С.В. Богатырев

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

В работе рассматривается ряд вопросов для системы уравнений, составленной из "обыкновенного" дифференциального уравнения и сингулярно-возмущенного "параболического" уравнения. В основном, это вопросы, связанные с исследованием интегрального многообразия (существование интегрального многообразия, устойчивость, принцип сведения, разложение по малому параметру). Обзор основных работ и сводку результатов по интегральным многообразиям можно найти в монографии [I].

Особенностью данной работы является то, что система уравнений рассматривается в банаховом пространстве и сингулярно-возмущенное уравнение является уравнением с неограниченным оператором. Источником основных результатов по эволюционным уравнениям с неограниченным оператором в банаховых пространствах может служить монография [2].

I. Теорема существования решения

Рассмотрим следующую систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,y,\mu),$$

$$\mu\frac{dy}{dt} = Ay+g(t,x,y,\mu). \qquad (I)$$

Здесь $x\in X$, $y\in Y$, где X и Y банаховы пространства с нормами соответственно $\|\cdot\|_X$ и $\|\cdot\|_Y$ (значки X и Y при обозначении норм будем, как правило, опускать), $\mu\in[0,\mu_0]$ является малым параметром, $A: Y\to Y$ – секториальный оператор со спектром, лежащим в левой полуплоскости. Тогда, как известно, этот оператор порождает аналитическую полугруппу $\{e^{At}\,|\,t\geqslant 0\}$, имеющую оценку

$$\|A^{\alpha}e^{At}\|\leqslant C_\alpha t^{-\alpha}e^{-\gamma t},\ t>0,\ \alpha>0,\ \gamma>0.$$

Начнем изучение системы (I) с доказательства теоремы существования решения начальной задачи. Поэтому сформулируем сначала тот минимум требований для функций f и g, при которых естественно доказывать локальную теорему существования.

Введем обозначение

$$U=\{y\in Y^{\alpha}\mid \|y\|_{\alpha}<\rho\},\ 0\leqslant\alpha<1.$$

Предположим, что при любом фиксированном $\mu\in[0,\mu_0]$ функции

$$(t,x,y)\mapsto f(t,x,y,\mu):\ R\times X\times U\to X,$$

$$(t,x,y)\mapsto g(t,x,y,\mu):\ R\times X\times U\to Y$$

удовлетворяют локальному условию Липшица, т.е. $\forall(t_0,x_0,y_0)\in R\times X\times U$ найдется такая окрестность $Q_0\subset R\times X\times U$ этой точки, что $\forall(t_K,x_K,y_K)\in Q_0$, $K=1,2$ будут иметь место неравенства

$$\|f(t_1,x_1,y_1,\mu)-f(t_2,x_2,y_2,\mu)\|\leqslant const(|t_1-t_2|+\|x_1-x_2\|+\|y_1-y_2\|_{\alpha}),$$

$$\|g(t_1,x_1,y_1,\mu)-g(t_2,x_2,y_2,\mu)\|\leqslant const(|t_1-t_2|+\|x_1-x_2\|+\|y_1-y_2\|_{\alpha}).$$

Значком „$const$" будем обозначать постоянные, для которых можно не вводить специальные обозначения. В данном случае выбор постоянной $const$ определяется точкой (t_0,x_0,y_0) и окрестностью Q_0.

Зададим теперь начальные условия

$$x(t_0)=x_0,\ y(t_0)=y_0,\quad (t_0,x_0,y_0)\in R\times X\times U. \tag{2}$$

Доказательство локальной теоремы существования решения задачи (I),(2) проводится в два этапа. Сначала доказывается, что задача (I),(2) эквивалентна решению следующей системы интегральных уравнений:

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,x(s),y(s),\mu)\,ds,$$

$$y(t)=e^{A\frac{t-t_0}{\mu}}y_0+\frac{1}{\mu}\int_{t_0}^{t}e^{A\frac{t-s}{\mu}}g(s,x(s),y(s),\mu)\,ds, \tag{3}$$

а затем с помощью принципа сжатия доказывается, что система (3) имеет единственное решение на достаточно маленьком временном отрезке. Но сначала дадим определение решений задачи (I),(2) и системы (3).

Определение I. Функция $t\mapsto(x(t),y(t)):(t_0,t_0+T)\to X\times Y$ называется решением задачи (I),(2) на отрезке (t_0,t_0+T), если выполняются следующие условия:

I. Эта функция непрерывна на отрезке $[t_0,t_0+T)$, непрерывно-дифференцируема на (t_0,t_0+T) и, кроме того, $y(t)\in D(A)\cap U$ для каждого $t\in(t_0,t_0+T)$.

2. Функция $t \mapsto g(t,x(t),y(t),\mu):(t_0,t_0+T)\to Y$ удовлетворяет локальному условию Гельдера, а функция $t\mapsto f(t,x(t), y(t),\mu):(t_0,t_0+T)\to X$ непрерывна и, кроме того, обе эти функции локально интегрируемы в точке t_0, т.е. для некоторой постоянной $\varepsilon_0>0$ интегралы

$$\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon_0}\|f(s,x(s),y(s),\mu)\|ds, \qquad \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon_0}\|g(s,x(s),y(s),\mu\|ds$$

сходятся;

3. Функция $t\mapsto(x(t),y(t)):(t_0,t_0+T)\to X\times Y$ удовлетворяет системе (I) и начальным условиям (2).

Определение 2. Функция $t\mapsto(x(t),y(t)):(t_0,t_0+T)\to X\times Y$ называется решением системы (3) на отрезке (t_0,t_0+T), если $y(t)\in U\subset Y^\alpha$ для каждого $t\in(t_0,t_0+T)$, функция $t\mapsto(x(t),y(t))$: $(t_0,t_0+T)\to X\times Y^\alpha$ непрерывна, отображения $t\mapsto f(t,x(t),y(t),\mu)$: $(t_0,t_0+T)\to X$, $t\mapsto g(t,x(t),y(t),\mu):(t_0,t_0+T)\to Y$ локально интегрируемы в точке t_0 и функция $t\mapsto(x(t),y(t)):(t_0,t_0+T)\to X\times Y$ удовлетворяет системе (3).

Для доказательства эквивалентности решений задачи (I),(2) и системы (3) надо воспользоваться известной теоремой о решении начальной задачи для линейного уравнения. Приведем эту теорему.

Теорема I. Пусть дана задача

$$\frac{dy}{dt}=Ay+G(t),\ y(t_0)=y_0,\ y_0\in Y, \tag{4}$$

где функция $t\mapsto G(t):(t_0,t_0+T)\to Y$ удовлетворяет локальному условию Гельдера на отрезке (t_0,t_0+T) и локально интегрируема в точке t_0. Тогда функция

$$y(t)=e^{A(t-t_0)}y_0+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-s)}G(s)ds$$

непрерывна на $[t_0,t_0+T)$, непрерывно-дифференцируема на (t_0,t_0+T), для каждого $t\in(t_0,t_0+T)$ значение этой функции является элементом множества $D(A)$ и, наконец, эта функция на (t_0,t_0+T) удовлетворяет уравнению и начальным условиям (4).

Из этой теоремы и данных определений очевидным образом следует, что каждое решение задачи (I),(2) является решением системы (3). Для доказательства обратного надо сначала показать, что решение системы (3) таково, что функция $t\mapsto y(t):(t_0,t_0+T)\to Y^\alpha$ удовлетворяет локальному условию Гельдера. Отсюда следует, что и функция $t \mapsto g(t,x(t),y(t),\mu):(t_0,t_0+T)\to Y$ удовлетворяет локальному условию Гельдера. Тогда из теоремы I будет следовать, что каждое решение системы (3) будет решением задачи (I),(2).

Теперь с помощью принципа сжатия легко доказывается следующая теорема о существовании решения задачи (I),(2).

