При $n=4$ это утверждение уже неверно. Опровергающий пример уравнения вида

$$\dot{x} = x^4 + p_1(t)x^3 + p_2(t)x^2 + p_3(t)x + p_4(t)$$

с 2π -периодическими коэффициентами, имеющего 5 различных периодических решений, приведен в [I].

Литература

I. Плисс В.А. Нелокальные проблемы теории колебаний. М.–Л.: Наука, 1964.

2. Singer D. Stable orbits and bifurcation of maps of the interval. – SIAM J. Appl. Math., v. 35, N2, 1978, p.p 260–267.

3. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М.: Иностранная литература, 1962.

А.М. Тезин

ПЕРИОДЫ КОЛЕБАНИЙ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В статье методом нетопологического отображения с двузначными прообразами [5,6] вычисляются периоды колебаний, соответствующих замкнутым траекториям на фазовой плоскости. Уравнения этих траекторий предполагаются известными.

I. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = N(x,y), \quad \dot{y} = -M(x,y) + \lambda F(x,y), \tag{I}$$

где λ – параметр (не обязательно малый), M, N и F – дифференцируемые или непрерывные и опорно-дифференцируемые [8,9] в области $D \subset R^2(x,y)$ функции, (x_0, y_0) – такая изолированная в D точка, что $M(x_0,y_0) = N(x_0,y_0) = F(x_0,y_0) = 0$; уравнение $Mdx + Ndy = 0$ [7] является уравнением в полных дифференциалах, общий интеграл которого $W(x,y) = C$ дает функцию $z = W(x,y)$, которая осуществляет отображение

$$W: D \to R^2(x,z). \tag{2}$$

Условие опорной дифференцируемости правых частей системы (I) обеспечивает условия существования и единственности решений в области D [8]. Предположим, что отображение (2) удовлетворяет определяющим его условиям (оно также определяет выбор класса систем вида (I):

А-1. Функция W непрерывна и опорно-дифференцируема в D, в частности, дифференцируема в обычном смысле.

А-2. Уравнение $W(x,y)-z=0$ определяет по крайней мере две неявные функции

$$y=q_i(x,z),\quad i=1,2 \tag{3}$$

с областями определения D_i' такими, что

$$D_1' \cup D_2' = D' = \{(x,z): z \geq \pi(x)\};$$

при этом $q_1[x,\pi(x)] \equiv q_2[x,\pi(x)]$.

А-3. Линия $\pi: z=\pi(x)$ в точке (x_0,z_0) имеет минимум (могут быть и в других ее точках минимумы), где $z_0=W(x_0,y_0)$.

Эти условия являются новой редакцией аксиоматики, которой подчиняются рассматриваемые в работах [5,6,7] и др. нетопологические отображения. Здесь, во-первых, ясно происхождение формул $z=W(x,y)$ и $z=\pi(x)$; во-вторых, видно, как находятся области D_i' и D'. Далее, как следствие вытекает процесс нахождения прообразов $D_1 \cup D_2 = D$ и линии ψ - прообраза линии π. Линия ψ имеет уравнение $y=q_i[x,\pi(x)]=\psi(x)$, не зависящее от i; она делит область D на части D_1 и D_2 и проходит через точку (x_0,y_0). Таким образом, функция W осуществляет однозначное отображение $D \to D'$, которое является нетопологическим, так как, исходя из формул (3), любому образу (x,z) обратно соответствуют, вообще говоря, два прообраза. Формулы (3) можно рассматривать как задание пары гомеоморфизмов: $q_i: D_i' \to D_i$. Для внутренностей областей D_i' и D_i они определяют два опорных диффеоморфизма. Будем рассматривать область (не обязательно открытую) $D_0' = D_1' \cap D_2'$; тогда $q_i: D_0' \to D_i^0 \subset D_i$.

Поскольку в силу системы (I)

$$\dot{z} = \frac{\partial W}{\partial x}\cdot\dot{x} + \frac{\partial W}{\partial y}\cdot\dot{y} = \lambda\cdot F(x,y)\cdot N(x,y),$$

