в нелинейной механике. М.: Наука, 1973, 512 с.

2. D. Henry, Geometrie theory of semilinear parabolic equation, Lect. Notes Math., 1981, 348 c.

3. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966, 672с.

4. Стрыгин В.В., Соболев В.А. Влияние геометрических и кинетических параметров и диссипации энергии на устойчивость ориентации спутников с двойным вращением. - Космические исследования, 1976, 14, № 3, с.366-371.

5. Кобрин А.И., Мартыненко Ю.А. Движение проводящего твердого тела около центра масс в медленно изменяющемся магнитном поле, ДАН СССР, т.261, № 5, 1981.

6. Ладыженская О.А., Солонников В.А. О принципе линеаризации и инвариантных многообразиях для задач магнитной гидродинамики. Записки научных семинаров ЛОМИ, т.38, 1973.

М.И. Васенина

## ОБ АППРОКСИМАЦИИ УСЛОВИЙ НА СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕ

Задачи движения вязкой несжимаемой жидкости со свободными границами представляют значительный интерес. Особую роль они играют в вопросах химической, космической технологии, геофизике и др. Однако их расчет затруднителен, так как наряду с проблемами решения нелинейных уравнений, какими являются уравнения Навье-Стокса, возникают принципиальные трудности, связанные с нелинейностью задачи по границе области, которая находится одновременно с вычислением полей скорости и давления. Решение этих задач может быть осуществлено либо в переменных "вихрь, функция тока", либо в переменных "скорость, давление". При использовании уравнений в переменных "скорость, давление" постановка граничных условий значительно проще, чем при других способах расчета, и качественно характер расчета не зависит от числа пространственных переменных (плоский и пространственный случай), однако при этом возникают дополнительные трудности, связанные с необходимостью удовлетворения неразрывности и расчета поля давления. При решении уравнений Навье-Стокса в переменных "вихрь, функция тока" уравнение неразрывности удовлетворяется автоматически, что ведет к более эффективным алгоритмам, но аппроксимация граничных условий требует дополнительных исследований. Для случая твердых границ (условие прилипания) вопросы корректности перехода от граничного условия для функции тока к граничному условию для вихря были рассмотрены в работах [I,2,6]. В настоящей работе подобные исследования проводятся для задач со свободными границами. Ранее некоторые способы аппроксимации рассматривались в работах [3,5].

## I. Постановка задачи

Рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости со свободной границей в прямоугольной области (течение пленки). Уравнения Навье–Стокса в переменных "вихрь, функция тока" в системе координат, связанной с поверхностью тела, имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\omega}{\partial t}+u\frac{\partial\omega}{\partial x_1}+\frac{v}{H}\frac{\partial\omega}{\partial x_2}=\frac{1}{Re}\left\{\frac{\partial^2\omega}{\partial x_1^2}+\frac{1}{H^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial x_2^2}\right\}\\ &\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}+\frac{1}{H^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}=\omega,\\ &u=-\frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\qquad v=\frac{\partial\psi}{\partial x_1},\end{aligned}\right\}\tag{I}$$

где $\omega$ – вихрь, $\psi$ – функция тока, $u$ и $v$ – нормальная и касательная составляющие вектора скорости, $H=1+nk$, $n$ – нормаль к свободной поверхности, $k$ – ее кривизна.

Граничные условия на свободной поверхности:

а) кинематическое условие – нормальная к свободной поверхности составляющая скорости должна совпадать со скоростью перемещения поверхности разрыва;

в) динамическое условие – вектор напряжения для площадок, касательных к свободной поверхности, должен быть направлен по нормали к этим площадкам и по численной величине равен $p_0$.

Обозначим $S=S(t)$ – уравнение свободной поверхности. Тогда граничные условия на свободной поверхности примут вид

$$\frac{1}{Re\,H}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2}-p=p_{\text{внешнее}}\tag{2}$$

(нормальное напряжения равно заданному внешнему давлению),

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}=\frac{1}{H^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}\tag{3}$$

(отсутствие касательного напряжения),

$$\frac{\partial S}{\partial t}=u\tag{4}$$

(кинематическое условие совместности).
Эта задача имеет точное решение:

$$v = x_1(2a - x_1). \tag{5}$$

Возьмем его в качестве начального условия.