Т е о р е м а 2. Если функции f и g в системе (I) удовлетворяют локальному условию Липшица, то $\forall (t_0,x_0,y_0)\in R\times X\times U$ существует такая постоянная $T=T(t_0,x_0,y_0)>0$, что задача (I),(2) имеет единственное решение на отрезке (t_0,t_0+T).

II. Продолжение решений

Рассмотрим вопрос о существовании решения задачи (I),(2) на полубесконечном промежутке. Построить такое решение можно с помощью продолжения локального решения, полученного в теореме 2. Если правый конец локального решения лежит в области, где определена система (I), то это решение, как показывает та же самая теорема 2, можно продолжить. Применяя такое построение до тех пор, пока это возможно, получим максимально продолженное решение. Для него имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а 3. Пусть функции f и g удовлетворяют локальному условию Липшица и пусть при фиксированном $\mu\in(0,\mu_0]$ отображение

$$(t,x,y)\mapsto (f(t,x,y,\mu),g(t,x,y,\mu)):R\times X\times U\to X\times Y$$

ограничено. Если функция $t\mapsto (x(t),y(t)):(t_0,t_1)\to X\times Y$ является максимально продолженным решением задачи (I),(2), то или $t_1=\infty$, или существует последовательность $t_n\to t_1$ – такая, что последовательность $\{(t_n,x(t_n),y(t_n))\}$ сходится к некоторой точке, лежащей на границе области $R\times X\times U$.

Эта теорема носит общий характер. Она показывает, что решение задачи (I),(2) можно продолжать до тех пор, пока оно не выйдет на границу области, в которой определена система (I). В нашем случае можно, налагая некоторые ограничения на рост функций f и g и пользуясь теоремой 3, получить решение задачи (I), (2) на полубесконечном промежутке.

Будем предполагать далее, что для всех $(t,x,y,\mu)\in R\times X\times U\times(0,\mu_0]$ имеют место следующие оценки:

$$\|f(t,x,y,\mu\|\leqslant B,$$
$$\|g(t,x,y,\mu)\|\leqslant B(\mu+\|y\|^2_\alpha. \qquad (5)$$

Тогда можно доказать следующую теорему.

Т е о р е м а 4. Пусть функции f и g удовлетворяют локальному условию Липшица и для них имеют место оценки (5). Тогда для любого $d_1 > 0$ существуют $\tilde{\mu} > 0$ и $d_2 > 0$ такие, что если $\|y_0\|_\alpha < \mu d_1$, где $\mu \in (0, \tilde{\mu}]$, то максимально продолженное решение задачи (I),(2) определено на полубесконечном промежутке (t_0, ∞) и для всех $t \in (t_0, \infty)$ имеет место оценка $\|y(t)\|_\alpha < \mu d_2$.

Для доказательства этой теоремы понадобятся некоторые сведения о функциях Миттаг-Леффлера $E_\rho(z, \mu)$, (3). Эта функция определяется степенным рядом

$$E_\rho(z, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k/\rho)}, \ \rho > 0, \ \mu \in C,$$

а значение ее определяется тем, что справедлива следующая лемма.

Л е м м а. Пусть функция $f(t)$ принадлежит классу $L_1(0, \ell)$. Тогда интегральное уравнение

$$u(t) = f(t) + \frac{\lambda}{\Gamma(\rho^{-1})} \int_0^t (t-s)^{\frac{1}{\rho}-1} u(s)\, ds,$$

где $\rho > 0, \lambda \in C$ имеет единственное решение

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_0^t (t-s)^{\frac{1}{\rho}-1} E_\rho(\lambda (t-s)^{\frac{1}{\rho}}, \tfrac{1}{\rho}) f(s)\, ds,$$

принадлежащее классу $L_1(0, \ell)$.

Кроме того, нам понадобятся интегральное соотношение

$$\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_\rho(\lambda s^{\frac{1}{\rho}}, \mu) s^{\mu-1} ds = t^{\mu+\alpha-1} E_\rho(\lambda t^{\frac{1}{\rho}}, \mu+\alpha),$$

справедливое во всяком случае для $\mu > 0, \alpha > 0$, и следующая оценка $|E_\rho(z, \mu)| \leqslant M z^{\rho(1-\mu)} e^{z^\rho}$, имеющая место для $z > 0$, $\mu > 0$, $\rho > 1/2$.

Перейдем к доказательству теоремы 4. Пусть $x(t) = x(t, \mu)$, $y(t) = y(t, \mu)$ - решение задачи (I),(2), определенное на отрезке (t_0, ∞). Тогда для всех $t \geqslant t_0$ эти функции являются решением системы уравнений (3). Отсюда получим для всех $t \geqslant t_0$ неравенства

$$\|x(t)\| \leqslant \|x_0\| + B(t - t_0),$$

$$\|y(t)\|_\alpha \leqslant C_0 e^{-\gamma \frac{t-t_0}{\mu}} \|y_0\|_\alpha + \frac{1}{\mu} C_\alpha \int_{t_0}^t \left(\frac{t-s}{\mu}\right)^{-\alpha} e^{-\gamma \frac{t-s}{\mu}} B(\mu + \|y(s)\|_\alpha^2) ds.$$

Предположим теперь, что для всех $t \geqslant t_0$ имеет место оценка $\|y(t)\|_\alpha \leqslant \eta$.

Обозначая $u(t)=e^{\gamma\frac{t-t_0}{\mu}}\|y(t)\|_\alpha$, $\lambda=C_\alpha B\Gamma(1-\alpha)$ будем иметь для всех $t \geqslant t_0$

$$u(t)\leqslant C_0\|y_0\|_\alpha+\mu\lambda\left(\frac{t-t_0}{\mu}\right)^{1-\alpha}E_1\left(\gamma\frac{t-t_0}{\mu},2-\alpha\right)+\frac{1}{\mu}\frac{\lambda\eta}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{t_0}^{t}\left(\frac{t-s}{\mu}\right)^{-\alpha}u(s)ds.$$

Применяя теорему об интегральных неравенствах и лемму, получим оценку

$$\|y(t)\|_\alpha\leqslant C_0(1+2M)\|y_0\|_\alpha+\mu(\lambda M\gamma^{\alpha-1})+\mu(\lambda\eta)^{\frac{1}{1-\alpha}}M\lambda\gamma^{\alpha-1}\frac{1}{\gamma-(\lambda\eta)^{1/1-\alpha}}$$

при условии, что $\gamma>(\lambda\eta)^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

Из этого неравенства следует, что если $\eta<\gamma^{1-\alpha}/C_\alpha B\Gamma(1-\alpha)$, μ достаточно мало и $\|y_0\|_\alpha$ достаточно мало, то для всех $t \geqslant t_0$ будет иметь место оценка $\|y(t)\|_\alpha<\eta$. Отсюда, из предыдущего неравенства и из неравенства для $\|x(t)\|$ следует утверждение теоремы 4.

Ш. Теорема существования интегрального многообразия

Теперь можно переходить к доказательству существования интегрального многообразия для системы (I). Для этого надо усилить предположения о функциях f и g. Далее будем предполагать, что имеют место неравенства

$$\|f(t,x_1,y_1,\mu)-f(t,x_2,y_2,\mu)\|\leqslant B(\|x_1-x_2\|+\|y_1-y_2\|_\alpha),$$

$$\|g(t,x_1,y_1,\mu)-g(t,x_2,y_2,\mu)\|\leqslant B(\mu+\|\bar{y}\|_\alpha)(\|x_1-$$
$$-x_2\|+\|y_1-y_2\|_\alpha), \qquad (6)$$

где $(t,x_k,y_k,\mu)\in R\times X\times U\times(0,\mu_0]$, $k=1,2$; $\mu\in(0,\mu_0]$ и $\|\bar{y}\|_\alpha=\max\{\|y_1\|_\alpha,\|y_2\|_\alpha\}$

Интегральное многообразие для системы дифференциальных уравнений обычно определяют как некоторое множество, состоящее из интегральных кривых данной системы и в силу этого обладающее свойством инвариантности. Для нашего случая это определение можно конкретизировать.

