12. Фролов И.С. Обратимость некоторых разностных и дифференциально-разностных операторов. - Кандидатская диссертация. Воронеж, 1982.

Ю.А. Смирницкий

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ КОЭРЦИТИВНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ В РАВНОМЕРНЫХ МЕТРИКАХ

Известно, что коэрцитивный подход к исследованию разностных уравнений позволяет не только устанавливать их разрешимость, но и получать двусторонние оценки погрешности решения. В наиболее интересных для приложений C нормах коэрцитивные оценки для разностных эллиптических и параболических уравнений не имеют места, так как они не имеют места в дифференциальном случае. В [1] установлено, что для эллиптических разностных уравнений второго порядка и второго порядка аппроксимации без смешанных производных справедливы почти коэрцитивные оценки в равномерной метрике, отличающиеся от коэрцитивных оценок логарифмически растущим множителем при стремлении к нулю шага сетки. В [2] разработан метод, позволяющий получать почти коэрцитивные оценки в C норме для разностных параболических уравнений при помощи оценок фундаментального решения соответствующего уравнения. Однако эти оценки устанавливаются в предположении жесткой связи между шагами сетки по временной и пространственной переменным. Предлагаемый в настоящей работе метод позволяет получать почти коэрцитивные оценки в C норме для многомерных разностных эллиптических и параболических уравнений произвольного порядка аппроксимации без ограничений на соотношения между шагами сетки по разным направлениям.

1. Абстрактные уравнения

Рассмотрим уравнение

$$A_1 u + \dots + A_n u = f \tag{1}$$

в банаховом пространстве E с линейными операторами $A_1, \dots, A_n$. Это уравнение называется коэрцитивно разрешимым в пространстве E, если пересечение областей определения операторов $A_k\ (k=1,\dots,n)$

плотно в E, для любой правой части $f \in E$, существует единственное решение уравнения (I) и справедливо неравенство коэрцитивности

$$\|A_1 u\|_E + \ldots + \|A_n u\|_E \leq M \|f\|_E, \tag{2}$$

причем M не зависит от f. Если операторы A_K ограничены, и уравнение (I) однозначно разрешимо, то оно и коэрцитивно разрешимо. Однако величина M в правой части неравенства коэрцитивности будет зависеть от норм операторов A_K. Если рассмотреть наборы операторов $\{A_K\}_\ell (\ell = 1, 2, \ldots)$ с возрастающими нормами (именно такая ситуация имеет место при исследовании разностных уравнений), то величина M может тоже возрастать. Покажем, что имеют место почти коэрцитивные неравенства, то есть величина M возрастает как логарифм от норм операторов A_K.

Вывод почти коэрцитивных оценок основывается на оценках позитивности разностных операторов. Понятие позитивности оператора использовалось ранее в теории дифференциальных уравнений в частных производных (см. [3] и имеющуюся там библиографию). Следуя [4], линейный оператор A, действующий в банаховом пространстве E, с плотной в E областью определения называется позитивным, если его спектр $\sigma(A)$ находится внутри симметричного относительно положительной полуоси угла раствора $2\varphi < 2\pi$ с центром в начале координат, а на сторонах угла и вне его для резольвенты $(\lambda - A)^{-1}$ оператора A справедлива оценка

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{E \to E} \leq M(\varphi)(|\lambda| + 1)^{-1}. \tag{2}$$

Нижняя грань таких углов φ, при которых справедлива оценка (3), называется спектральным углом оператора A.

Л е м м а I (см. [5]). Пусть A_1 и A_2 позитивные коммутирующие операторы со спектральными углами φ_1 и φ_2, действующие в банаховом пространстве E. Пусть $\varphi_1 + \varphi_2 < \pi$. Тогда существует оператор $(A_1 + A_2)^{-1}$ и справедлива формула

$$(A_1 + A_2)^{-1} = (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma (z - A_2)^{-1} (z + A_1)^{-1} dz. \tag{4}$$

В качестве контура интегрирования Γ здесь можно взять контур, состоящий из двух лучей

$$z_+ = \rho exp\{i\psi_0\}, \; z_- = \rho exp\{-i\psi_0\}, \; (\rho > 0;$$

$$max\{\varphi_1, \varphi_2\} < \psi_0 < \pi - min\{\varphi_1, \varphi_2\}).$$

Лемма I допускает следующее обобщение:

