нию стационарных уравнений Навье-Стокса.- ЖВММФ, 1968, т.8, № 2, с.393-402.

3. Матеева Э.И., Пальцев Б.В. О разделении областей при решении краевых задач для уравнения Пуассона в областях сложной формы.- ЖВММФ, 1973, т.13, № 6, с.1441-1452.

4. Непомнящий А.А., Тарунин Е.Л. Двухполовой метод расчета течений вязкой жидкости со свободной поверхностью. - Тр.VI Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости. Новосибирск, 1978, с.197-207.

5. Осмоловский В.Г., Ривкинд В.Я. О методе разделения областей для уравнений с разрывными коэффициентами.- ЖВММФ, 1981, т.21, № 1, 101-104.

6. Отрощенко И.В., Федоренко Р.Н. О приближенном решении стационарных уравнений Навье-Стокса. М.: ИПМ, 1975.

7. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М., 1978.

8. Тарунин Е.Л. Оптимизация неявных схем для уравнений Навье-Стокса в переменных функции тока и вихря скорости. - Тр.V Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости. Новосибирск, 1975, с.3-26.

Б.Д.Гельман, Ю.Е.Гликлих

МНОГОЗНАЧНЫЙ ИНТЕГРАЛ ИТО

В настоящей работе дается конструкция многозначного аналога интеграла Ито и исследуются его свойства. С помощью введенного понятия удается рассмотреть стохастические дифференциальные включения и получить утверждения о существовании их решений.

В теории стохастических уравнений, как и в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, включения возникают естественно, например, в случае управляемых систем или при исследовании уравнений с разрывными коэффициентами (так называемые ослабленные решения стохастических уравнений). Однако в известных авторам работах (см., например, [1-3] и приведенную там библиографию) рассматривались стохастические дифференциальные включения лишь с однозначной непрерывной диффузией, что видимо, объясняется используемым аппаратом и отсутствием конструкции многозначного интеграла Ито.

I. Многозначные стохастические интегралы

Пусть $\mathcal{U}$ – метрическое пространство, $B_{\mathcal{U}}$ – σ – алгебра борелевских множеств метрического пространства $\mathcal{U}$. Пусть (T, Σ_T) – измеримое пространство, $F: T \to \mathcal{U}$ – многозначное отображение (м-отображение), т.е. для каждого $t \in T$ определено множество $F(t) \subset \mathcal{U}$ (образ точки t); м-отображение F называется измеримым, если $F_-^{-1}(B) = \{t \in T \mid F(t) \cap B \neq \phi\} \in \Sigma_T$ для всякого $B \in B_T$.

Отображение $f: T \to \mathcal{U}$ называется сечением многозначного отображения F, если $f(t) \in F(t)$ для всех $t \in T$. Если f – измеримое отображение, то оно называется измеримым сечением.

Пусть E – банахово пространство: обозначим через $K(E)$ множество непустых компактов в E; м-отображение $F: T \to E$, имеющее компактные образы, будем обозначать $F: T \to K(E)$.

Л е м м а I. Пусть $F: T \to K(R^n)$ – многозначное отображение. Для того, чтобы F было измеримо, необходимо и достаточно, чтобы для любой точки $x \in R^n$ функция $\varphi_x(t) = \rho(x, F(t))$ была измеримой.

Доказательство. Рассмотрим множество $L_a = \{t \mid t \in T, \varphi_x(t) < a\}$. Очевидно, что $L_a = F_-^{-1}(B_a(x)) = \{t \mid t \in T, F(t) \cap B_a(x) \neq \phi\}$, где $B_a(x)$ – открытый шар радиуса a с центром в x. Из равенства этих двух множеств вытекает утверждение леммы.

Пусть (Ω, F, P) – вероятностное пространство. Многозначным случайным вектором (м-случайным вектором) назовем м-отображение $F: \Omega \to R^n$, если оно измеримо относительно $\mathfrak{F}$ и B_{R^n}; м-случайный процесс m каждому моменту $t \in [S, T]$ ставит в соответствие м-случайный вектор $F(t)$.

м-случайный процесс $m: [S, T] \to R^n$ измерим, если м-отображения m измеримо относительно σ – алгебр $B_{[S,T]} \times \mathfrak{F}$ и B_{R^n}.

