Г.М. Левин

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ОДНОМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ЦИКЛОВ

I. Основные результаты. Хорошо известно [I], что уравнение Риккати $\dot{x}=x^2+a_1(t)x+a_2(t)$ и уравнение Абеля

$$\dot{x}=x^3+b_1(t)x^2+b_2(t)x+b_3(t)$$

с периодическими коэффициентами имеют соответственно не более двух и трех периодических решений (с учетом кратности). Обобщением этих фактов являются следующие ниже теоремы I и 2.

Рассмотрим множество всех одномерных периодических по времени дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=f(t,x),\ x\in I, \tag{I}$$

где $I\subset R$ – конечный или бесконечный интервал и $f(t+\omega,x)$ $\equiv f(t,x)(\omega>0)$.

Т е о р е м а I. Если вторая производная $f''_{xx}(t,x)$ непрерывна и сохраняет знак на $R\times I$, то уравнение (I) имеет не более двух периодических решений (с учетом кратности).

Т е о р е м а 2. Если третья производная $f'''_{xxx}(t,x)$ непрерывна и сохраняет знак на $R\times I$, то уравнение (I) имеет не более трех периодических решений (с учетом кратности).

2. Метод точечных отображений. Обозначим через $x(t)=\varphi(t,0,x)$ единственное решение уравнения (I) с начальным условием $x(0)=x_0$, а через $F_t(x_0)=\varphi(t,0,x_0)$ – отображение сдвига за время t. Так как фазовое пространство (t,x) уравнения (I) есть цилиндр, то между периодическими решениями уравнения (I) и неподвижными точками отображения $F_\omega(x_0)$ сдвига на период существует взаимно-однозначное соответствие: $F_\omega(x_0)=x_0$ тогда и только тогда, когда $\varphi(t,0,x_0)$ – периодическое решение (I).

Пусть $\varphi(t,0,a)$ – периодическое решение (I). Тогда оно определено на промежутке времени $[0,\omega]$. Рассмотрим максимальный интервал I_0 на оси x, содержащий точку a и такой, что любое решение $\varphi(t,0,x_0)$ или $x_0\in I_0$ определено по крайней мере на промежутке времени $[0,\omega]$. Так как интегральные кривые уравнения (I) не пересекаются и I_0 – максимальный такой интервал, то любое решение $\varphi(t,0,x_0)$, где x_0 не лежит на I_0, выходит на границу множества $R\times I$ за время $t<\omega$ (в частности, уходит на бесконечность, если I неограниченно). Следовательно, отображение $F_\omega(x_0)$ определено в точности на интервале I_0.

Рассмотрим также семейство отображений $F_t: I_0 \to R,\ t\in[0,\omega]$ (они, в силу сказанного, определены для всех $x_0\in I_0$).

3. Доказательство теоремы I. Предположим, что $f''_{xx}(t,x)$ непрерывна и сохраняет знак, и докажем, что в этом случае уравнение $F_\omega(x_0)=x_0$ имеет не более двух решений (с учетом кратности).

Вычислим

$$F'_t(x_0) = \frac{\partial F_t(x_0)}{\partial x_0} \text{ и } F''_t(x_0) = \frac{\partial^2 F_t(x_0)}{\partial x_0^2}.$$

Так как $F_0(x_0)=\varphi(0,0,x_0)\equiv x_0$, то из уравнения в вариациях

$$\dot{F}'_t = f'_x(t,F_t)F'_t \tag{2}$$

последовательно получим:

$$F'_t(x_0)=e^{\int_0^t f'_x(s,F_s(x_0))ds} \tag{3}$$

и

$$F''_t(x_0)=F'_t(x_0)\int_0^t f''_{xx}(s,F_s(x_0))F'_s(x_0)ds \tag{4}$$

(здесь и далее черта означает производную по начальному данному x_0, а точка – по времени t).