Л е м м а 2. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ позитивные коммутирующие операторы со спектральными углами $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ и $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \ldots \leq \varphi_n$. Пусть $\varphi_{n-1} + \varphi_n < \pi$. Тогда существует оператор $(A_1 + \ldots + A_n)^{-1}$ и справедлива формула

$$(A_1 + \ldots + A_n)^{-1} = (2\pi i)^{1-n} \int_{\Gamma_j} (z_j - A_j)^{-1} \int_{\Gamma_n} (z_n - z_j/2 - A_n)^{-1} \cdot$$
$$\cdot \int_{\Gamma_{n-1}} (z_{n-1} - z_n/2 - z_j/4 - A_{n-1})^{-1} \ldots \int_{\Gamma_{j+1}} (z_{j+1} - z_{j+2}/2 - \ldots - z_j/2^{n-j} - \quad (5)$$
$$- A_{j+1})^{-1} \int_{\Gamma_{j-1}} (z_{j-1} - z_{j+1}/2 - \ldots - z_j/2^{n-j+1} - A_{j-1})^{-1} \ldots \int_{\Gamma_2} (z_2 -$$
$$- z_3/2 - \ldots - z_j/2^{n-2} - A_2)^{-1} (z_2 + z_3/2 + \ldots + z_j/2^{n-2} + A_1)^{-1} dz_2 \ldots$$
$$\ldots dz_{j-1}\, dz_{j+1} \ldots dz_n\, dz_j .$$

Здесь $\Gamma_n = \Gamma_n(z_j), \ldots, \Gamma_2 = \Gamma_2(z_j, z_n, \ldots, z_3)$. Если $\varphi_n < \pi/2$, то Γ_j, $\Gamma_n, \ldots, \Gamma_2$ – прямые, проходящие через начало координат, не попадающие в сектор комплексной плоскости $|\arg z| \leq \varphi_n$ и обладающие следующим свойством:

а) точка $\{-z_j/2\}$ лежит в левой полуплоскости относительно прямой Γ_n, точка $\{-z_n/2 - z_j/4\}$ лежит в левой полуплоскости относительно прямой $\Gamma_{n-1}, \ldots$, точка $\{-z_3/2 - \ldots - z_j/2^{n-2}\}$ лежит в левой полуплоскости относительно прямой Γ_2.

Если $\varphi_n \geq \pi/2$ и $j = n$, то Γ_n состоит из двух лучей

$$z_+ = \rho \exp\{i\psi_n\}, \quad z_- = \rho \exp\{-i\psi_n\}, \quad (\rho > 0;\ \varphi_n < \psi_n < \pi - \varphi_{n-1}).$$

Остальные контуры – прямые, проходящие через начало координат, не попадающие в сектор $|\arg z| \leq \varphi_{n-1}$ и обладающие свойством а).

Если $\varphi_n \geq \pi/2$ и $j \neq n$, то Γ_j состоит из двух лучей

$$z_{j+} = \rho \exp\{i\psi_j\}, \quad z_{j-} = \rho \exp\{-i\psi_j\}, \quad (\rho > 0;\ \varphi_{n-1} < \psi_j < \pi - \varphi_n);$$

Γ_n тоже состоит из двух лучей

$$z_{n+} = \rho \exp\{i\psi_n\}, \quad z_{n-} = \rho \exp\{-i\psi_n\}, \quad (\rho > 0;\ \varphi_n < \psi_n < \pi - \psi_j).$$

Остальные контуры – прямые, определенные в случае $j = n$.

Такой выбор контуров обеспечивает эквивалентность модулей сложных комплексных чисел, входящих под знаки интегралов в правой части формулы (5), и суммы модулей слагаемых их составляющих.

Следующая теорема позволяет определить характер зависимости величины M в правой части неравенства коэрцитивности для уравнения (I) от норм операторов A_k $(k=1,\dots,n)$ в случае, когда A_k являются ограниченными позитивными и коммутирующими между собой операторами.

Т е о р е м а I. Пусть $A_1,\dots,A_n$ – линейные ограниченные позитивные коммутирующие операторы со спектральными углами $\varphi_1,\dots,\varphi_n$, соответственно. Пусть $\varphi_1\le\varphi_2\le\dots\le\varphi_n$ и $\varphi_{n-1}+\varphi_n<\pi$. Пусть $\|A_{k_0}\|=max_{1\le k\le n}\{\|A_k\|\}$ и $min_{1\le k\le n}\{\|A_k\|\}>1$. Тогда уравнение (I) коэрцитивно разрешимо в пространстве E, и в неравенстве (2)

$$M=\tilde{M}\sum_{k\ne k_0}\ln\|A_k\|.$$

Здесь $\tilde{M}$ уже не зависит ни от f, ни от $\|A_k\|$.