Пусть задано неубывающее семейство σ -подалгебр $\mathfrak{F}_t$ σ - алгебры $\mathfrak{F}$, $t \in [S, T]$. Пусть m – измеримый случайный процесс. Он называется неупреждающим относительно семейства $\mathfrak{F}_t$, если существует м-процесс $\hat{m}$, такой что

I) $m(\cdot, \omega) = \hat{m}(\cdot, \omega)$ с вероятностью I;

2) $\hat{m}(t, \cdot)$ является $\mathfrak{F}_t$ измеримым для каждого t.

Т е о р е м а I. Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ – вероятностное пространство, $\mathfrak{F}_t$ – неубывающее семейство σ -подалгебр σ -алгебры $\mathfrak{F}$.

Многозначное отображение $m:[S,T]\times\Omega\to K(R^n)$ тогда и только тогда является измеримым случайным процессом, неупреждающим относительно семейства $\mathcal{F}_t$, когда существует счетное множество $\{f_m\}$ измеримых сечений m, которые являются неупреждающими относительно семейства $\mathcal{F}_t$, и таких, что значения $\{f_m(t)\}$ плотны в $m(t)$ для каждого $t\in[S,T]$.

Доказательство.

Необходимость. Пусть $Q=\{z_1,\dots,z_n,\dots\}$ – некоторое счетное подмножество в R^n, состоящее из точек с рациональными координатами. Построим последовательность отображений $\{\psi_k\}$, $\psi_k:[S,T]\times\Omega\to R^n$. Будем строить ее по индукции. Положим $\psi_1(t,\omega)=z_i$, если при данных (t,ω) i – наименьший номер, такой что $\varphi_{z_i}(t,\omega)=\rho(z_i,m(t,\omega))<\frac{1}{2}$. Если ψ_k уже построено, то ψ_{k+1} определяется следующим образом: $\psi_{k+1}(t,\omega)=z_i$ если i – наименьший номер такой, что $\varphi_{z_i}(t,\omega)=\rho(z_i,m(t,\omega))\leqslant\frac{1}{2^{k+1}}$ и $\rho(\psi_k(t,\omega),z_i)\leqslant\frac{1}{2^{k-1}}$, т.е. $\psi_{k+1}(t,\omega)=z_i$, где i – наименьший номер точки из Q, лежащей в множестве $Q\cap B_{\frac{1}{2^{k+1}}}(\psi_k)\cap B_{\frac{1}{2^{k+1}}}(m(t,\omega))$.

Покажем теперь, что отображения ψ_k измеримы. Для этого заметим, что в силу леммы I множества $\Delta_i(a)=\{(t,\omega)/(t,\omega)\in[S,T]\times\Omega,\varphi_{z_i}(t,\omega)<a\}$ измеримы. Тогда функция ψ_1 измерима, так как $\{(t,\omega)|(t,\omega)\in[S,T]\times\Omega,\psi_1(t)=z_i\}=\Delta_i(\frac{1}{2})\setminus\bigcup_{p<i}\Delta_p(\frac{1}{2})$ – измеримое множество. Предположим ψ_k измеримой, получаем измеримость ψ_{k+1} из следующего равенства: $\{(t,\omega)/(t,\omega)\in[S,T]\times\Omega,\psi_{k+1}(t,\omega)=z_i\}=$

$$=\Delta_i\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)\setminus\Big[\{(t,\omega)/\rho(\psi_k(t,\omega),z_i)>\frac{1}{2^{k-1}}\}\cup\Big(\bigcup_{p<i}\Big(\Delta_p\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)\cap$$

$$\cap\{(t,\omega)/\rho(\psi_p(t,\omega),z_k)\leqslant\frac{1}{2^{k-1}}\}\Big)\Big)\Big].$$

Так как для любого $(t,\omega)\in[S,T)\times\Omega$ имеем $\rho(\psi_k(t,\omega),\psi_{k+1}(t,\omega))\leqslant\frac{1}{2^{k-1}}$ то последовательность ψ_k равномерно сходится к некоторому измеримому отображению ψ_Q. Поскольку $\rho(\psi_k(t,\omega)m(t,\omega))\leqslant\frac{1}{2^{k+1}}$ и множества $m(t,\omega)$ замкнуты, получаем, что для любых (t,ω), $\psi_Q(t,\omega)\in m(t,\omega)$, т.е. ψ_Q является измеримым сечением m.

