_\varepsilon(x), & x\in[a,z] \\ \tilde{u}(x), & x\in[z,b]\end{cases}$$

будет решением задачи

$$-\varepsilon\omega''+p(x,\omega)\omega'+q(x,\omega)=0 \qquad (4.15)$$
$$\omega(a)=V_\varepsilon(a),\ \omega(b)=0.$$

Задача (4.I5), в свою очередь, является регулярно возмущенной по отношению к задаче (I.1). Поэтому нетрудно доказать, что ее решение как и решение задачи (I.I) удовлетворяет оценкам типа (I.5):

$$\left|\omega^{(i)}(x)\right| \leqslant C\left(1+\varepsilon^{-i} e^{p_0 \frac{x-b}{2\varepsilon}}\right)$$

Переходя к переменным τ и учитывая, что $\left|\overset{(i)}{f}(\tau)\right| \leqslant Ce^{p_0 \frac{\tau}{2}}$, $i>0$, в силу свойств базисных функций, получаем оценки (3.6).

Лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 4. Для $i=1$ имеем в силу (3.6)

$$Ce^{p_0 \frac{\tau}{2}} \geqslant \left|\dot{S}(\tau)\right| = \left|\hat{S}'(y) y'(\tau)\right| = \left|\hat{S}'(y)\right| \cdot \left|\frac{p_0}{2\varkappa} \cdot e^{\frac{p_0}{2\varkappa}\tau}\right|$$

откуда вытекает справедливость (3.II) для $i=1$. Нетрудно видеть, что для $m=2,3,\ldots,k+1$

$$\left|\overset{(m)}{S}(\tau)\right| = \left|\hat{S}^{(m)}_{(y)} \cdot [y'(\tau)]^m + \sum_p \varphi_p\right|, \tag{4.I6}$$

где каждое слагаемое конечной суммы имеет вид

$$\varphi_p = C_p \cdot \hat{S}^{(\ell)}_{(y)} \cdot \left[y^{(i_1)}_{(\tau)}\right]^{j_1} \cdot \ldots \cdot \left[y^{(i_t)}_{(\tau)}\right]^{j_t}, \tag{4.I7}$$

$\ell < m$, $\sum\limits_{p=1}^{t} i_p j_p = m$. Предположим теперь, что оценка (3.II) справедлива для $i=1,2,\ldots,m-1$. Тогда из (4.I6), (4.I7), (3.6) получим, что (3.II) справедлива для $i=m$.

Лемма 4 доказана.

Доказательство леммы 5. В силу теоремы Стечкина и Субботина ([3], с.I39) найдется такая функция $\hat{\omega}_k \in \bar{\mathcal{P}}_k^{h_m}$, что

$$\left\|\hat{\omega}_k^{(i)} - \hat{S}^{(i)}\right\|_{C[\varepsilon^{1/\varkappa},1]} \leqslant C(k) h^{k+1-i} \cdot \left\|\hat{S}^{(k+1)}_{(y)}\right\|_{C[\varepsilon^{1/\varkappa},1]}$$

но в силу леммы 4 $\left\|\hat{S}^{(k+1)}_{(y)}\right\|_{C[\varepsilon^{1/\varkappa},1]} \leqslant const$.

Лемма 5 доказана.

Доказательство леммы 7. Рассмотрим уравнение

$$(I - T'(\varphi^*))\zeta = g, \tag{4.I8}$$

где $g(\tau) \in L_2[-M,0]$ – произвольная функция. Тогда в силу (3.I4) и того, что $S = G\varphi^*$, $\dot{S} = \frac{\partial G}{\partial \tau}\varphi^*$, уравнение (4.I8) эквивалентно линейной краевой задаче

$$\begin{gathered} N\psi = -\ddot{\psi} + \mathcal{P}(\tau,S)\dot{\psi} + \mathcal{P}'_S(\tau,S)\dot{S}\psi + \mathcal{P}'_S(\tau,S)\dot{f}\psi + \\ + \varepsilon Q(\tau,S)\psi = g(\tau), \quad \psi(-M) = \psi(0) = 0. \end{gathered} \tag{4.I9}$$

Обозначим $\tilde{p}(\tau)=\mathcal{P}(\tau,S)=p(b+\varepsilon\tau,S(\tau)+\tilde{f}(\tau))$. Тогда задачу (4.I9) можно записать в виде

$$\mathcal{N}\psi=-\ddot{\psi}+\dot{\overline{(p(\tau)\psi)}}+\varepsilon(-p'_x(b+\varepsilon\tau,S(\tau)+\tilde{f}(\tau))+$$
$$+\ Q(\tau,S)\psi=g(\tau),\ \psi(0)=\psi(-M)=0. \qquad (4.20)$$

Задача (4.20) является регулярно возмущенной по отношению к задаче

$$\bar{\mathcal{N}}\bar{\psi}=-\ddot{\bar{\psi}}+\dot{\overline{(p(\tau)\bar{\psi})}}=g(\tau)$$
$$\bar{\psi}(0)=\bar{\psi}(-\mathcal{M})=0. \qquad (4.2I)$$

Легко видеть, что оператор задачи (4.2I) имеет функцию Грина $\bar{G}(\tau,\xi)$, причем для $i=0,1,2$

$$\sup_{\tau,\xi\in[-\mathcal{M},0],\tau\neq\xi}\left|\frac{\partial^i}{\partial\tau^i}\bar{G}(\tau,\xi)\right|\leqslant C, \qquad (4.22)$$

где C – не зависит от $\mathcal{M}$. Поэтому при малых $\varepsilon>0$ оператор задачи (4.20) также будет обладать функцией Грина $G_\varepsilon(x,\xi)$ с аналогичным свойством. Тогда решение уравнения (4.I8) имеет вид

$$\zeta(\tau)=g(\tau)+\int_{-\mathcal{M}}^{0}G_\varepsilon(\tau,\xi)g(\xi)d\xi-\int_{-\mathcal{M}}^{0}\frac{\partial^2G_\varepsilon}{\partial\tau^2}(\tau,\xi)g(\xi)d\xi, \qquad (4.23)$$

т.е. $(I-T'(\varphi^*))^{-1}=I+G_\varepsilon-\dfrac{\partial^2G_\varepsilon}{\partial\tau^2}$. Из (4.22) следует, что

$$\left(\int_{-\mathcal{M}}^{0}\int_{-\mathcal{M}}^{0}\left|\frac{\partial^i}{\partial\tau^i}G_\varepsilon(\tau,\xi)\right|^2d\tau d\xi\right)^{1/2}\leqslant C\mathcal{M}\leqslant C|\ln\varepsilon|.$$

Отсюда и из (4.23) вытекает оценка (3.I3).

Лемма 7 доказана.

Автор благодарит своего руководителя В.В. Стрыгина за постановку задачи и ценные советы.

Литература

I. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, I973.

2. Вайникко Г.М. Компактная аппроксимация и приближенное решение уравнений. Тарту, I970.

3. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, I976.

3-6501