Таким образом, имеем систему уравнений (I) с граничными условиями на свободной поверхности (2)–(4) и начальным условием (5).

## II. Разностная схема

Аппроксимируем уравнения для вихря разностной схемой, применяя для аппроксимации конвективных членов монотонную аппроксимацию А.А.Самарского [I].

Обозначим : $h_1 = h_2 = h$ – шаги сетки по координатам $OX_1, OX_2$ соответственно; $\tau$ – шаг сетки по времени.

Разностный аналог уравнения для вихря запишется при $t = n + 1/2$

$$\frac{\omega_{ij}^{n+1/2} - \omega_{ij}^{n}}{0{,}5\tau} + \frac{u_{ij}^{n} - |u_{ij}|^{n}}{2}\,\frac{\omega_{i+1,j}^{n+1/2} - \omega_{ij}^{n+1/2}}{h} + \frac{u_{ij}^{n} + |u_{ij}|^{n}}{2}\,\frac{\omega_{ij}^{n+1/2} - \omega_{i-1,j}^{n+1/2}}{h} +$$

$$+ \frac{v_{ij}^{n} - (v_{ij})^{n}}{2H}\,\frac{\omega_{i,j+1}^{n} - \omega_{ij}^{n}}{h} + \frac{v_{ij} + |v_{ij}|^{n}}{2H}\,\frac{\omega_{ij}^{n} - \omega_{i,j-1}^{n}}{h} =$$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{|u_{ij}|^{n} h}{2}}\,\frac{\omega_{i+1,j}^{n+1/2} - 2\omega_{ij}^{n+1/2} + \omega_{i-1,j}^{n+1/2}}{h^2} +$$

$$+ \frac{1}{1 + \dfrac{|v_{ij}|^{n} h}{2}}\,\frac{\omega_{i,j+1}^{n} - 2\omega_{ij}^{n} + \omega_{i,j-1}^{n}}{H^2 h^2}.$$

Аналогично при $t = n+1$.
Уравнение для функции тока аппроксимируется:

$$\frac{\psi_{i,j}^{n+1/2} - \psi_{ij}^{n}}{0{,}5\tau} = \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1/2} - 2\psi_{ij}^{n+1/2} + \psi_{i-1,j}^{n+1/2}}{h^2} + \frac{1}{H^2}\,\frac{\psi_{i,j+1}^{n} - 2\psi_{ij}^{n} + \psi_{i,j-1}^{n}}{h^2} - \omega^{n};$$

$$\frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1/2}}{0{,}5\tau} = \frac{1}{H^2}\,\frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - 2\psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i,j-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1/2} - 2\psi_{ij}^{n+1/2} + \psi_{i-1,j}^{n+1/2}}{h^2} - \omega^{n}.$$

## Ш. Решение алгебраических систем уравнений, аппроксимирующих разностную схему

Как и в случае твердой границы, нетривиальным является вопрос перехода от заданных граничных условий в виде производных для функции тока к граничному условию для вихря.

Условия на свободной границе (2),(3), записанные в точке $(M-1, j)$, аппроксимируются разностными уравнениями и объединяются в систему

$$\left.\begin{aligned} &\psi_{M-1,j+1} - 2\psi_{M-1,j} + \psi_{M-1,j-1} = H^2(\psi_{M,j} - 2\psi_{M-1,j} + \psi_{M-2j}) \\ &\frac{1}{ReH}(\psi_{M,j} - \psi_{M-1,j} + \psi_{M,j-1} + \psi_{M-1,j-1}) = p \\ &\qquad\qquad\qquad j = \overline{1, N-1}. \end{aligned}\right\} \qquad 6)$$