Аналогично, если мы зафиксируем $t_0\in[S,T]$ и рассмотрим м-отображение $m(t_0,\cdot):\Omega\to R^n$, то оно является измеримым относительно $\mathcal{F}_{t_0}$. Следовательно, $\psi_k(t_0,\cdot):\Omega\to R^n$ также будут измеримыми относительно этой σ-алгебры. Тогда и предельное отображение

$\psi_Q(t_{0},\cdot)$ является измеримым относительно $\mathcal{F}_{t_0}$, т.е. ψ_Q является неупреждающим.

Итак, каждому счетному всюду плотному подмножеству $Q\subset R^n$, состоящему из точек с рациональными координатами, можно сопоставить измеримое сечение ψ_Q, удовлетворяющее условиям теоремы.

Отметим, что если при некоторых $(t,\omega)\in[S,T]\times\Omega$ и $x\in m(t,\omega)$ имеем, что $\rho(x,z_1)\leqslant \frac{1}{2^k}$, то $\psi_k(t,\omega)=z_1$. Следовательно,

$$\rho(x,\psi_Q(t,\omega))\leqslant\rho(x,\psi_k(t,\omega))+\rho(\psi_k(t,\omega)\psi_Q(t,\omega))\leqslant\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k-2}}.$$

Пусть теперь $\{Q_m\}$ – последовательность счетных всюду плотных подмножеств в R^n, состоящих из точек с рациональными координатами, построенная по следующему правилу. Если $Q_1=\{z_1,z_2,\dots,z_\ell,\dots\}$, то $Q_m=\{z_{m+1},z_{m+2},\dots,z_{m+\ell},\dots\}$. Тогда последовательность отображений $\{f_m\}$, $f_m=\psi_{Q_m}$ является искомой. Действительно, если заданы (t,ω), $x\in m(t,\omega)$, целое $k>0$, то можно найти номер m такой, что $\rho(z_m,x)\leqslant\frac{1}{2^k}$, следовательно, $\rho(x,\psi_{Q_m}(t,\omega))\leqslant\frac{1}{2^{k-2}}+\frac{1}{2^k}$.

Достаточность. Пусть $x\in R^n$, $\{f_m\}$ – счетное семейство измеримых сечений m, удовлетворяющих условию теоремы.

Тогда для любых $(t,\omega)\in[S,T)\times\Omega$ имеем $\varphi_x(t,\omega)=\rho(x,m(t,\omega))=$ $=\inf\limits_m\rho(x,f_m(t,\omega))$, следовательно, φ_x – измеримое отображение и $\varphi_x(t_{0},\cdot)$ измеримо относительно $\mathcal{F}_{t_0}$. Утверждение теоремы вытекает теперь из леммы I.

В дальнейшем для простоты изложения ограничимся случаем одномерных случайных процессов. Обобщение на многомерный случай не вызывает никаких трудностей и проводится стандартными методами.

Пусть $(\Omega,\mathcal{F},P)$ – вероятностное пространство, на котором определено броуновское движение W_t. Обозначим через $\{\mathcal{F}_t\}$ возрастающее семейство σ – алгебр, с которыми процесс W_t согласован, т.е. является неупреждающим по отношению к $\mathcal{F}_t$ и для любых $S<\tau<$ $<t\leqslant T$ приращение W_t-W_τ не зависит от $\mathcal{F}_\tau$.

Пусть $m:[S,T]\times\Omega\to K(R^1)$-м-случайный процесс, неупреждающий относительно $\mathcal{F}_t$ и удовлетворяющий следующим условиям: существует неупреждающий случайный процесс $\ell:[S,T]\times\Omega\to R^n$, такой, что почти наверное $|m(t,\omega)|\leqslant|\ell(t,\omega)|$ и $\int_0^T|\ell(t,\cdot)|^2dt<\infty$.

Определение I. Многозначным интегралом $\int_0^t m(\tau,\omega)d\tau$ назовем множество $\left\{\int_0^t f(\tau,\omega)d\tau\right\}$ интегралов от измеримых сечений f м-процесса m, удовлетворяющих условию согласования с семейством.

Определение 2. Многозначным интегралом Ито $\int_0^t m(\tau,\omega)dw_\tau$ назовем множество $\left\{\int_0^t f(\tau,\omega)dw_\tau\right\}$ интегралов Ито от измеримых сечений f процесса m, удовлетворяющих условию согласования с σ -алгеброй $\mathcal{F}_t$.