то по формулам (3) система (I) преобразуется в две системы

$$\dot{x} = N[x, q_i(x,z)],$$
$$\dot{z} = \lambda \cdot F[x, q_i(x,z)] \cdot N[x, q_i(x,z)] \equiv \Phi_i(x,z), \tag{4}$$
$i = 1,2$; система при $i = 1$ определяет внутри линии π семейство сплошных, а при $i = 2$ – семейство пунктирных интегральных кривых. При этом сплошные интегральные кривые являются образами дуг траекторий системы (I), лежащих в D_1^0 , а пунктирных суть образы траекторий из D_2^0 [5,7]. Если за D_1^0 принять часть области D , лежащую выше линии ψ , то нумерация формул в (3) определена. Системы (4) в пространстве $R^3(x,z,t)$ равносильны системам

$$\dot{x} = N[x, q_i(x,z)], \; \dot{z} = \Phi_i(x,z), \; \dot{t} = 1. \tag{5}$$

Ортогональная проекция любой интегральной кривой на плоскость (xz) этой системы является интегральной кривой системы (4). Если взять сплошную или пунктирную интегральную кривую, определяемую системой (4), в качестве направляющей цилиндрической поверхности с образующей, параллельной оси t , то получим два вида таких цилиндров: либо состоящих только из сплошных, либо только из пунктирных интегральных кривых системы (5). В силу автономности систем (5) любая интегральная кривая системы (5) получается из другой интегральной кривой на таком цилиндре с помощью некоторого параллельного переноса вдоль оси t.

2. Предположим, что система (I) в области $D_1^0 \cup D_2^0 \subset D$ определяет замкнутую траекторию (интегральный цикл) Γ :

$$\Gamma(x,y) = 0, \tag{6}$$

внутри которой лежит состояние равновесия (x_0, y_0) (возможно, не единственное). Пусть из неявного уравнения (6) определяются две неявные функции

$$y = \gamma_i(x), \; i = 1,2, \tag{7}$$

выражающие цикл Γ и определенные на отрезке $[\alpha, \beta]$. Обозначим графики этих функций символами Γ_i ; тогда $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$. Предположим, что $\Gamma \cap \psi = \{A, B\}$; абсциссы точек A и B суть α и β . При отображении (2) линий Γ и Γ_i получим соответствующие образы Γ' и Γ_i' внутри линии π ; при этом линии Γ_1' и Γ_2' – имеют на линии π общие концы A' и B' и образуют интегральную петлю [5,6]. Точки A' и B' суть образы точек A и B . Уравнения дуг Γ_i' имеют вид

$$z = W[x, \gamma_i(x)] \equiv z_i(x), \; i = 1,2. \tag{8}$$

Известно, что интегральному циклу Γ, лежащему на фазовой плоскости (xy) соответствует периодическое решение системы (I) с периодом T [I,2,3]. Наша задача заключается в том, чтобы по данным функциям P, Q, q_i и (8) получить формулу для периода T.

Построим в пространстве $R^3(x,z,t)$ две цилиндрические поверхности H_i' с направляющими Γ_i' и образующими, параллельными оси t; H_1' заполнена сплошными ($i=1$), а H_2' – пунктирными ($i=2$) интегральными кривыми систем (5). Точки $A'(\alpha,z_1,0)$ и $B'(\beta,z_2,0)$ выражены в координатах этого пространства, где $z_1=\pi(\alpha)$, $z_2=\pi(\beta)$. Прямые n_i, проходящие через точки A' и B' параллельно оси t, являются граничными образующими цилиндров H_i'. Так как функции (8) ограничены на $[\alpha,\beta]$, то вдоль их графиков величины $\dot{x}$, $\dot{z}$ и $\dot{t}$ системы (5) ограничены. Поэтому ни одна сплошная или пунктирная интегральная кривая, находясь соответственно на цилиндре H_i', не может при $t\to\infty$ уйти в бесконечность. Если цикл Γ взять в качестве направляющей цилиндра H с образующей, параллельной оси t, в пространстве $R^3(x,y,t)$, то любая интегральная кривая, проходящая через точку этого цилиндра, при возрастании t в виде спирали уходит по цилиндру в бесконечность, делая вокруг него бесконечное множество витков. Высота одного витка спирали равна периоду T. При отображении (2) цилиндр H переходит в "ломаный" цилиндр $H'=H_1'\cup H_2'$, направляющей которого является интегральная петля $\Gamma'=\Gamma_1'\cup\Gamma_2$. Может случиться, что цилиндры H_i' пересекаются вдоль некоторых своих образующих; тогда цилиндр H' самопересекается по этим образующим. Прямые n_i являются линиями "излома" (негладкости) поверхности H'. Рассмотрим поведение интегральных кривых систем (5) на цилиндрах H_i' и H'. Пусть точка $M\in n_1\subset H_1'\cap H_2'$, $L_i'(M)$ – интегральная кривая системы (5) (при $i=1$ или $i=2$), выходящая из точки M на соответствующий цилиндр H_i'. Поскольку в системе (6) $\dot{t}>0$, то сплошная интегральная кривая $L_1'(M)$ выходит из точки M при возрастании t на цилиндр H_1' и движется по нему; при этом в силу $\dot{t}=1$ величина t строго монотонно возрастает. Поскольку $L_1'(M)$, находясь внутри H_1' не может уходить в бесконечность при $t\to+\infty$, то она приходит в точку $K\in n_2\subset H_2'$. По этой же причине пунктирная интегральная кривая $L_2'(K)$, выходящая из точки K, переходит по цилиндру H_2' в точку $E_1\in n_1$. В совокупности $L_1'(M)\cup L_2'(K)=L'$ дают ломаный виток L'