Доказательство. Сначала докажем лемму в случае, когда $n=2$. Пусть $\|A_1\|\ge\|A_2\|$. Воспользовавшись формулой (4) и тем, что A_2 – ограниченный оператор, получим

$$A_2u=A_2(A_1+A_2)^{-1}f=(2\pi i)^{-1}\int_\Gamma A_2(z-A_2)^{-1}(z+A_2)^{-1}f\,dz. \tag{6}$$

Рассмотрим функцию $\omega(z)=\|A_2(z-A_2)^{-1}(z+A_1)^{-1}\|$ при $z\in\Gamma$. A_1 и A_2 – позитивные операторы, векторы z не попадают на спектры операторов A_2 и $-A_1$. Поэтому, в силу оценки (3), получим

$$\omega(z)\le C_1\|A_2\|(1+|z|)^{-2}. \tag{7}$$

С другой стороны, $A_2(z-A_2)^{-1}=z(z-A_2)^{-1}-I$. Поэтому, в силу той же оценки (3), получим

$$\omega(z)\le\|A_2(z-A_2)^{-1}\|\|(z+A_1)^{-1}\|\le C_2(1+|z|)^{-1}. \tag{8}$$

Так как контур Γ есть объединение двух лучей, то

$$\|A_2u\|\le(2\pi)^{-1}\int_0^\infty(\omega(\rho exp\{i\varphi_0\})+\omega(\rho exp\{-i\varphi_0\}))d\rho\|f\|.$$

На участке от 0 до $\|A_2\|-1$ лучшей из оценок (7) и (8) является оценка (8), а на участке от $\|A_2\|-1$ до ∞ – оценка (7). Поэтому, разбив промежуток интегрирования на два участка точкой $\|A_2\|-1$, получим

$$\|A_2u\|\le\tilde{C}\left(\int_0^{\|A_2\|-1}(1+\rho)^{-1}d\rho+\int^\infty\|A_2\|-1(1+\rho)^{-2}d\rho\right)\|f\|\le$$

$$\leqslant \tilde{C}(\ln\|A_2\|+1)\|f\| < \tilde{M}_2 \ln\|A_2\|\,\|f\|.$$

Из уравнения (I) следует, что

$$\|A_1 u\| \leqslant \|f\| + \|A_2 u\| \leqslant (1+\tilde{M}\ln\|A_2\|)\|f\|.$$

Поэтому

$$\|A_1 u\| + \|A_2 u\| \leqslant (1+2\tilde{M}_2\ln\|A_2\|)\|f\| \leqslant \tilde{M}\ln\|A_2\|\,\|f\|.$$

Если $\|A_1\| \leqslant \|A_2\|$, то вместо оценки нормы функции $A_2 u$, нужно провести оценку нормы функции $A_1 u$. Для $n=2$ лемма доказана.

В случае $n>2$ доказательство леммы основано на использовании формулы (5) и несколько отличается от доказательства в случае $n=2$. Проиллюстрируем его на примере случая $n=3$.

Положим в формуле (5) $j=3$. Тогда

$$u=(A_1+A_2+A_3)^{-1}f=(2\pi i)^{-2}\int_{\Gamma_3}(z_3-A_3)^{-1}\int_{\Gamma_3(z_3)}\left(z_2-\frac{z_3}{2}-A_2\right)^{-1}\left(z_2+\frac{z_3}{2}+A_1\right)^{-1}dz_2\,dz_3\,f.$$

Так как A_3 – ограниченный оператор, то

$$A_3 u=(2\pi i)^{-2}\int_{\Gamma_3}A_3(z_3-A_3)^{-1}\int_{\Gamma_2(z_3)}\left(z_2-\frac{z_3}{2}-A_2\right)^{-1}\left(z_2+\frac{z_3}{2}+A_1\right)^{-1}dz_2\,dz_3\,f.$$

Рассмотрим интеграл по переменной z_2. Контур $\Gamma_2(z_3)$ выбран так, что

$$\left|z_2-{}^{z_3}/_2\right| \geqslant C_-(|z_2|+|z_3|),\quad \left|z_2+{}^{z_3}/_2\right| \geqslant C_+(|z_2|+|z_3|).$$