Так как $f''_{xx}(t,x)$ сохраняет знак, то из (3) и (4) получим (при $t=\omega$), что $F'_\omega(x_0)>0$ и $F''_\omega(x_0)$ сохраняет знак на I_0. Теперь утверждение теоремы I вытекает из следующей леммы.

Л е м м а I. Пусть отображение $F: I_0 \to R$ таково, что

I) $F\in C^3(I_0)$; 2) $F'(x)>0\ \ \forall x\in I_0$; 3) $F''(x)$ сохраняет знак на I_0. Тогда уравнение $F(x)=x$ имеет не более двух решений (с учетом кратности).

Доказательство. Предположим, что x_1, x_2, и x_3 – три последовательные невырожденные неподвижные точки отображения $F: F(x_i)=x_i,\ F'(x_i)\neq 1,\ \ i=1,2,3.$ Тогда функция $\psi(x)=\ln F'(x)$ принимает в точках x_1, x_2, и x_3 значения разных знаков и, следовательно, имеет на интервалах (x_1,x_2) и (x_2,x_3) два различных нуля. По теореме Ролля, между ними лежит нуль функции $\psi'(x)=\frac{F''(x)}{F'(x)}$, а, значит и $F''(x)$. Противоречие. Случаи кратных неподвижных точек рассматриваются аналогично (как вырождения данного).

Лемма I, а с ней и теорема I доказаны. Доказательство теоремы 2 сложнее и требует некоторых вспомогательных понятий.

4. Производная Шварца. Производной Шварца функции $F \in C^3(I_0)$ называется новая функция $(SF)(x)$, определяемая при $F'(x) \neq 0$ формулой:

$$(SF)(x) = \frac{F'''(x)}{F'(x)} - \frac{3}{2}\left[\frac{F''(x)}{F'(x)}\right]^2. \tag{5}$$

Она была введена Г.А.Шварцем для исследования конформных отображений комплексной плоскости и нашла применение в таких областях, как теория инвариантов дифференциальных уравнений и однолистные аналитические функции.

Неожиданную связь между производной Шварца и динамическим поведением отображения интервала в себя обнаружил Д.Зингер [2]. Он, в частности, выделил класс невзаимнооднозначных отображений интервала с отрицательной производной Шварца и показал, что такие отображения имеют не более чем конечное число устойчивых циклов.

Следующая лемма, по существу, вытекает из леммы 2.6 работы [2].

Л е м м а 2. Пусть отображение $F: I_0 \to R$ обладает свойствами I) и 2) леммы I и свойством 3'): производная Шварца $(SF)(x)$ сохраняет знак на I_0.

Тогда уравнение $F(x)=x$ имеет не более трех решений (с учетом кратности).

Доказательство. Из (5) вытекает, что если $F''(x_0)=0$, то $F'''(x_0)<0$ при $SF<0$ и $F'''(x_0)>0$ при $SF>0$. Поэтому функция $F'(x)$ (а значит, и $\ln F'(x)$) не имеет на I_0 локальных минимумов при $SF<0$ и локальных максимумов при $SF>0$. Далее следуем доказательству леммы I.

5. Доказательство теоремы 2. Составим производную Шварца по x_0 от функции $F_t(x_0)$: $\Phi(t,x_0)=(SF_t)(x_0)$, $(t,x_0)\in[0,\omega]\times I_0$. Непосредственным дифференцированием по t убеждаемся, что

$$(S\dot{F}_t)(x_0) = \frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,x_0) = \left(\frac{\dot{F}_t'}{F_t'}\right)''(x_0) - \left(\frac{\dot{F}_t'}{F_t'}\right)(x_0)\frac{F_t''(x_0)}{F_t'(x_0)} \tag{6}$$

Из уравнения в вариациях (2),

$$\frac{\dot{F}_t'}{F_t'} = f_x'(t,F_t),$$

откуда

$$\left(\frac{\dot F_t'}{F_t'}\right)' = f_{xx}''(t, F_t)F_t',$$

$$\left(\frac{\dot F_t'}{F_t'}\right)'' = f_{xxx}'''(t, F_t)(F_t')^2 + f_{xx}''(t, F_t)F_t''.$$