Определение 3. Множество

$$S=\{(t,x,y,\mu)\in R\times X\times U\times(0,\mu_0)\,|\,y=H(t,x,\mu)\}$$

называется интегральным многообразием системы (I), если для любой точки $(t_0,x_0,y_0,\mu)\in S$ существует единственное решение системы (I), проходящее через эту точку, определенное для всех $t\in R$ и для всех $t\in R$ лежащее во множестве S. Кроме того, будем считать, что для каждого $\mu\in(0,\mu_0]$ функция $(t,x)\mapsto H(t,x,\mu)$: $: R\times X\to Y^{\alpha}$ удовлетворяет локальному условию Липшица по $x\in X$ и локальному условию Гельдера по $t\in R$.

Прежде всего получим функциональное уравнение для интегрального многообразия. Предположим, что система (I) имеет интегральное многообразие в смысле определения 3. Тогда для любой точки $(\tau,\xi,\eta,\mu)\in S$ существует единственное решение $x(t)=x(t,\tau,\xi,\eta,\mu)$, $y(t)=y(t,\tau,\xi,\eta,\mu)$ системы (I), проходящее через точку (τ,ξ,η,μ), определенное для всех $t\in R$ и для всех $t\in R$ лежащее в S, т.е. выполняется

$$y(t,\tau,\xi,\eta,\mu)=H(t,x(t,\tau,\xi,\eta,\mu),\mu),\quad -\infty<t<\infty,$$

$$x(t,\tau,\xi,\eta,\mu)\Big|_{t=\tau}=\xi,\quad y(t,\tau,\xi,\eta,\mu)\Big|_{t=\tau}=\eta.$$

Так что $x(t)=x(t,\tau,\xi,\eta,\mu)$ – есть решение задачи

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x,H(t,x,\mu),\mu),\quad x(\tau)=\xi. \tag{7}$$

С другой стороны, в силу сделанных предположений эта задача имеет единственное решение $\varphi(t,\tau,\xi,\mu/H)$, определенное для всех $t\in R$ и потому имеет место равенство

$$x(t,\tau,\xi,\eta,\mu)=\varphi(t,\tau,\xi,\mu/H),\quad -\infty<t<\infty.$$

Возьмем $t_0<\tau$, $x_0=\varphi(t_0,\tau,\xi,\mu/H)$, $y_0=H(t_0,x_0,\mu)$.

Тогда решение системы (1) $x(t,t_0,x_0,y_0,\mu)$, $y(t,t_0,x_0,y_0,\mu)$, проходящее через точку (t_0,x_0,y_0,μ), лежит на интегральном многообразии S. Очевидно, имеем

$$x(t,t_0,x_0,y_0,\mu)=x(t,\tau,\xi,\eta,\mu)=\varphi(t,\tau,\xi,\mu|H)$$

и функция $y(t,t_0,x_0,y_0,\mu)=H(t,\varphi(t,\tau,\xi,\mu|H),\mu)$ является решением задачи

$$\mu\frac{dy}{dt}=Ay+g(t,\varphi(t,\tau,\xi,\mu|H),\ H(t,\varphi(t,\tau,\xi,\mu|H),\mu),\mu),$$

$$y\Big|_{t=t_0}=H(t_0,x_0,\mu).$$

Применяя теорему I, получим

$$y(t,t_0,x_0,y_0,\mu)=e^{A\frac{t-t_0}{\mu}}H(t_0,x_0,\mu)+$$
$$\frac{1}{\mu}\int_{t_0}^{t}e^{A\frac{t-s}{\mu}}g(s,\varphi(s,\tau,\xi,\mu|H),\ H(s,\varphi(s,\tau,\xi,\mu|H),\mu),\mu)ds.$$

Полагая здесь $t=\tau$ и переходя к пределу при $t_0\to-\infty$, получим равенство

$$H(\tau,\xi,\mu)=\frac{1}{\mu}\int_{-\infty}^{\tau}e^{A\frac{\tau-s}{\mu}}g(s,\varphi(s,\tau,\xi,\mu|H),H(s,\varphi(s,\tau,\xi,\mu|H),\mu),\mu)ds. \quad (8)$$

Это и есть функциональное уравнение, которому удовлетворяет интегральное многообразие. Итак, интегральное многообразие $y=H(t,x,\mu)$ системы (I) является решением уравнения (8), где $\varphi(t,\tau,\xi,\mu|H)$ и есть решение задачи (7).

Важно теперь доказать обратное, т.е. что каждое решение уравнения (8) является интегральным многообразием системы (I). Введем для этого класс функций $C(d,\Delta)$, в который входят функции $y=H(t,x,\mu)$, определенные на $R\times X\times(0,\mu_0]$, принимающие значения в пространстве Y^α, непрерывные по $(t,x)\in$ и удовлетворяющие неравенствам

$$\|H(t,x,\mu)\|_\alpha\leqslant\mu d,$$

$$\|H(t,x_1,\mu)-H(t,x_2,\mu)\|_\alpha\leqslant\mu\Delta\|x_1-x_2\|.$$

Докажем прежде всего, что если уравнение (8) имеет решение в классе $C(d,\Delta)$, то это решение является интегральным многообразием системы (I).

Итак, пусть $y=H(t,x,\mu)$ - некоторое решение уравнения (8), лежащее в классе $C(d,\Delta)$. Докажем сначала, что отображение $(t,x)\mapsto H(t,x,\mu):R\times X\to Y^\alpha$ локально гельдерово по $t\in R$. Введем обозначения $x(t)=\varphi(t,\tau,\xi,\mu|H)$, $x^h(t)=\varphi(t,\tau+h,\xi,\mu|H)$ для $h>0$. Тогда при $t>\tau$ имеем тождества

$$x(t)=\xi-\int_t^{\tau} f(s,x(s),\ H(s,x(s),\mu),\mu)ds,$$

$$x^h(t)=\xi-\int_t^{\tau+h} f(s,x^h(s),H(s,x^h(s),\mu),\mu)ds.$$

Отсюда получаем при $t<\tau$ неравенство

$$\|x(t)-x^h(t)\|\leqslant Bh+B(1+\mu\Delta)\int_t^{\tau}\|x(s)-x^h(s)\|ds$$

и по теореме об интегральных неравенствах имеем при $t<\tau$

$$\|x(t)-x^h(t)\|\leqslant Bhe^{B(1+\mu\Delta)(\tau-t)}.$$

Теперь из уравнения (I) имеем для $h>0$

$$\|H(\tau+h,\xi,\mu)-H(\tau,\xi,\mu)\|_\alpha\leqslant\frac{1}{\mu}\int^{\tau+h}\|e^{A\frac{\tau+h-s}{\mu}}g(s,x^h(s),$$
$$H(s,x^h(s),\mu),\mu)\|_\alpha ds+\frac{1}{\mu}\int_{-\infty}^{\tau}\|(e^{A\frac{h}{\mu}}-1)e^{A\frac{\tau-s}{\mu}}g(s,x^h(s),$$
$$H(s,x^h(s),\mu),\mu)\|_\alpha ds+\frac{1}{\mu}\int_{-\infty}^{\tau}\|e^{A\frac{\tau-s}{\mu}}[g(s,x^h(s),H(s,x^h(s),\mu),\mu)-$$
$$-g(s,x(s),H(s,x(s),\mu),\mu)]\|_\alpha ds.$$

Отдельно оценивая каждый из этих интегралов, легко получить оценку $\|H(\tau+h,\xi,\mu)-H(\tau,\xi,\mu)\|_\alpha\leqslant const\,h^\sigma$ для некоторого $\sigma>0$.

