возмущенной двухточечной краевой задачи в пространстве $C[a,b]$.– В сб.: Приближенные методы исследования дифференц. уравнений и их приложения. Куйбышев: КГУ, 1983; с.9–19.

3. Васильев А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973.

4. Даугавет И.К. Введение в теорию приближения функций. – Ленинград; ЛГУ, 1977.

5. Красносельский М.А., Вайникко Г.М. и др. Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969.

6. Найфэ А. Методы возмущений. – М, 1976.

7. de Groen P.P.N., Hemker P.W. Error bounds for exponentially fitted methods applied to stiff two-point boundary value problems. – Numer. Anal. Singul. Perturb. Probl. London e.a. 1979, p. 217–240.

Г.С.Жукова, Н.П. Черных

НЕОДНОРОДНЫЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ В СЛУЧАЕ КРАТНОГО СПЕКТРА ПРЕДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Как извзстно, решение неоднородной линейной системы дифференциальных уравнений достаточно просто выражается через общее решение соответствующей однородной системы. Однако при построении последнего нередко приходится сталкиваться со значительными трудностями. Кроме того, может понадобиться такое частное решение неоднородной системы, которое имеет тот же характер, что и свободный член системы.

В настоящей работе строится частное решение сингулярно возмущенной линейной неоднородной системы

$$\varepsilon^h \frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x - \varepsilon^d f(t,\varepsilon)\theta^{\hat{\theta}(t,\varepsilon)}, \quad t \in R^+, \tag{I}$$

имеющее тот же характер, что и свободный член выражения (I). Рассмотрение ведется в банаховом пространстве E . Отдельно изучаются резонансный и нерезонансный случаи.

Пусть всюду в дальнейшем $B(E)$ и $G(E)$ - пространства всех линейных, соответственно, ограниченных и замкнутых операторов, действующих в E. Относительно коэффициентов уравнения (I) предполагаем:

I^0. $\hat{\theta}(t,\varepsilon)$ дифференцируема по t; функции $A(t,\varepsilon), f(t,\varepsilon)$ и $\theta(t,\varepsilon) = \dfrac{d\hat{\theta}}{dt}$ допускают представления

$$A(t,\varepsilon) = A_0(t) - \sum_{i\geq 1} \varepsilon^i A_i(t), \quad f(t,\varepsilon) = \sum_{i\geq 0} \varepsilon^i f_i(t), \tag{2}$$

$$\theta(t,\varepsilon) = \varepsilon^{-h} \sum_{i\geq 0} \varepsilon^i \theta_i(t);$$

2^0. $A_0 : R^+ \to G(E)$ и имеет при каждом t плотную в E не зависящую от t область определения ; $A_i : R^+ \to B(E)$ при $i \geq 1$;

3^0. $h \in N$, $\alpha \in R$;

4^0 Функции $A_i, f_i : R^+ \to E$ и $\theta_i : R^+ \to C\ (i \geq 0)$ достаточное число раз непрерывно дифференцируемы по t.

Сделаем в уравнении (I) замену переменных

$$x(t,\varepsilon) = y(t,\varepsilon) e^{\hat{\theta}(t,\varepsilon)}, \tag{3}$$

в результате которой для векторной функции $y(t,\varepsilon)$ получим уравнение

$$\varepsilon^h \frac{dy}{dt} + \theta y = Ay - \varepsilon^\alpha f$$

или, что тоже самое, уравнение

$$A(t) - \theta_0(t) I) y = H(t,\varepsilon) y + \varepsilon^\alpha f(t,\varepsilon), \tag{4}$$

где с учетом представлений (2) операторная функция $H(t,\varepsilon)$ имеет вид

$$H(t,\varepsilon) = \sum_{i\geq 1} \varepsilon^i H_i(t) \tag{5}$$

и

$$H_i = A_i + \theta_i I + \delta_{i,h} D, \quad Du = \frac{du}{dt}. \tag{6}$$

Заметим, что построение решений уравнения (4) будет существенно зависеть от значений скалярной функции $\theta_0(t)$. Здесь следует различать следующие два случая:

-резонансный, когда $\theta_0(t)$ при некотором t является собственным значением оператора $A_0(t)$;

-нерезонансный, когда $\theta_0(t)$ при всех t не имеет общих точек со спектром оператора $A_0(t)$.

Ниже будет показано как может быть построено частное решение уравнения (I) в каждом из этих случаев.