спирали, лежащий на цилиндре H'. В силу автономности системы (6), любая интегральная кривая, проходящая через точку цилиндра H', получается из интегральной кривой L' с помощью параллельного переноса вдоль оси t. В том числе сплошная интегральная кривая, выходящая из точки E_1 на цилиндре H_1', получается сдвигом названного витка спирали на величину $|ME_1| = T$.

3. Пусть в качестве точки M служит точка A'; тогда точка K имеет координаты (β, z_2, t_1), а точка $E_1(\alpha, z_1, t_2)$; при этом $t_1 < t_2$. Из точки E_1 можно получить на ломаном цилиндре H' второй виток ломаной спирали с началом $E_1 \in n_1$ и концом $E_2 \in n_1$, получающийся из первого витка сдвигом на величину $T = |ME_1| = |E_1E_2|$. Таким образом, ломаную спираль на цилиндре H' можно продолжать неограниченно и периодически. Значит, величины $x(t)$ и $z(t)$ на цилиндре H' (а, следовательно, и на цилиндре H) являются T периодическими. В силу формул (3) величина $y = y(t)$ имеет тот же период. Следовательно, здесь мы изложили новую методику доказательства того факта, что решения системы (I), соответствующие ее интегральным циклам, являются T - периодическими функциями [2].

Для вычисления периода T рассмотрим сплошную интегральную дугу $L_1'(A')$. Для нее из системы (6) имеем дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = N(x, q_1[x, z_1(x)]),$$

откуда

$$\int \frac{dx}{N(x, q_1[x, z_1(x)])} = t + C_1.$$

Пусть $F_1(x)$ - одна из первообразных левой части последнего равенства; тогда

$$F_1(x) = t + C_1. \tag{9}$$

Используем условия

$$x\Big|_{t=0} = \alpha, \quad x\Big|_{t=t_1} = \beta;$$

получим $C_1 = F_1(\alpha)$. Равенство (9) принимает вид

$$F_1(x) = t + F_1(\alpha).$$

При $t = t_1$ имеем $F_1(\beta) = t_1 + F_1(\alpha)$, откуда получаем

$$t_1 = F_1(\beta) - F_1(\alpha). \tag{10}$$

Для пунктирной интегральной дуги $L_2'(K) \subset H_2$ имеем дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = N(x, q_2[x, z_2(x)]$$

и условия

$$x\big|_{t=t_1} = \beta, \quad x\big|_{t=T} = \alpha \qquad (11)$$

Поэтому получаем интеграл

$$\int \frac{dx}{N(x, q_2[x, z_2(x)])} = t + C_2,$$

из которого следует, что

$$F_2(x) = t + C_2, \qquad (12)$$

где $F_2(x)$ – одна из первообразных этого интеграла. Используя условие (11) при $t = t_1$, получаем

$$C_2 = F_2(\beta) - t_1. \qquad (13)$$

При $t = T$ из (12) и (13) имеем

$$T = F_2(\alpha) - F_2(\beta) + t_1.$$

Подставляя сюда выражение (10), получим

$$T = [F_1(\beta) - F_1(\alpha)] + [F_2(\beta) - F_2(\alpha)];$$

откуда следует окончательная формула

$$T = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{1}{N(x, q_1[x, z_1(x)])} - \frac{1}{N(x, q_2[x, z_2(x)])}\right] dx. \qquad (14)$$

В точках A' и B' знаменатели подынтегральных выражений обращаются в нуль; поэтому в (14) имеем несобственный интеграл второго рода, сходимость которого следует из существования периода T. Кроме того, число T является инвариантом всех нетопологических отображений (2), для которых выполняются определяющие их условия.