Осталось только доказать инвариантность поверхности $y=$ $=H(t,x,\mu)$. Пусть точка (t_0,x_0,y_0,μ) такова, что $y_0=H(t_0,x_0,\mu)$. Определим функцию $x(t)=\varphi(t,t_0,x_0,\mu|H)$, $t\in R$ и положим $y(t)=H(t,\varphi(t,t_0,x_0,\mu|H),\mu)$, $t\in R$; достаточно доказать, что эта функция $y(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\mu\frac{dy}{dt}=Ay+g(t,x(t),H(t,x(t),\mu),\mu),\quad t\in R.$$

Но это уравнение имеет единственное решение $y_*(t)$, ограниченное на всей прямой, а именно $y_*(t)=\frac{1}{\mu}\int_{-\infty}^{t}e^{A\frac{t-s}{\mu}}g(s,x(s),H(s,x(s),\mu),\mu)ds$, так что выполняется $y_*(t)=H(t,x(t),\mu)=y(t)$. Итак, доказано, что каждое решение уравнения (8) из класса $C(d,\Delta)$ является интегральным многообразием системы (I).

Для доказательства существования интегрального многообразия у системы (I) осталось доказать только, что уравнение (8) имеет решение в классе $C(d,\Delta)$. Введем в этом классе норму

$$|||H(t,x,\mu)||| = \sup_{(t,x,\mu)\in R\times X\times(0,\mu_0]} \|H(t,x,\mu)\|_\alpha ,$$

которая превращает класс $C(d,\Delta)$ в полное метрическое пространство. Определим на этом пространстве оператор

$$T_{\tau,\xi}(H)=\frac{1}{\mu}\int_{-\infty}^{\tau} e^{A\frac{\tau-s}{\mu}} g(s,x(s),H(s,x(s),\mu),\mu)ds,$$

где $x(t)=\varphi(t,\tau,\xi,\mu|H)$ является решением задачи (7).

Достаточно доказать, что при некотором выборе постоянных $d>0$ и $\Delta>0$ оператор T действует в пространстве $C(d,\Delta)$ и является сжимающим оператором в этом пространстве. Тогда по принципу сжатия оператор T будет иметь единственную неподвижную точку в классе $C(d,\Delta)$, которая и будет интегральным многообразием системы (I).

Получим сначала некоторое вспомогательное неравенство. Введем обозначения $x_K(t)=\varphi(t,\tau,\xi_K,\mu|H_K)$, $K=1,2$; $H_K\in C(d,\Delta)$. Тогда для $t<\tau$ имеют место тождества

$$x_K(t)=\xi_K-\int_t^{\tau} f(s,x_K(s),H_K(s,x_K(s),\mu),\mu)ds, \quad K=1,2.$$

Отсюда получим при $t<\tau$ неравенство

$$\|x_1(t)-x_2(t)\|\leqslant \|\xi_1-\xi_2\|+\int_t^{\tau}|||H_1-H_2|||ds+\int_t^{\tau}B(1+\mu\Delta)\|x_1(s)-x_2(s)\|ds.$$

По теореме об интегральных неравенствах при $t<\tau$ имеем

$$\|x_1(t)-x_2(t)\|\leqslant e^{B(1+\mu\Delta)(\tau-t)}\left[\frac{|||H_1-H_2|||}{1+\mu\Delta}+\|\xi_1-\xi_2\|\right]-\frac{|||H_1-H_2|||}{1+\mu\Delta}.$$

Это и есть нужное неравенство. Пользуясь им, легко получить следующие оценки:

$$\|T_{\tau,\xi}(H)\|_\alpha\leqslant \mu C_\alpha B(1+\mu d^2)\int_0^{\infty}s^{-\alpha}e^{-\gamma s}ds,$$

$$\|T_{\tau,\xi'}(H)-T_{\tau,\xi''}(H)\|_\alpha\leqslant \mu C_\alpha B(1+d)(1+\mu d)\int_0^{\infty}s^{-\alpha}e^{-[\gamma-\mu B(1+\mu\Delta)]s}ds\|\xi'-\xi''\|,$$

$$\|T_{\tau,\xi}(H_1)-T_{\tau,\xi}(H_2)\|_2 \leq \mu C_\alpha B(1+d)\int_0^\infty s^{-\alpha} e^{-[\gamma-\mu B(1+\mu\Delta)]s} ds \cdot |||H_1-H_2||| \cdot$$

Из этих оценок и следует, что найдутся постоянные $d>0$, $\Delta>0$ и $\tilde{\mu}>0$ такие, что для всех $\mu\in(0,\tilde{\mu}]$ оператор T будет действовать в пространстве $C(d,\Delta)$ и будет являться там сжимающим оператором.

Итак, имеет место следующая теорема о существовании интегрального многообразия у системы (I).

Т е о р е м а 5. Пусть функции f и g удовлетворяют локальному условию Липшица и имеют место неравенства (5) и (6). Тогда найдется постоянная $\tilde{\mu}>0$ такая, что $\forall\mu\in(0,\tilde{\mu}]$ система (I) имеет единственное интегральное многообразие в классе функций $C(d,\Delta)$ при некотором выборе постоянных $d>0$ и $\Delta>0$.

IУ. Устойчивость интегрального многообразия

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости интегрального многообразия $y=H(t,x,\mu)$. Дадим сначала определение.

Определение 4. Интегральное многообразие $y=H(t,x,\mu)$ называется устойчивым, если при $\forall\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для каждого решения $x(t)=x(t,\mu)$, $y(t)=y(t,\mu)$ системы (I), удовлетворяющего условию $\|y(t_0)-H(t_0,x(t_0),\mu)\|_\alpha<\delta$, где $t_0\in R$ произвольно, найдется такое решение $\bar{x}(t)=\bar{x}(t,\mu), \bar{y}(t)=H(t,\bar{x}(t),\mu)$ системы (I), лежащее на интегральном многообразии, что для всех $t>t_0$ будет выполняться

$$\|x(t)-\bar{x}(t)\|+\|y(t)-\bar{y}(t)\|_\alpha<\varepsilon\cdot$$

Интегральное многообразие $y=H(t,x,\mu)$ называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и, кроме того, выполняется

$$\lim_{t\to\infty}\left[\|x(t)-\bar{x}(t)\|+\|y(t)-\bar{y}(t)\|_\alpha\right]=0\cdot$$

Пусть $x(t)=x(t,\mu), y(t)=y(t,\mu)$ такое решение системы (I), что $\|y(t_0)\|_\alpha<\mu d_1$, где $d_1>0$ произвольная постоянная, $\mu\in(0,\tilde{\mu}]$ и $\tilde{\mu}$ выбирается как в теореме 4. Тогда для всех $t\geq t_0$ будет выполняться $\|y(t)\|_\alpha<\mu d_2$ для некоторой постоянной $d_2>0$.