Обозначим: $y_j = \psi_{M-1,j}$; $z_j = \psi_{M,j}$; $f_j = \psi_{M-2,j}$.
Тогда система уравнений (6) перепишется

$$\left.\begin{aligned} &y_{j+1} - 2(1-H^2)y_j + y_{j-1} - H^2 z_j = H^2 f_j \\ &z_j - z_{j-1} - y_j + y_{j-1} = Re\,Hp \qquad j = \overline{1, N-1} \end{aligned}\right\}. \qquad (7)$$

На входе заданы $y_0, z_0$; на выходе $z_N = z_{N-1}$, $y_N = y_{N-1}$.
Таким образом, имеем систему уравнений с $2N$ неизвестными относительно функции тока на действительной свободной границе $y_j$ и функции тока на фиктивной свободной границе $z_j$; свободные члены в этой системе уравнений – функция тока в точке, отстоящей от свободной границы на один шаг сетки.

Матрица коэффициентов системы имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc}
-2(1-H^2) & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -H^2 & 0 & 0 & \cdots & & \\
1 & -2(1-H^2) & 1 & 0 & \cdots & & 0 & -H^2 & \cdots & & & \\
 & & & & & & 0 & 0 & -H^2 & \cdots & & \\
 & & & & -1 & 1 & 0 & 0 & & & & \\
\hline
-1 & 0 & 0 & \cdots & & & 1 & 0 & \cdots & & & \\
1 & -1 & 0 & \cdots & & & -1 & 1 & \cdots & & & \\
0 & 1 & -1 & \cdots & & & 0 & -1 & 1 & \cdots & & \\
 & & & & & & & & & & 1 & 1
\end{array}\right)$$

Эта матрица специального вида и экономичным методом ее решения является немонотонная прогонка для скалярных пятиточечных уравнений [7]. Для определения вихря на свободной поверхности вводились, подобно [I], различные сеточные области для вихря и функции тока, при этом вихрь определялся внутри области, отстоящей от границы на один шаг сетки. Уравнение для $\psi$ решается в области $[0, Mh]$, а для $\omega$ – в области $[0,(M-1)h]$ в сочетании с итерационным процессом на границе $\omega^{S+1}=\alpha f(\psi^{S+1})+(1-\alpha)\omega^{S}$, где $f(\psi)=2\psi_{x_1 x_1}$, $\alpha$ – параметр релаксации. Величину этого параметра можно вывести подобно [8].

Последовательность расчетов:

1) решается система (7), находятся $\psi^{S+1}_{M-1,j}$; $\psi^{S+1}_{M,j}$;

2) решается уравнение для $\psi$ внутри области $\psi^{S+1}_{M-1,j}$; $\psi^{S+1}_{M,j}$ методом верхней релаксации или методом переменных направлений;

3) вычисляется

$$\omega|_S^{S+1}=\alpha f(\psi^{S+1})+(1-\alpha)\omega^{S}.$$

Если $\left|\omega|_S^{S+1}-\omega|_S^{S}\right|>\varepsilon$ – цикл повторяется, если сходимость на границе достигнута, то уравнение для вихря решается внутри области методом переменных направлений;

4) определяется новая форма свободной поверхности.

Давление исключается из уравнений Навье-Стокса путем интегрирования по границе. Это приводит к появлению в граничном условии (2) производных функции тока третьего порядка, что приводит к ухудшению сходимости. Целесообразно использовать процесс релаксации в виде

$$\frac{1}{Re\,H}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\,\partial x_2}=\gamma p^{n+1}+(1-\gamma)p^{n}.$$

Расчеты проводились на сетках $10\times10$ и $20\times20$ в пленке, цилиндре и конусе с параметрами $\tau=10^{-1}$, $1\leqslant Re\leqslant 10$, $n=300$.