СЛУЧАЙ ОТСУТСТВИЯ РЕЗОНАНСА

В нерезонансном случае при каждом $t \in R^+$ оператор $C_0(t) = A_0(t) - \theta_0(t) I$ будет непрерывно обратим и уравнение (4) будет иметь единственное решение

$$y = \Gamma H y + \varepsilon^{\alpha} \Gamma f, \quad \text{где} \quad \Gamma(t) = (A_0(t) - \theta_0(t) I)^{-1}. \tag{7}$$

Но согласно (5) $H(t,0) \equiv 0$. Поэтому при достаточно малом $\varepsilon / |\varepsilon| < \|\Gamma H\|^{-1} /$ существует и ограничен оператор $(I - \Gamma H)^{-1}$, который может быть представлен в виде ряда

$$(I - \Gamma H)^{-1} = \sum_{K \geq 0} (\Gamma H)^K = \sum_{\nu \geq 0} \varepsilon^{\nu} B_{\nu}(t) \tag{8}$$

с коэффициентами: $B_0 = I$,

$$B_{\nu} = \sum_{K=1}^{\nu} \sum_{\substack{i_{K-1} = 1}}^{\nu - K + 1} \cdots \sum_{i_1 = 1}^{\nu - 1 - i_{K-1} - \dots - i_2} \Gamma_2 \prod_{\ell=1}^{K-1} (H_{i_{K-\ell}} \Gamma) H_{\nu - i_1 - \dots - i_{K-1}}. \tag{9}$$

(Выражение (9) является следствием (5) и формулы перемножения степенных рядов).

Таким образом из формулы (7) получаем

$$y(t,\varepsilon)=\varepsilon^{\alpha}(I-\Gamma H)^{-1}f. \tag{10}$$

Причем, с учетом (2) и (8) функция $y(t,\varepsilon)$ допускает представление

$$y(t,\varepsilon)=\varepsilon^{\alpha}\sum_{\nu\geq 0}\varepsilon^{\nu}y_{\nu}(t), \tag{11}$$

где

$$y_{\nu}(t)=\sum_{i=0}^{\nu}B_i(t)f_{\nu-i}(t). \tag{12}$$

Поэтому согласно замене (3) рассматриваемое уравнение (I) имеет частное решение вида

$$x(t,\varepsilon)=\varepsilon^{\alpha}\sum_{i\geq 0}\varepsilon^{i}y_i(t)e^{\hat{\theta}(t,\varepsilon)}. \tag{13}$$

Тем самым мы доказали следующее утверждение.

Т е о р е м а I. Пусть выполнены предположения I^0–4^0. Тогда в случае отсутствия резонанса неоднородное дифференциальное уравнение (I) имеет частное решение вида (I3), где векторные функции $y_i(t)$ находятся по формулам (9) и (I2).

Заметим, что приведенное доказательство теоремы I не зависит от структуры спектра оператора $A_0(t)$ (от числа его изолированных частей, от геометрической и алгебраической кратностей его собственных значений и т.п.), а требует лишь, чтобы $\theta_0(t)$ ни при каком t не являлось собственным значением оператора $A_0(t)$.

РЕЗОНАНСНЫЙ СЛУЧАЙ

Остановимся на изучении одного частного случая резонанса.

Предположим, что дополнительно к I^0–4^0 выполнены следующие условия:

5^0. При каждом $t\in R^+$ число $\theta_0(t)$ является изолированным собственным значением оператора $A_0(t)$, которому соответствует корневое подпространство конечной и не зависящей от t размерности $n\geq 1$, имеющее жорданов базис постоянной по t структуры;

6^0. При каждом $t \in R^+$ оператор $C_0(t) = A_0 - B_0(t)T$ является фредгольмовым индекса нуль и $\dim Ker\, C_0(t) = m$, $m \geq 1$.

Пусть $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)$ и $\psi_1(t), \ldots, \psi_m(t)$ – базисные векторы в $Ker\, C_0(t)$ и $Coker\, C_0(t)$ соответственно; $\Gamma: R^+ \to B(E)$ обобщенный обратный к оператору $C_0(t)$ (см. [3, с.478]); $\langle z, \psi \rangle$ – значение линейного функционала $\psi \in E^*$ на вектора $z \in E$.

Напомним, что оператор $\Gamma(t)$ обладает той же гладкостью, что и $C_0(t)$. Кроме того векторы $\{\Gamma^s \varphi_j\}$, $s = \overline{0, n_j - 1}$, при каждом фиксированном t образуют для элемента $\varphi_j \in Ker\, C_0(t)$ жорданову цепочку некоторой длины n_j. Причем, в силу предположения 5^0 оператор $C_0(t)$ имеет при каждом t полный жорданов набор из собственных и присоединенных векторов (см. [I, с.427]). Поэтому без ограничения общности можно считать φ_j и ψ_i $(i, j = \overline{1, m}$ уже выбранными так, что $n_j (j = \overline{1, m})$ не зависит от t; $n_1 + \ldots n_m = n$ и