Поэтому для любого $z_3\in\Gamma_3$ получим

$$\|A_3 u\| \leqslant C\int_{\Gamma_3}\|A_3(z_3-A_3)^{-1}\|\int_{\Gamma_2(z_3)}(1+|z_2|+|z_3|)^{-2}d|z_2|\,dz_3\,\|f\| \leqslant$$

$$\leqslant 2C\int_{\Gamma_3}\|A_3(z_3-A_3)^{-1}\|\int_0^\infty(1+\rho+|z_3|)^{-2}d\rho\,dz_3\,\|f\| \leqslant \tilde{C}\int_{\Gamma_3}\|A_3(z_3-$$

$$-A_3)^{-1}\|(1+|z_3|)^{-1}dz_3\,\|f\|.$$

Рассмотрев функцию $\theta(z)=\|A_3(z-A_3)^{-1}\|$, и проводя дальнейшее доказательство аналогично случаю $n=2$, получим

$$\|A_3 u\| \leqslant \tilde{M}_3\ln\|A_3\|\cdot\|f\|.$$

Так как в формуле (5) индекс j может принимать любое значение от I до 3, то последнее неравенство означает, что

$$\|A_j u\| \leqslant \tilde{M}_j \ln \|A_j\| \|f\|, \quad j=1,2,3 \tag{9}$$

Пусть, например, $\|A_1\| = max_{1\leqslant k\leqslant 3}\{\|A_k\|\}$. Тогда норму $\|A_1 u\|$ оценим другим способом. Воспользовавшись оценками (9) и тем, что u является решением уравнения (I), получим

$$\|A_1 u\| \leqslant \|f\| + \|A_2 u\| + \|A_3 u\| \leqslant (1+\tilde{M}_2 \ln \|A_2\| + \tilde{M}_3 \ln \|A_3\|)\|f\| .$$

Следовательно

$$\|A_1 u\| + \|A_2 u\| + \|A_3 u\| \leqslant (1+2\tilde{M}_2 \ln \|A_2\| + 2\tilde{M}_3 \ln \|A_3\|)\|f\| \leqslant$$

$$\leqslant \tilde{M}(\ln \|A_2\| + \ln \|A_3\|)\|f\| .$$

Что и требовалось доказать.

П. Разностные уравнения

Определим сеточное пространство $R_{\bar{h}n}$ как совокупность точек евклидова пространства R_n, координаты которых определяются равенствами

$$X_k = j_k h_k, \quad (j_k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots ; \ 0 < h_k < H; \ k=1,\dots,n).$$

Числа h_k будем называть шагами сеточного пространства. Функцию, заданную на $R_{\bar{h}n}$, будем называть сеточной функцией. Рассмотрим множество $C_{\bar{h}}$, состоящее из определенных на $R_{\bar{h}n}$ и ограниченных сеточных функций. Введем норму $\|f\|_{C_{\bar{h}}} = sup_{x\in R_{\bar{h}n}} |f(x)|$, обращающую это множество в банахово пространство $C_{\bar{h}}$.

Рассмотрим элементарные разностные операторы $\Delta_{k\pm}$, определенные формулами

$$\Delta_{k\pm} f(x) = \pm(f(x \pm e_k h_k) - f(x)), \quad x \in R_{\bar{h}n} .$$

Здесь e_k – единичный орт оси X_k.

Рассмотрим одномерный разностный оператор

$$A_{h_k} = h_k^{-\ell_k} \sum_{\ell_k \leqslant |\tau_k| \leqslant N} b_{\tau_k} \Delta_{k+}^{\tau_k^+} \Delta_{k-}^{\tau_k^-} . \tag{10}$$

Здесь $\tau_k = (\tau_k^+, \tau_k^-)$ – двумерные векторы с целыми неотрицательными координатами, $|\tau_k| = \tau_k^+ + \tau_k^-$, b_{τ_k} – постоянные коэффициенты.

Векторы τ_k и числа B_{τ_k} можно выбрать так, что оператор A_{h_k} будет аппроксимировать оператор $(\partial/\partial x_k)^{\ell_k}$ с любым наперед заданным порядком.

Символом оператора A_{h_k} назовем функцию $A_{h_k}(\xi_k h_k)$, которая получается заменой операторов $\Delta_{k\pm}$ в правой части равенства (10) на выражения $\pm(exp\{\pm i\xi_k h_k\}-1)$.