## IV. Результаты расчетов

I) Расчеты показали:

1) при использовании предложенного метода удовлетворения граничных условий сходимость итераций для вихря есть для любых $\alpha$, но при $\alpha\leqslant\alpha^*$, где $\alpha^*$ выбирается по [8], погрешность значительно меньше;

2) параметр итерации $\beta$ метода релаксации для функции тока внут-

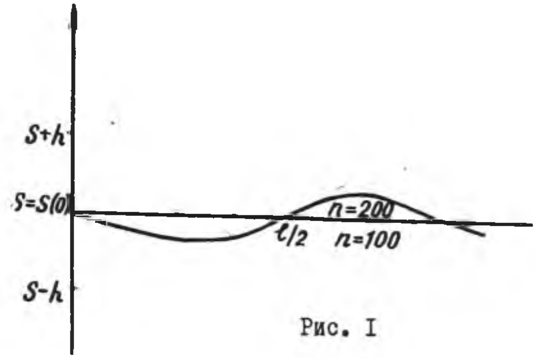


Рис. I

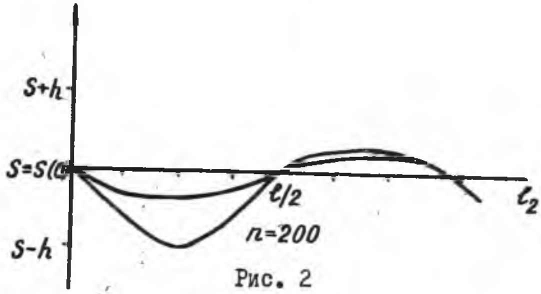


Рис. 2

ри области оказывает существенное влияние на сходимость для вихря на границе: при $\beta < \beta^*$ и $\alpha > \alpha^*$ итерации для вихря на границе расходятся; для метода переменных направлений такой зависимости нет; 3) при $Re > 10$ граница разбалтывается, происходит эффект "опрокидывания" сеток - точки границы попадают во внутреннюю область, при $Re < 10$ граница имеет сходную форму на всех временных слоях, но амплитуда волн на свободной поверхности постепенно увеличивается, что приводит к распространению волн вглубь жидкости.

Форма свободной поверхности при $Re = 1$ в планке и цилиндре показана на рис.I и рис.2 соответственно.

## Литература

I. Грязнов В.Л., Полежаев В.И. Исследование некоторых разностных схем и аппроксимаций граничных условий для численного решения уравнений тепловой конвекции. М., Препринт ИПМех, 1974.

2. Дородницын А.А., Меллер Н.А. О некоторых подходах к реше-

нию стационарных уравнений Навье-Стокса.- ЖВММФ, 1968, т.8, № 2, с.393-402.

3. Матеева Э.И., Пальцев Б.В. О разделении областей при решении краевых задач для уравнения Пуассона в областях сложной формы.- ЖВММФ, 1973, т.13, № 6, с.1441-1452.

4. Непомнящий А.А., Тарунин Е.Л. Двухполовой метод расчета течений вязкой жидкости со свободной поверхностью. - Тр.VI Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости. Новосибирск, 1978, с.197-207.

5. Осмоловский В.Г., Ривкинд В.Я. О методе разделения областей для уравнений с разрывными коэффициентами.- ЖВММФ, 1981, т.21, № 1, 101-104.

6. Отрощенко И.В., Федоренко Р.Н. О приближенном решении стационарных уравнений Навье-Стокса. М.: ИПМ, 1975.

7. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М., 1978.

8. Тарунин Е.Л. Оптимизация неявных схем для уравнений Навье-Стокса в переменных функции тока и вихря скорости. - Тр.V Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости. Новосибирск, 1975, с.3-26.

Б.Д.Гельман, Ю.Е.Гликлих

## МНОГОЗНАЧНЫЙ ИНТЕГРАЛ ИТО

В настоящей работе дается конструкция многозначного аналога интеграла Ито и исследуются его свойства. С помощью введенного понятия удается рассмотреть стохастические дифференциальные включения и получить утверждения о существовании их решений.

В теории стохастических уравнений, как и в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, включения возникают естественно, например, в случае управляемых систем или при исследовании уравнений с разрывными коэффициентами (так называемые ослабленные решения стохастических уравнений). Однако в известных авторам работах (см., например, [1-3] и приведенную там библиографию) рассматривались стохастические дифференциальные включения лишь с однозначной непрерывной диффузией, что видимо, объясняется используемым аппаратом и отсутствием конструкции многозначного интеграла Ито.