4. Рассмотрим систему (1) при $\lambda = 0$. Получаем двумерную консервативную систему

$$\dot{x} = N(x, y), \quad \dot{y} = -M(x, y), \qquad (15)$$

сводящуюся к дифференциальному уравнению $Mdx+Ndy=0$ в полных дифференциалах. Предположим также, что общий интеграл $W(x,y)=C$ с этого уравнения такой, что функция $z=W(x,y)$ доставляет нам отображение вида (2) с определяющими его условиями. Тогда система (4) имеет вид

$$\dot{x}=N[x,q_i(x,z)], \quad \dot{z}\equiv 0, \quad i=1,2.$$

При любом постоянном C функция $z=C$ является решением второго уравнения этой системы, имеющее смысл только внутри линии π. Поэтому отрезок прямой $z=C$, заключенный внутри линии π, с концами на этой линии является вырожденной интегральной петлей: с ним совпадают сплошная и пунктирная части петли. Этому отрезку в плоскости (xy) соответствует интегральный цикл. Поскольку точка (x_0,z_0) является точкой минимума линии π, то около этой точки имеются две монотонные дуги этой линии, которые вместе с некоторой прямой $z=h$ ограничивают филиал D_0' линии π, примыкающий к точке (x_0,z_0). Поэтому, если $z_0<C<h$, то любому отрезку прямой $z=C$ на плоскости (xy) соответствует интегральный цикл, окружающий состояние равновесия (x_0,y_0). Следовательно, точка (x_0,y_0) для системы (I5) является особой точкой типа центр; семейство всех замкнутых траекторий около него имеет уравнение $W(x,y)=C$. Уравнения (7) принимают вид $y=q_i(x,c)$, $i=1,2$, а уравнения (8) - $z=W[x,q_i(x,c)]\equiv C$ т.е. $z_i(x)\equiv C$. Следовательно, формула (I4) принимает вид

$$T_c=\int_{\alpha}^{\beta}\left[\frac{1}{N[x,q_1(x,c)]}-\frac{1}{N[x,q_2(x,c)]}\right]dx. \qquad (I6)$$

Здесь период T_c', вообще говоря, зависит от параметра C. Лишь в некоторых случаях при вычислении интеграла с учетом зависимости пределов α и β от C обнаруживается, что этот интеграл не зависит от параметра C. В таких случаях наблюдается явление изохронности колебаний [IO,II] или центра системы (I5).

5. Рассмотрим консервативную систему [2,3]

$$\dot{x}=y, \quad \dot{y}=-g(x), \qquad (I7)$$

где g - непрерывная в некоторой окрестности точки x_0 функция, при $x<x_0$ $g<0$, а при $x>x_0$ $g>0$, если число $|x-x_0|$ при этом достаточно мало, $g(0)=0$. Уравнение с разделяющимися переменными x и y дает общий интеграл

$$W(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\int_0^x g(s)ds.$$

Если обозначить $\pi(x)=\int_0^x g(s)ds$, то при отображении окрестности точки $(x_0,0)$ по формуле $z=W(x,y)$ будем иметь $\pi: z = \pi(x), \psi: y=0, q_i(x,z)=\pm\sqrt{2z-2\pi(x)}$. Из формулы (I6) с учетом нечетности функции $N=y$ получаем формулу

$$T_c=\sqrt{2}\int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt{c-\pi(x)}}. \qquad (18)$$

6. Рассмотрим систему (I) при $\lambda\neq 0$ и

$$F=\prod_{k=1}^{m}(z-c_k)G(y),$$

где $z=W(x,y)$, c_k – числа, удовлетворяющие неравенствам $0<c_1<\dots<c_m$, G – нечетная функция, $yG(y)>0$ при $y\neq 0$, $G(0)=0$; точка $(x_0,y_0)=(0,0)$ – состояние равновесия системы. При отображении $z=W(x,y)$ системы (4) принимают вид

$$\dot{x}=N[x,q_i(x,z)],\quad \dot{z}=\prod_{k=1}^{m}(z-c_k)G[q_i(x,z)\cdot N(q_i(x,z)]. \qquad (19)$$

При некотором h решениям $z=c_k$ при всех $c_k<h$ соответствуют предельные циклы системы (I); уравнения этих циклов суть $W(x,y)=c_k$. Периоды колебаний, которые им соответствуют, вычисляются по формуле (I6) при $c=c_k$. Если при этом для соответствующей системы при λ точка $(0,0)$ является изохронным центром, то все периоды совпадают.