Подставив в (6) , получим:

$$\dot{S F_t} = f_{xxx}'''(t, F_t)(F_t')^2 + f_{xx}''(t, F_t)F_t'' - \frac{F_t''}{F_t'} f_{xx}''(t, F_t)F_t' =$$
$$= f_{xxx}(t, F_t)(F_t')^2.$$

Итак,

$$(S\dot F_t)(x_0) = f_{xxx}(t, F_t(x_0))[F_t'(x_0)]^2.$$

Так как $F_0(x_0) = \varphi(0, 0, x_0) \equiv x_0$ и, следовательно, $(SF_0)(x_0) \equiv 0$, то

$$(SF_\omega)(x_0) = \int_0^\omega f_{xxx}'''(\tau, F_\tau(x_0))[F_\tau'(x_0)]^2 d\tau.$$

Используя (3), получим окончательно

$$(SF_\omega)(x_0) = \int_0^\omega f_{xxx}''(\tau, F_\tau(x_0)) e^{2\int_0^\tau f_x'(s, F_s(x_0))ds} d\tau. \tag{7}$$

Из этой формулы видно, что если $f_{xxx}''(t, x)$ сохраняет знак на $[0, \omega] \times I$, то и $(SF_\omega)(x_0)$ сохраняет знак на I_0. Остается воспользоваться леммой 2.

6. Заключительные замечания. Пусть теперь $f_x'(t, x)$ сохраняет знак на $R \times I$. Тогда, как следует из (3), функция $\ln F'(x)$ также сохраняет знак на I_0. Отсюда получим, что отображение F_ω имеет не более одной неподвижной точки, то есть уравнение (I) имеет не более одного периодического решения. Это известный факт (см. [3]). Объединяя это замечание с доказанными утверждениями, получим следующее: если $f(t, x)$ периодична по t и ее n-ая производная $\frac{\partial^n f(t, x)}{\partial x^n}$, где $n = 1, 2$ или 3, сохраняет знак, то уравнение (I) имеет не более n периодических решений (с учетом кратности).

При $n=4$ это утверждение уже неверно. Опровергающий пример уравнения вида

$$\dot{x}=x^4+p_1(t)x^3+p_2(t)x^2+p_3(t)x+p_4(t)$$

с 2π -периодическими коэффициентами, имеющего 5 различных периодических решений, приведен в [I].

Литература

I. Плисс В.А. Нелокальные проблемы теории колебаний. М.-Л.: Наука, I964.

2. Singer D. Stable orbits and bifurcation of maps of the interval. - SIAM J. Appl. Math., v. 35, N2, 1978, p.p 260-267.

3. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М.: Иностранная литература, I962.

А.М. Тезин

ПЕРИОДЫ КОЛЕБАНИЙ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В статье методом нетопологического отображения с двузначными прообразами [5,6] вычисляются периоды колебаний, соответствующих замкнутым траекториям на фазовой плоскости. Уравнения этих траекторий предполагаются известными.

I. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=N(x,y),\quad \dot{y}=-M(x,y)+\lambda F(x,y), \tag{I}$$

где λ - параметр (не обязательно малый), M, N и F - дифференцируемые или непрерывные и опорно-дифференцируемые [8,9] в области $D\subset R^2(x,y)$ функции, (x_0, y_0) - такая изолированная в D точка, что $M(x_0,y_0)=N(x_0,y_0)=F(x_0,y_0)=0$; уравнение $Mdx+Ndy=0$ [7] является уравнением в полных дифференциалах, общий интеграл которого $W(x,y)=C$ дает функцию $z=W(x,y)$, которая осуществляет отображение

$$W: D\to R^2(x,z). \tag{2}$$