Введем обозначения $\zeta(t)=y(t)-H(t,x(t),\mu)$ и $x_\tau(t)=\varphi(t,\tau,x(\tau),\mu|H)$ – решение уравнения (7), удовлетворяющее начальным условиям $x_\tau(t)_{t=\tau}= x(\tau)$. Тогда, пользуясь теоремой об интегральных неравенствах, нетрудно доказать следующие оценки:

$$\|x(t)-x_\tau(t)\|\leqslant B\int_t^\tau e^{B(1+\mu\Delta)(s-t)}\|\zeta(s)\|_\alpha ds,\ t_0\leqslant t\leqslant\tau,$$

$$\|x_\tau(t)-x_{\tau_0}(t)\|\leqslant B\int_{\tau_0}^\tau e^{B(1+\mu\Delta)(s-t)}\|\zeta(s)\|_\alpha ds,\ t\leqslant\tau_0\leqslant\tau. \tag{9}$$

Далее для $t\geqslant t_0$ имеем

$$\zeta(t)=e^{A\frac{t-t_0}{\mu}}\zeta(t_0)+\frac{1}{\mu}\int_{t_0}^t e^{A\frac{t-s}{\mu}}[g(s,x(s),y(s),\mu)-$$

$$-g(s,x_t(s),H[s,x_t(s),\mu),\mu]ds+\frac{1}{\mu}\int_{-\infty}^{t_0}e^{A\frac{t-s}{\mu}}[g(s,x_{t_0}(s),H(s,x_{t_0}(s),$$

$$\mu),\mu)-g(s,x_t(s),H(s,x_t(s),\mu),\mu)]ds.$$

Отсюда, используя неравенства (6) и (9), получаем

$$\|\zeta(t)\|_\alpha\leqslant C_0e^{-\gamma\frac{t-t_0}{\mu}}\|\zeta(t_0)\|_\alpha+[BC_\alpha(1+d_2)+\mu\frac{C_\alpha B^2(1+d)(1+\mu\Delta)}{\gamma-\mu B(1+\mu\Delta)}]\int_{t_0}^t\left(\frac{t-s}{\mu}\right)^{-\alpha}\times$$
$$\times e^{-\gamma\frac{t-s}{\mu}}\|\zeta(s)\|_\alpha ds.$$

Далее, пользуясь теоремой об интегральных неравенствах и сформулированной в пункте 2 леммой, получим оценку

$$\|\zeta(t)\|_\alpha\leqslant C_0(1+M)\|\zeta(t_0)\|_\alpha e^{-\gamma\frac{t-t_0}{2\mu}},\ t\geqslant t_0, \tag{10}$$

справедливую в том случае, если μ выбрано так, чтобы имели место неравенства

$$\gamma>2\mu B(1+\mu\Delta),\quad [\gamma-(\mu D)^{\frac{1}{1-\alpha}}]\geqslant\gamma/2,$$

где $D=[BC_\alpha(1+d_2)+\mu\dfrac{B^2C_\alpha(1+d)(1+\mu\Delta)}{\gamma-\mu B(1+\mu\Delta)}]\Gamma(1-\alpha).$

Таким образом доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 6. Для любого $d_1>0$ существует $\tilde\mu>0$ такое, что для любого решения системы (I) $x(t)=x(t,\mu),y(t)=y(t,\mu)$, удовлетворяющего условию $\|y(t_0)\|_\alpha<\mu d_1$, где $0<\mu\leqslant\tilde\mu$, будет иметь место оценка (I0).

Эта теорема означает, что интегральное многообразие является экспоненциально притягивающим множеством. Докажем теперь устойчивость интегрального многообразия.

Из неравенств (9) и (10) получаем

$$\|x_{\tau_2}(t_0)-x_{\tau_1}(t_0)\| \leq BC_0(1+M)\|\zeta(t_0)\|_\alpha \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-[\frac{\gamma}{2\mu}-B(1+\mu\Delta)](s-t_0)}\,ds,$$

откуда следует, что $\|x_{\tau_2}(t_0)-x_{\tau_1}(t_0)\| \to 0$ при $\tau_1, \tau_2 \to \infty$. В силу полноты пространства X отсюда следует, что существует $\lim\limits_{\tau\to\infty} x_\tau(t_0)=\bar{x}_0$. Обозначим через $\bar{x}(t)$ решение уравнения (7), удовлетворяющее начальному условию $\bar{x}(t_0)=\bar{x}_0$. Тогда для каждого $t\in R$ выполняется $x_\tau(t)\to\bar{x}(t)$ при $\tau\to\infty$. Переходя в первом из неравенства (9) к пределу при $\tau\to\infty$, получаем

$$\|x(t)-\bar{x}(t)\| \leq B\int_t^{\infty} e^{B(1+\mu\Delta)(s-t)}\|\zeta(s)\|_\alpha\,ds,$$

откуда, используя (10), будем иметь

$$\|x(t)-\bar{x}(t)\| \leq \mu\frac{BC_0^2(1+M)^2}{\frac{1}{2}-\mu B(1+\mu\Delta)}\|\zeta(t_0)\|_\alpha e^{-\frac{\gamma}{2\mu}(t-t_0)}.$$

Отсюда легко получается следующая теорема, которая и означает устойчивость интегрального многообразия.

Т е о р е м а 7. Для любого $d_1>0$ существует $\tilde{\mu}>0$ такое, что для каждого решения $x(t)=x(t,\mu)$, $y(t)=y(t,\mu)$ системы (I) такого, что $\|y(t_0)\|_\alpha\leq\mu d_1$, где $0<\mu\leq\tilde{\mu}$, найдется такое решение $\bar{x}(t)$ уравнения (7), что для всех выполняется

$$\|y(t)-H(t,\bar{x}(t),\mu)\|_\alpha+\|x(t)-\bar{x}(t)\|\leq\|\zeta(t_0)\|_\alpha e^{-\frac{\gamma}{2\mu}(t-t_0)}. \tag{II}$$

У. Принцип сведения

Докажем теорему, которая означает, что для интегрального многообразия $y=H(t,x,\mu)$ справедлив принцип сведения.

Т е о р е м а 8. Решение $\varphi(t)=\varphi(t,\mu)$, $\psi(t)=\psi(t,\mu)$, где $\psi(t)=H(t,\varphi(t),\mu)$ системы (I), лежащее на интегральном многообразии, устойчиво (асимптотически устойчиво, неустойчиво) тогда и только тогда, когда решение $\varphi(t)$ уравнения (7), описывающее движение по интегральному многообразию, устойчиво (асимптотически устойчиво, неустойчиво).

Доказательство. Выберем $d_1>d$ и постоянную $\tilde{\mu}$, соответствующую d_1 в теореме 7. Зафиксируем $\mu\in(0,\tilde{\mu}]$. Пусть $\varphi(t)$ решение уравнения (7) такое, что $\varphi(t_0)=\xi_0$ и предположим, что оно устойчиво. Это означает, что $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ такое, что как только $\|\xi_0-\xi\|<\delta$, то для всех $t\geqslant t_0$ будет выполняться $\|\varphi(t)-\varphi(t,t_0,\xi,\mu/H)\|<\varepsilon$. Надо доказать, что $(\varphi(t),\psi(t)$, где $\psi(t)=H(t,\varphi(t),\mu)$ устойчиво, т.е. $\forall\varepsilon_1>0\ \exists\delta_1>0$ такое, что как только $\|\xi_0-x_0\|<\delta_1$ и $\|y_0-H(t_0,\xi_0,\mu)\|_\alpha<\delta_1$, то для всех $t\geqslant t_0$ будет иметь место оценка $\|x(t)-\varphi(t)\|+\|y(t)-\psi(t)\|_\alpha\leqslant\leqslant\delta_1$, где $(x(t),y(t))$ решение системы (I), удовлетворяющее начальным условиям $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$.

Выберем $0<\delta_1<\mu(d_1-d)$. Тогда для решения $(x(t),y(t))$ справедлива теорема 7, т.е. существует решение $\bar{x}(t)$ уравнения (7) такое, что имеет место неравенство (II). Поскольку $\|y_0-H(t_0,x_0,\mu)\|_\alpha<(1+\mu\Delta)\delta_1$, то из (II) имеем

$$\|x(t)-\bar{x}(t)\|+\|y(t)-H(t,\bar{x}(t),\mu\|_\alpha\leqslant L(1+\mu\Delta)\delta_1 e^{-\frac{\gamma}{2\mu}(t-t_0)}. \tag{I2}$$

а из (I2) – $\|\bar{x}(t_0)-\varphi(t_0)\|\leqslant[1+L(1+\mu\Delta)]\delta_1$.