Лемма 3 (см. [6]). Пусть при $0<|\xi_k h_k|\leqslant\pi$.

$|A_{h_k}(\xi_k h_k)|\geqslant C_k|\xi_k|^{\ell_k}$ и $|arg\, A_{h_k}(\xi_k h_k)|\leqslant\varphi_k<\pi$.

Тогда оператор $A_{h_k}+\varepsilon$ позитивен в пространстве $C_{\bar h}$ при $\varepsilon>0$ и его спектральный угол $\varphi(A_{h_k})\leqslant\varphi_k$.

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{k=1}^{n} a_k A_{h_k} u(x)=f(x),\ x\in R_{\bar h n}. \tag{II}$$

Прямым следствием теоремы I является следующая теорема о почти коэрцитивной разрешимости разностных уравнений:

Теорема 2. Пусть выполнены условия леммы 3. Пусть

$$max_{1\leqslant k,j\leqslant n,\,k\neq j}(\varphi(a_k A_{h_k})+\varphi(a_j A_{h_j}))<\pi.$$

Пусть $0<h_1\leqslant h_2...\leqslant h_n\leqslant H$ и H настолько мало, что $min_{1\leqslant k\leqslant n}\{\|A_{h_k}\|\}>1$. Тогда уравнение (II) коэрцитивно разрешимо в пространстве $C_{\bar h}$ и справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}\|A_{h_k}u\|_{C_{\bar h}}\leqslant\tilde M\sum_{k=2}^{n}|ln\, h_k|\cdot\|f\|_{C_{\bar h}}.$$

Здесь $\tilde M$ не зависит ни от f, ни от $\bar h$.

Для доказательства достаточно воспользоваться соотношением

$$\|A_{h_k}\|_{C_{\bar h}\to C_{\bar h}}\sim h_k^{-\ell_k}.$$

Замечание I. Спектральный угол оператора $(\partial/\partial x_k)^{2s+1}$ равен $\pi/2$. Из условия аппроксимации следует, что спектральный угол разностного оператора не может быть меньше спектрального угла соответствующего дифференциального оператора. Поэтому необходимым условием почти коэрцитивной разрешимости разностных уравнений является наличие в них не более одного разностного оператора, аппроксимирующего производную нечетного порядка.

Замечание 2. С помощью метода "параметрикс" установленные результаты переносятся на уравнения с переменными "гельдеровыми" коэффициентами.

Замечание 3. Если шаги сетки по пространственным переменным одинаковы, то можно установить почти коэрцитивную разрешимость в C норме разностных уравнений, содержащих аппроксимации смешанных производных.

Литература

I. Соболевский П.Е. О корректной разрешимости в первой краевой задаче для разностных эллиптических уравнений в прямоугольных областях. – Новосибирск, 1976. 10с. (Препринт/ВЦ СО АН СССР).

2. Widlund O.B. Stability of parabolic difference schemes in the maximum norm.- Numer. Math.,1966, N8,p.186-202.

3. Красносельский М.А. и др. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функцией.- М.: Наука, 1966, 500 с.

4. Соболевский П.Е. О дробных степенях позитивных операторов.- Докл. АН СССР, 1966, т.166, № 6, с.1296–1299.

5. Grisvard P. Equations differentielles abstractes - Ann. Sient. Ecole norm. Super, 1969, v.2, N3, p.311-395.

6. Смирницкий Ю.А., Соболевский П.Е. Позитивность разностных операторов. – В кн.: Методы сплайн-функций. Вычислительные системы, 87. Новосибирск, 1981, с.120–133.

Е.П. Соболевский

ПРИНЦИП УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

I. В банаховом пространстве E рассматривается задача Коши

$$v'(t)+A(\omega t)v(t)=0 \quad (t\geqslant 0, \omega\geqslant 0), \quad v(0)=v_0. \qquad (I)$$

Здесь $A(t)\in C([0,+\infty), H_{om}[D,E])$, D – банахово пространство, плотно и непрерывно вложенное в E. Решением задачи (I) называется функция $v(t)\in C^1([0,+\infty),E)\cap C([0,+\infty),D)$, удовлетворяющая уравнению и начальному условию (I).

Предполагается, что для некоторого $A_*\in H_{om}[D,E]$ выполнено условие усреднения