7. Пусть в неавтономной системе

$$\dot{x}=N(x,y),\quad \dot{y}=-M(x,y)+\lambda\cdot f(t)F(x,y) \qquad (20)$$

функции M, N и F – те же, что и в пункте 6, $f(t)\neq 0$ – непрерывная функция, определенная в $(-\infty,\infty)$. При отображении $z=W(x,y)$ система принимает вид

$$\dot{x}=N[x,q_i(x,z)],\quad \dot{z}=\lambda f(t)\prod_{k=1}^{m}(z-c_k)\cdot G_1[q_i(x,z)]. \qquad (21)$$

Решениям $z=c_k$, не зависящим от t, соответствуют интегральные циклы $W(x,y)=c_k$ в плоскости (xy); соответствующие периоды вычисляются по формуле (I6) при $c=c_k$. Эти периоды могут не совпадать с периодом функции $f(t)$ (если она периодическая). Интересно отметить, что на цилиндрах, построенных на названных здесь циклах как на направляющих линиях с образующими, параллельными оси t, неавтономная система ведет себя как автономная: интегральные кривые, лежащие на них, получаются из других интегральных кривых параллельным сдвигом вдоль оси t.

В заключение следует сказать, что в случаях, когда интегральные циклы системы (I) выражаются в виде уравнений (7) приближенно, можно проводить приближенные расчеты периода по формуле (I4).

Литература

I. Андронов А.А., Витт А.А. К теории захватывания Ван дер Поля. - в кн.: А.А.Андронов. Собрание трудов. М.: Изд.АН СССР, 1956.

2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний.- М.: Физматгиз, 1959.

3. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики.- М.: Наука, 1969, с.24.

4. Богданов Ю.С. О множестве периодов семейства циклов.- В ж.: Изв.АН БССР, Минск, серия физ.-техн.наук, 1961, № 2.

5. Тезин А.М. Нетопологическое отображение фазовой плоскости в качественной теории дифференциальных уравнений первого порядка.- В ж.: Дифференциальные уравнения. Минск, 8, № 3, 1972.

6. Садовников К.Г., Тезин А.М. Предельные циклы около пересекающихся замкнутых линий контактов. - В кн.: Функциональный анализ и дифференциальные уравнения, Куйбышев: КГПИ, 1978.

7. Тезин А.М. О центрофокусах дифференциальных уравнений.- В кн.: Приближенные методы исследования дифференциальных уравнений и их приложения. Куйбышев: КГУ, 1982.

8. Тезин А.М. Применение опорной производной в качественном исследовании дифференциальных уравнений первого порядка.- Ученые записки Барнаульского пединститута, т.9, матем. и физика, 1968.

9. Тезин А.М. Аналоги некоторых теорем из математического анализа разрывных функций.- В кн.: Функциональный анализ и дифференциальные уравнения. Куйбышев: КГПИ, 1978.

10. Лукашевич Н.А. Изохронность центра некоторых систем дифференциальных уравнений. - В ж.: Дифференциальные уравнения, Минск, 1965, I, № 3.

II. Кочеткова З.М. Об изохронности одной системы дифференциальных уравнений. - В ж.: Дифференциальные уравнения, Минск, 1971, 7, № 2.

Л.М.Фридман

МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ РАЗРЫВНЫХ СИСТЕМ

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\mu \frac{dz}{dt} = f(z,y,u(z)), \quad \frac{dy}{dt} = g(z,y,u(z)), \tag{1}$$

где $z \in R^m$; $y \in R^n$; μ - малый параметр, а функция $u(z)$ имеет разрыв 1-го рода на поверхности $S: S(z)=0$, причем $u(z)=\operatorname{sgn} S(z)$.

При исследовании поведения решений сингулярно возмущенных систем с гладкими правыми частями рассматривают два основных случая. Когда система "быстрых движений" имеет асимптотически устойчивое положение равновесия, поведение решений системы описывается теоремой А.Н. Тихонова [1] . Для случая, когда уравнения быстрых движений имеют орбитально асимптотически устойчивое периодическое решение, Л.С. Понтрягиным и Л.З. Родыгиным [2] разработан специальный вариант метода усреднения. Аналог теоремы А.Н. Тихонова в случае, когда разрывны уравнения медленных движений, доказан в монографии В.И. Уткина [3] .

В настоящей работе рассматривается решение задачи Коши для системы (1) с начальными условиями

$$z(0,\mu) = z^0; \quad y(0,\mu) = y^0. \tag{2}$$

Показано, что для анализа поведения решений задачи (1),(2) применима процедура усреднения Понтрягина-Родыгина.

2. Формулировка основного утверждения. Предположим, что выполняются следующие условия.

I. Функции $f, g \in C^2[\bar G]$, где $\bar G$ замкнутая область $(\bar G \subset R^m \times R^n \times R)$.

II. Поверхность S является поверхностью без контакта системы

$$\frac{d\tilde z}{d\tau} = f(\tilde z, y, u(\tilde z)) \qquad (y \text{ - параметр}) \ . \tag{3}$$