$$\langle \Gamma^s \varphi_j, \psi_i \rangle = \delta_{ij}\, \delta_{s, n_j - 1} \quad (s \geq 0;\ i; j = \overline{1, m}), \tag{I4}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Заметим, что с учетом свойств обобщенного обратного оператора $\Gamma(t)$ решение уравнения (I), в случае его разрешимости, находится по формуле

$$y = \Gamma H y + \varepsilon^\alpha \Gamma f + \sum_{j=1}^{m} b_j \varphi_j,$$

откуда при достаточно малом ε

$$y = \varepsilon^\alpha (I - \Gamma H)^{-1} \Gamma f + \sum_{j=1}^{m} \langle H (I - \Gamma H)^{-1} b_j \varphi_j . \tag{I5}$$

Фигурирующие здесь скалярные функции $b_j(t, \varepsilon)$ $(j = \overline{1, m})$ будем подбирать так, чтобы выполнялись условия разрешимости уравнения (4), которые с учетом (I5) имеют вид

$$\varepsilon^\alpha \langle (I + H (I - \Gamma H)^{-1} \Gamma) f, \psi_i \rangle + \sum_{j=1}^{m} \langle H (I - \Gamma H)^{-1} b_j \varphi_j, \psi_i \rangle = 0 \tag{I6}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m).$$

Для того, чтобы выяснить структуру решений системы (I6), проделаем ряд предварительных преобразований.

Лемма I. Операторная функция $F=H(I-\Gamma H)^{-1}$ допускает представление

$$F(t,\varepsilon)=\sum_{\nu\geq 1}\varepsilon^{\nu}L_{\nu 0}(t), \tag{I7}$$

где

$$L_{\nu 0}=\sum_{k=1}^{\nu}\sum_{i_{k-1}=1}^{\nu-k+1}\dots\sum_{i_1=1}^{\nu-1-i_{k-1}-\dots-i_2}\prod_{\ell=1}^{k-1}(H_{i_{k-\ell}}\Gamma)H_{\nu-i_1-\dots-i_{k-1}}. \tag{I8}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$(I-\Gamma H)^{-1}=\sum_{k\geq 0}(\Gamma H)^k,\ \Gamma F=\sum_{k\geq 1}(\Gamma H)^k.$$

Иш формулы (5) индукцией по $k\geq 1$ приходим к выражению

$$(\Gamma H)^k=\sum_{\nu\geq k}\varepsilon^{\nu}\sum_{i_{k-1}=1}^{\nu-k+1}\dots\sum_{i_1=1}^{\nu-1-i_k-\dots-i_2}\Gamma\prod_{\ell=1}^{k-1}(H_{i_{k-\ell}}\Gamma)H_{\nu-i_1-\dots-i_{k-1}},$$

которое и влечет за собой справедливость утверждений (I7)-(I8), что и доказывает лемму I.

Лемма 2. Для любой скалярной функции b_j справедливо равенство

$$L_{\nu 0}b_j=b_jL_{\nu 0}+\sum_{a=1}^{[\nu/k]}b_j^{(a)}L_{\nu-ah,a},\ b_j^{(a)}=\frac{d^a b_j}{dt^a}, \tag{I9}$$

где

$$L_{0q}=\Gamma^{q-1};$$
$$L_{pq}=\sum_{k=1}^{p}\sum_{i_{k-1}=1}^{p-k+1}\dots\sum_{i_1=1}^{p-1-i_{k-1}-\dots-i_2}\sum_{J_k=1}^{q+1}\dots\sum_{J_1=1}^{q+k-J_k-\dots-J_2}\Gamma^{J_k-1}\times \tag{20}$$

$$\times \prod_{\ell=1}^{k-1} (H_{i_{k-\ell}} \Gamma^{J_{k-\ell}}) H_{p-i_1-\ldots-i_{k-1}} \Gamma^{q+k-J_1-\ldots-J_k} . \tag{21}$$

На доказательстве леммы 2 мы не будем останавливаться, так как оно проводится по аналогии с доказательствами леммы 2–3 в [2].