Требуя от δ_1 дополнительно, чтобы оно удовлетворяло оценке $\delta_1<\delta/[1+L(1+\mu\Delta)]$, будем иметь для всех $t\geqslant t_0$ неравенство $\|\bar{x}(t)-\varphi(t)\|<\varepsilon$. Из (I2) и последнего неравенства получим

$$\|x(t)-\varphi(t)\|+\|y(t)-\psi(t)\|_\alpha\leqslant\|x(t)-\bar{x}(t)\|+\|\bar{x}(t)-\varphi(t)\|+$$
$$+\|y(t)-H(t,\bar{x}(t),\mu)\|_\alpha+\|H(t,\bar{x}(t),\mu)-H(t,\varphi(t),\mu)\|_\alpha\leqslant$$
$$\leqslant L(1+\mu\Delta)\delta_1 e^{-\frac{\gamma}{2\mu}(t-t_0)}+\varepsilon(1+\mu\Delta).$$

Теперь, очевидно, что $\forall\varepsilon_1>0$ можно подобрать $\delta_1>0$ и $\varepsilon>0$ такие, что выполняются неравенства

$$\delta_1<\mu(d_1-d),\qquad [1+L(1+\mu\Delta)]\delta_1<\delta,$$
$$L(1+\mu\Delta)\delta_1+\varepsilon(1+\mu\Delta)<\varepsilon_1.$$

Это и означает, что решение $(\varphi(t),\psi(t))$ системы (I) устойчиво. Доказательство асимптотической устойчивости проводится аналогично. Результат теоремы о неустойчивости очевиден.

VI. Асимптотическое разложение интегрального многообразия

Рассмотрим, наконец, вопрос о построении асимптотического разложения интегрального многообразия. Будем следовать при этом простому алгоритму, предложенному в работе [4]. Предположим, что функции $f: R\times X\times U\times(0,\mu_0]\to X$, $g: R\times X\times U\times(0,\mu_0]\to Y$ бесконечно дифференцируемы, все производные этих функций ограничены равномерно по $(t,x,y,\mu)\in R\times X\times U\times(0,\mu_0]$ и, кроме того, выполняется

$$g(t,x,0,0)=0,\quad \frac{\partial}{\partial y}g(t,x,0,0)=0. \tag{13}$$

Изложим сначала формальный алгоритм построения асимптотического разложения интегрального многообразия. Обозначим множество функций $(t,x)\mapsto y(t,x): R\times X\to Y^{\alpha}$. непрерывно-дифференцируемых и принимающих значения в $D(A)\cap U$ через $\mathfrak{M}$. Пусть для каждого $\mu\in(0,\mu_0)$ функция $y=y(t,x,\mu)$ лежит в классе $\mathfrak{M}$. Тогда для любой такой функции можно определить отображение

$$(t,x,\mu)\mapsto D(t,x,\mu|y)\equiv Ay(t,x,\mu)+g(t,x,y(t_1,x,\mu),\mu)-$$

$$-\mu\frac{\partial y(t,x,\mu)}{\partial t}-\mu\frac{\partial y(t,x,\mu)}{\partial x}f(t,x,y(t,x,\mu)): R\times X\times(0,\mu_0]\to Y.$$

Пусть теперь функция $y=H(t,x,\mu)$ представлена в виде

$$H(t,x,\mu)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k h_k(t,x), \tag{14}$$

где $h_k(t,x)\in\mathfrak{M}$, $k=1,2,3,\ldots$. Раскладывая $f(t,x,H(t,x,\mu),\mu)$ и $g(t,x,H(t,x,\mu),\mu)$ формально по степеням μ , получим

$$f(t,x,\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k h_k(t,x),\mu)=\varphi_0(t,x)+\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k\varphi_k(t,x,h_1,\ldots h_k),$$

$$g(t,x,\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k h_k(t,x),\mu)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k\psi_k(t,x,h_1,\ldots h_{k-1}),$$

где $\varphi_0(t,x)=f(t,x,0,0)$,

$$\varphi_1(t,x)=\frac{\partial}{\partial y}f(t,x,0,0)h_1(t,x)+\frac{\partial}{\partial\mu}f(t,x,0,0),$$

. . . .

$$\psi_1(t,x)=\frac{\partial}{\partial\mu}g(t,x,0,0),$$

. . . .

Подставляя эти разложения в $D(t,x,\mu/H)$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ к нулю, получим равенства:

$$Ah_1+\psi_1(t,x)=0,$$

$$Ah_2+\psi_2(t,x,h_1)-\frac{\partial}{\partial t}h_1(t,x)-\frac{\partial}{\partial x}h_1(t,x)\varphi_0(t,x)=0,$$

$$Ah_3+\psi_3(t,x,h_1,h_2)-\frac{\partial}{\partial t}h_2(t,x)-\frac{\partial}{\partial x}h_1(t,x)\varphi_1(t,x,h_1)-$$
$$-\frac{\partial}{\partial x}h_2(t,x)\varphi_0(t,x)=0,$$

. . . .

Отсюда получаем

$$h_1(t,x)=-A^{-1}\psi_1(t,x),$$
$$h_2(t,x)=-A^{-1}\Big[\psi_2(t,x,h_1)-\frac{\partial}{\partial t}h_1(t,x)-\frac{\partial}{\partial x}h_1(t,x)\varphi_0(t,x)\Big], \tag{I5}$$

. . . .

Таким образом можно последовательно определять все коэффициенты разложения (I4). Очевидно, что все функции $(t,x)\longmapsto h_K(t,x)$: $R\times X\to Y^\alpha$, $K=1,2,3,\ldots$ бесконечно-дифференцируемы и каждая производная любой из этих функций ограничена равномерно по $(t,x)\in R\times X$. Отсюда следует, что для любых $(t,x),(t,x')\in R\times X$ имеют место оценки

$$\|h_K(t,x)\|_\alpha\leqslant p_K,\ \Big\|\frac{\partial}{\partial t}h_K(t,x)\Big\|_\alpha\leqslant p_K,\ \Big\|\frac{\partial}{\partial x}h_K(t,x)\Big\|_{\mathcal{L}(X,Y^\alpha)}\leqslant p_K,$$
$$\|h_K(t,x)-h_K(t,x')\|_\alpha\leqslant p_K\|x-x'\| \tag{I6}$$

для некоторых постоянных p_K, $K=1,2,3,\ldots$.

Докажем, что построенное формальное разложение (I4) является асимптотическим разложением интегрального многообразия $y=H(t,x,\mu)$. Пусть

$$H_n(t,x,\mu)=\sum_{K=1}^{n}\mu^K h_K(t,x),$$

где $h_K(t,x)$ определяются по формулам (I4). Тогда, очевидно, имеет место равенство

$$\sup_{(t,x)\in R\times X}\|D(t,x,\mu/H_n)\|\leqslant const\,\mu^{n+1}. \tag{I7}$$

Сделаем в системе (I) замену переменных $x=v,\ y=w+H_n(t,x,\mu)$. Тогда получим следующую систему уравнений:

$$\frac{dv}{dt}=F(t,v,w,\mu),$$

5-6501

$$\mu\frac{dw}{dt}=Aw+G(t,v,w,\mu), \tag{18}$$

где

$$F(t,v,w,\mu)=f(t,v,w+H_n(t,v,\mu),\mu),$$
$$G(t,v,w,\mu)=AH_n(t,v,\mu)+g(t,v,w+H_n(t,v,\mu),\mu)-$$
$$-\mu\frac{\partial}{\partial t}H_n(t,v,\mu)-\mu\frac{\partial}{\partial v}H_n(t,v,\mu)F(t,v,w,\mu).$$

Пользуясь неравенствами (I6) и (I7), легко получить оценки

$$\|F(t,v,w,\mu)\|\leqslant const,$$
$$\|G(t,v,w,\mu)\|\leqslant const(\mu^{n+1}+\mu\|w\|_\alpha+\|w\|_\alpha^2),$$
$$\|F(t,v_1,w_1,\mu)-F(t,v_2,w_2,\mu)\|\leqslant const(\|v_1-v_2\|+\|w_1-w_2\|_\alpha),$$
$$\|G(t,v_1,w_1,\mu)-G(t,v_2,w_2,\mu)\|\leqslant const(\mu+\|\bar{w}\|_\alpha)(\|v_1-v_2\|+$$
$$+\|w_1-w_2\|_\alpha),$$

справедливые для $t\in R$, $v,v_1,v_2\in X$, $\|\bar{w}\|_\alpha<\tilde{\rho}$, $\|w_1\|_\alpha<\tilde{\rho}$, $\|w_2\|_\alpha<\tilde{\rho}$, $0<\mu\leqslant\tilde{\mu}$, при некоторых $\tilde{\rho}<\rho$, $\tilde{\mu}<\mu_0$.