Нетрудно видеть, что в силу формул (2) и (17)

$$H(I-\Gamma H)^{-1}\Gamma f = \sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^{\nu} \sum_{k=0}^{\nu-1} L_{\nu-k,0} \Gamma f_k .$$

Поэтому с учетом (19) условия разрешимости (16) могут быть представлены в виде

$$\varepsilon^{\alpha} \sum_{\nu\geq 0} \varepsilon^{\nu} g_{\nu i}(t) + \sum_{j=1}^{m} \Big[\sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^{\nu} \langle L_{\nu 0} \varphi_j , \psi_i \rangle b_j +$$

$$+ \sum_{\nu\geq h} \varepsilon^{\nu} \sum_{a=1}^{[\nu/h]} \langle L_{\nu-ah,a} \varphi_j , \psi_i \rangle b_j^{(a)} \Big] = 0 , \tag{22}$$

где

$$g_{\nu i} = \langle f_\nu , \psi_i \rangle + \sum_{k=0}^{\nu-1} \langle L_{\nu-k,0} \Gamma f_k , \psi_i \rangle \quad (\nu \geq 0) .$$

Запишем систему (22) в векторной форме

$$\varepsilon^{\alpha} \sum_{\nu\geq 0} \varepsilon^{\nu} g_{\nu}(t) + \sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^{\nu} \ell_{\nu 1}(t) B(t,\varepsilon) = 0 , \tag{23}$$

где $g_\nu(t)$ и $B(t,\varepsilon)$ – m -мерные векторные функции, i -е координаты которых соответственно равны $g_{\nu i}(t)$ и $b_j(t,\varepsilon)$ и

$$\ell_{\nu 1} = \sum_{a\geq 0}^{[\nu/h]} \| \langle L_{\nu-ah,a} \varphi_j , \psi_i \rangle \|_{i,j=\overline{1,m}} D^{a} .$$

Предположим, что коэффициенты уравнения (I) таковы, что при некоторых натуральных числах $a \geqslant 0$ и $0 \leqslant b < h$ выполнены условия:

$$g_\nu(t) \equiv 0 \qquad \text{при} \quad \nu < a \quad \text{и} \quad g_a(t) \not\equiv 0; \tag{24}$$

$$\ell_{\nu 1}(t) \equiv 0 \qquad \text{при} \quad \nu < b \quad \text{и} \quad \det \ell_{b1}(t) \neq 0 \quad (t \in R^+). \tag{25}$$

Тогда в силу метода диаграммы Ньютона (см. [I, § 2]), применяемого к уравнению (23), векторная функция $B(t,\varepsilon)$ имеет вид

$$B(t,\varepsilon) = \varepsilon^{\alpha + a - b} \sum_{\nu \geqslant 0} \varepsilon^\nu B_\nu(t), \tag{26}$$

т.к. в рассматриваемом случае диаграмма состоит из одного отрезка, соединяющего точки $(0, \alpha + a)$ и $(1, b)$, откуда следует, что соответствующее определяющее уравнение имеет при всех t единственный (и, следовательно, простой) корень $B_0(t) = -\ell_{b1}^{-1}(t) g_a(t)$.

Для нахождения последующих коэффициентов разложения (26) может быть применен метод неопределенных коэффициентов.

Действительно, подставив выражение (26) в уравнение (23) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметра ε, приходим к соотношениям

$$g_{\nu+a} + \sum_{k=0}^{\nu} \ell_{\nu-k+b,1} B_k = 0 \qquad (\nu \geqslant 0),$$

откуда в силу предположения непрерывной обратимости оператора $\ell_{b1}(t)$ при всех t (см.(25)) и обозначения $\ell_{\nu 1}$ получаем рекуррентную формулу для последовательного определения векторных функций $B_k(t)$:

$$B_\nu = -\ell_{b1}^{-1} \Big[g_{\nu+a} + \sum_{k=0}^{\nu-1} \| \langle L_{\nu-k+b,0} \varphi_j \cdot \psi_i \rangle \|_{i,j=\overline{1,m}} B_k + \tag{27}$$

$$+ \sum_{k=0}^{\nu-1} \sum_{a=1}^{[(\nu-k+b)/h]} \| \langle L_{\nu-k+b-ah,a} \varphi_j \cdot \psi_i \rangle \|_{i,j=\overline{1,m}} B_k^{(a)} \Big] \qquad (\nu \geqslant 1).$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Т е о р е м а 2. Пусть выполнены предположения 1^0–6^0 и условия (24),(25). Тогда неоднородное дифференциальное уравнение (I) в случае резонанса имеет частное решение вида (I5), где векторная функция $B(t,\varepsilon)=colom(b_1(t,\varepsilon),\dots,b_m(t,\varepsilon))$ находится по формулам (26),(27).

Литература

I. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. - М.: Наука, 1969, - 528 с.

2. Жукова Г.С. Методы возмущений в задаче асимптотического интегрирования сингулярно возмущенных линейных систем: Препринт 83.38.- Киев: Изд-во Ин-та математики АН УССР, 1983. - 40 с.

3. Плоткин Я.Д., Турбин А.Ф. Обращение возмущенных на спектре нормально разрешимым операторов. - Укр.Мат.Журн., 1975, т.27, № 4, с.477-486.