Точно также, как в пункте 3 можно доказать, что система (I8) имеет интегральное многообразие $w=H_*(t,v,\mu)$, удовлетворяющее оценке

$$\|H_*(t,v,\mu)\|_\alpha\leqslant const\,\mu^{n+1}.$$

Это означает, что

$$y=\sum_{k=1}^{n}\mu^k h_k(t,x)+H_*(t,x,\mu)$$

является интегральным многообразием системы (I). Так как n – произвольно, то получаем, что разложение (I4) действительно является асимптотическим разложением интегрального многообразия системы (I). Итак, доказана теорема.

Т е о р е м а 9. Если функции f и g бесконечно-дифференцируемы и все их производные ограничены равномерно по $(t,x,y,\mu)\in R\times X\times U\times(0,\mu_0]$ и выполняются равенства (I3), то интегральное многообразие системы (I) имеет асимптотическое разложение (I4), коэффициенты которого определяются по формулам (I5).

VII. Замечания

В практических задачах обычно выполняются условия, связанные с гладкостью функций f и g, но не выполняются условия, связанные с ограниченностью этих функций. Чтобы и к таким задачам были применены результаты, изложенные выше, поступают следующим образом.

Предположим, что для некоторого $r>0$ найдутся функции f_r и g_r, совпадающие при $t\in R, \|x\|<r, y\in U, \mu\in(0,\mu_0]$ с функциями f и g соответственно, а далее продолженные с сохранением гладкости и так, чтобы функции f_r и g_r были ограничены вместе со всеми своими производными по равномерной норме. Тогда у системы

$$\frac{dx}{dt}=f_r(t,x,y,\mu),$$

$$\mu\frac{dy}{dt}=Ay+g_r(t,x,y,\mu) \tag{19}$$

существует интегральное многообразие $y=H_r(t,x,\mu)$, удовлетворяющее всем свойствам устойчивости, изложенным выше. В то же время каждое решение $(x_r(t),y_r(t))$ системы (19) будет также являться решением системы (I) до тех пор, пока оно не выйдет за пределы множества $\{(x,y)\in X\times Y / \|x\|\leqslant r, y\in U\}$, и наоборот, каждое решение системы (I) является решением системы (19), значит интегральное многообразие $y=H_r(t,x,\mu)$ может служить для системы (I) устойчивым, притягивающим множеством по крайней мере до тех пор, пока $\|x\|\leqslant r$. Для построения асимптотического разложения части интегрального многообразия $y=H_r(t,x,\mu)$, лежащей в полосе $\|x\|\leqslant r$, можно использовать функции f и g и алгоритм, рассмотренный в пункте 6.

VIII. Задача о движении проводящего твердого тела в магнитном поле около центра масс

В работе [5] задача о движении проводящего твердого тела в однородном магнитном поле решается с помощью метода асимптотических разложений. Применим здесь для исследования этой же задачи метод интегральных многообразий.

Начнем с описания задачи. Пусть задано однородное магнитное поле, источник которого $H^{\infty}(t)$ (в неподвижной системе координат) помещен на бесконечности, и пусть дано проводящее твердое тело, которое в системе координат, жестко связанной с телом и с началом в центре масс тема, занимает область G. Тогда вектор напряженности магнитного поля H в области G удовлетворяет уравнениям

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} = \Delta H, \quad d_{\delta v} H = 0, \quad z \in G.$$

Вне области G вектор напряженности магнитного поля равен ΔV, где U - гармоническая функция в области $R^3 \setminus G$, удовлетворяющая краевым условиям

$$H\big|_{\partial G} = \Delta U\big|_{\partial G}, \quad \Delta U\big|_{z=\infty} = CH^{\infty}(t).$$

Здесь $C-(3\times 3)$ матрица перехода от неподвижной системы координат к системе координат, связанной с телом.

Движение тела около центра масс под действием магнитного поля будет описываться уравнениями (в системе координат, связанной с телом)

$$\dot{C} = -\hat{\Omega} C,$$

$$I\dot{\Omega} + \Omega \times I\Omega = P \times CH^{\infty}(t),$$

где $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ - вектор угловой скорости тела,

I - тензор инерции тела,

$P = \frac{1}{8\pi}\int_G (z \times zot H)dz$ магнитный момент тела и $\hat{\Omega}$ - матрица, связанная с вектором угловой скорости равенством

$$\hat{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сделаем замену переменных $H' = H - CH^{\infty}$, $U' = U - (z, CH^{\infty})_{R^3}$, приводящую к нулевым условиям на бесконечности. Тогда движение тела будет описываться следующей замкнутой системой уравнений:

$$\mu \frac{\partial H'}{\partial t} = \Delta H' - \mu (CH^{\infty} \times \Omega + C\dot{H}^{\infty}), \quad d_{\delta v} H' = 0, \quad z \in G,$$

$$\Delta U' = 0, \quad z \in R^3 \setminus G,$$

$$H'\big|_{\partial G} = \Delta U\big|_{\partial G}, \quad \Delta U'\big|_{z=\infty} = 0, \qquad (20)$$

$$\dot{C} = -\hat{\Omega} C,$$

$$\dot{\Omega} = \frac{1}{8\pi} I^{-1}\Big[\int_G (z \times \mathrm{rot}\, H')dz \times C H^{\infty}\Big] - I^{-1}\big[\Omega \times I\Omega\big]. \qquad (20)$$

Мы будем рассматривать случай, когда $\mu > 0$ является малым параметром.

Переформулируем задачу (19) так, чтобы можно было применить технику интегральных многообразий. Введем прежде всего несколько функциональных пространств. Пусть $L_2(G)$ вещественное гильбертово пространство векторов $u(z) = (u_1(z), u_2(z), u_3(z))$ квадратично-суммируемых в области G, со скалярным произведением

$$(u, v)_G = \int_G uv\,dz, \qquad uv = \sum_{K=1}^{3} u_K v_K$$

и нормой $\|u\|_G = \sqrt{(u,u)_G}$.

$W_2^{\ell}(G)$, $\ell = 1,2,3,\ldots$ - вещественное гильбертово пространство векторов, квадратично-суммируемых в G и имеющих в G квадратично-суммируемые обобщенные производные до порядка ℓ включительно. Скалярное произведение и норма в $W_2^{\ell}(G)$ определяется равенствами

$$(u, v)_{\ell,G} = \sum_{|\alpha| \le \ell} (D^{\alpha}u, D^{\alpha}v)_G, \quad \|u\|_{\ell,G} = \sqrt{(u,u)_{\ell,G}}.$$

$J(G) \subset L_2(G)$ - гильбертово пространство, в котором плотным множеством является множество всех непрерывно-дифференцируемых и соленоидальных в G векторов, $J^{\ell}(G) = W_2^{\ell}(G) \cap J(G)$, $\ell = 1,2,\ldots$, и, наконец, определим гильбертово пространство векторов $H^{\ell}(G) \subset J^{\ell}(G)$, $\ell = 1,2,\ldots$ как пространство всех тех векторов из $J^{\ell}(G)$, которые можно продолжить на $R^3 \setminus G$ как гармонические векторные поля и с сохранением гладкости. Введем оператор $A = -\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}$, действующий в пространстве $J(G)$ и имеющий область определения $D(A) = H^2(G)$. Из результатов работы [6] следует, что оператор A является секториальным оператором, спектр которого лежит внутри левой полуплоскости и имеет место равенство $D(A^{1/2}) = H^1(G)$.

Теперь задачу (20) можно записать в виде системы уравнений (I), где роль переменных (Ω, C) и H' играют соответственно переменные $x = (x', x'') \in X = X' \times X'' = R^3 \times R^9$, $y \in Y = J(G)$, оператор $A: Y \to Y$ описан выше и $D(A) = H^2(G)$, $D(A^{1/2}) = Y^{1/2} = H^1(G)$. Функции $f = (f', f'')$ и g определяются равенствами

$$f': R\times X\times Y^{1/2}\times(0,\mu_0] \to X' : (t,x,y,\mu) \mapsto I^{-1}\left\{\frac{1}{8\pi}\int_G (z\times z\,\mathrm{rot}\,y)\,dz\times\right.$$
$$\left.\times\, x''H^{\infty} - x'\times Ix'\right\},$$

$$f'': R\times Y\times Y^{1/2}\times(0,\mu_0) \to X'' : (t,x,y,\mu) \mapsto -\hat{x}'x'',$$
$$g: R\times X\times Y^{1/2}\times(0,\mu_0] \to Y : (t,x,y,\mu) \mapsto -\mu\left[x''H^{\infty}\times x' +\right.$$
$$\left.+\, x''\dot{H}^{\infty}\right]$$

и $H^{\infty}: R \to R^3$ – заданная гладкая функция, ограниченная вместе со всеми своими производными.

Очевидно, что при $t\in R, \|x\|\leqslant z, \|y\|_{1/2}\leqslant z$ для любой постоянной $z>0$ функции f', f'', g являются гладкими ограниченными функциями. Поэтому к системе (20) можно применить метод интегральных многообразий, т.е. система (20) имеет экспоненциально притягивающее, устойчивое интегральное многообразие $y=h(t,x,\mu)$, для которого справедлив принцип сведения. Асимптотическое разложение этого интегрального многообразия будем искать в виде

$$h(t,x,\mu) = \mu h_1(t,x) + \mu^2 h_2(t,x) + \dots \qquad (21)$$

Введем выражение

$$D(t,x,\mu/y) \equiv Ay(t,x,\mu) + g(t,x,y(t,x,\mu),\mu) -$$
$$-\mu\frac{\partial y(t,x,\mu)}{\partial t} - \mu\,\frac{\partial y(t,x,\mu)}{\partial x}\,f(t,x,y(t,x,\mu),\mu).$$

Подставляя разложение (21) в $D(t,x,\mu/y)$, раскладывая по степеням μ и приравнивая к нулю коэффициенты при одинаковых степенях μ, получим равенства

$$Ah_1(t,x) = x''\dot{H}^{\infty} + x''H^{\infty}\times x',$$
$$Ah_2(t,x) = \frac{\partial h_1(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial h_1(t,x)}{\partial x'}\left[I^{-1}(x'\times Ix')\right] - \frac{\partial h_1(t,x)}{\partial x''}\left[\hat{x}'x''\right].$$

Отсюда имеем

$$h_1(t,x) = A^{-1}\left[x''\dot{H}^{\infty} + x''H^{\infty}\times x'\right],$$

$$h_2(t,x) = A^{-2}[x''\ddot{H}^\infty + 2x''\dot{H}^\infty \times x' + (x''H^\infty \times x')\times x' -$$
$$- x''H^\infty \times I^{-1}(x' \times Ix')],$$

. . . .

Таким образом можно последовательно определить все коэффициенты асимптотического разложения интегрального многообразия системы (20). Тогда на интегральном многообразии магнитный момент тела p имеет следующее асимптотическое разложение:

$$p = \mu \frac{1}{8\pi}\int_G (z \times zot\, h_1)dz + \mu^2 \frac{1}{8\pi}\int_G (z \times zot\, h_2)dz + \dots \qquad (22)$$

Отметим, что в работе [5] указан способ построения операторов $A^{-1}, A^{-2}, \dots$. Из результатов этой же работы следует, что разложение (4) можно представить в следующем виде (в старых переменных):

$$p = -\mu P^{(1)}[C\dot{H}^\infty + CH^\infty \times \Omega] + \mu^2 P^{(2)}[C\ddot{H}^\infty +$$

$$+ 2C\dot{H}^\infty \times \Omega + (CH^\infty \times \Omega)\times \Omega - CH^\infty \times I^{-1}(\Omega \times$$

$$\times I\Omega)] + \dots,$$

где $P^{(1)}, P^{(2)}, \dots$ симметричные положительно-определенные тензоры, зависящие только от формы тела. Способ построения этих тензоров указан в работе [5].

Таким образом рассматриваемая задача имеет интегральное многообразие

$$h(t, C, \Omega) = CH^\infty + \mu A^{-1}[C\dot{H}^\infty + CH^\infty \times \Omega] + \dots$$

движение по которому описывается следующей системой уравнений:

$$\dot{C} = -\hat{\Omega}C,$$
$$I\dot{\Omega} + (\Omega \times I\Omega) = -\mu[P^{(1)}(C\dot{H}^\infty + CH^\infty \times \Omega)] \times CH^\infty + \dots .$$

Литература

I. Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука, 1973, 512 с.

2. *D. Henry, Geometric theory of semilinear parabolic equation, Lect. Notes Math., 1981, 348 с.*

3. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966, 672с.

4. Стрыгин В.В., Соболев В.А. Влияние геометрических и кинетических параметров и диссипации энергии на устойчивость ориентации спутников с двойным вращением. - Космические исследования, 1976, 14, № 3, с.366-371.

5. Кобрин А.И., Мартыненко Ю.А. Движение проводящего твердого тела около центра масс в медленно изменяющемся магнитном поле, ДАН СССР, т.261, № 5, 1981.

6. Ладыженская О.А., Солонников В.А. О принципе линеаризации и инвариантных многообразиях для задач магнитной гидродинамики. Записки научных семинаров ЛОМИ, т.38, 1973.

М.И. Васенина

ОБ АППРОКСИМАЦИИ УСЛОВИЙ НА СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕ

Задачи движения вязкой несжимаемой жидкости со свободными границами представляют значительный интерес. Особую роль они играют в вопросах химической, космической технологии, геофизике и др. Однако их расчет затруднителен, так как наряду с проблемами решения нелинейных уравнений, какими являются уравнения Навье-Стокса, возникают принципиальные трудности, связанные с нелинейностью задачи по границе области, которая находится одновременно с вычислением полей скорости и давления. Решение этих задач может быть осуществлено либо в переменных "вихрь, функция тока", либо в переменных "скорость, давление". При использовании уравнений в переменных "скорость, давление" постановка граничных условий значительно проще, чем при других способах расчета, и качественно характер расчета не зависит от числа пространственных переменных (плоский и пространственный случай), однако при этом возникают дополнительные трудности, связанные с необходимостью удовлетворения неразрывности и расчета поля давления. При решении уравнений Навье-Стокса в переменных "вихрь, функция тока" уравнение неразрывности удовлетворяется автоматически, что ведет к более эффективным алгоритмам, но аппроксимация граничных условий требует до-