II. Свойства многозначных интегралов

Для исследования построенных многозначных интегралов нам понадобится следующее техническое утверждение, играющее в дальнейшем основную роль.

Рассмотрим прямое произведение $\Delta=[0,T]\times\Omega$, σ -алгебру $B_{[0,T]}\times\mathcal{F}$, где $B_{[0,T]}$ – борелевская σ -алгебра на $[0,T]$, и меру P', которая является прямым произведением лебеговой меры на $[0,T]$ и вероятности P.

Л е м м а 2. Пусть $\{y_i(t,\omega)\}_{i=1}^{\infty}$ – случайные процессы, для которых существует суммируемая функция $\psi(t,\omega)>0$, такая, что почти наверное по мере P' на Δ выполняется неравенство

$$|y_i(t,\omega)|_{i=1}^{\infty}\leqslant\psi(t,\omega),\text{ и } M\int_0^T\psi(\tau,\omega)d\tau<\infty.$$

Тогда

I) Существует двойная последовательность неотрицательных чисел $\{\lambda_{ik}\}_{i=1\,k=1}^{\infty\,\infty}$ такая, что $\sum_{k=i}^{\infty}\lambda_{ik}=1$ для каждого i, $\lambda_{ik}=0$ для $k>k_0(i)$ и последовательность $\tilde{y}_i(t,\omega)=\sum_{k=i}^{\infty}\lambda_{ik}y_k(t,\omega)$ сходится почти наверное по мере P' на Δ к некоторому измеримому случайному процессу $y(t,\omega)$.

2) Если процессы $y_i(t,\omega)$ – неупреждающие относительно семейства неубывающих σ -алгебр $\mathcal{F}_t$, то процесс $y(t,\omega)$ также неупреждающий относительно $\mathcal{F}_t$.

Доказательство первой части леммы аналогично известному доказательству подобного утверждения для случая $\Delta=[0,T]$ (см. например [4] и приведенную там библиографию). Модификация доказательства для данного случая связана с переходом от отрезка $[0,T]$ к произвольному измеримому пространству. Вторая часть утверждения леммы просто доказывается с использованием стандартной техники теории случайных процессов.

В дальнейшем всюду будем предполагать, что образы $m(t,\omega)$ выпуклы.

Т е о р е м а 2. Пусть $y_i(t,\omega)$ – последовательность сечений м-случайного процесса m , существование которых установлено в теореме I. Пусть числа $M\int_0^T y_i(\tau,\omega)d\tau$ сходятся к некоторому z . Тогда существует измеримое сечение $y(t,\omega)$ процесса m такое, что $M\int_0^T y(\tau,\omega)d\tau = z$.

Доказательство. Как в лемме 2, построим процессы $\tilde{y}_i(t,\omega)$, и пусть $y(t,\omega)$ - соответствующий предельный процесс. Из выпуклости образов m и из леммы 2 следует, что $\tilde{y}_i(t,\omega)$ - сечения m , измеримые и неупреждающие относительно F_t . Так как образы m замкнуты, то $y(t,\omega)$ - также измеримое сечение, неупреждающее относительно F_t . Из свойств последовательности $\{\lambda_{ik}\}$ следует, что $M\int_0^T y(\tau,\omega)d\tau = \lim_{i\to\infty} M\int_0^T y_i(\tau,\omega)d\tau = z$.
Теорема доказана.

Т е о р е м а 3. Множества $\int_0^t m(\tau,\omega)d\tau$ и $\int_0^t m(\tau,\omega)dw_\tau$ выпуклы.

Это утверждение следует из выпуклости образов $m(t,\omega)$ и линейности интегралов.

Ш. Стохастические дифференциальные включения

Используя многозначные стохастические интегралы, можно определить понятие стохастического дифференциального включения с многозначным сносом и диффузией. Как и стохастические дифференциальные уравнения, они имеют строгий математический смысл только в интегральной форме. Отметим, что стохастические дифференциальные включения с однозначной диффузией рассматривались в работах [I-3] (см.также приведенную в этих работах библиографию).

Пусть заданы полунепрерывные сверху отображения $A(t,x)$, $B(t,x)$, действующие из R^2 в R^1 и имеющие выпуклые образы (основные понятия теории многозначных отображений см., например, в [5]).

Стохастическим дифференциальным включением будем называть выражение вида

$$x(t,\omega)\in x_0+\int_0^t A(\tau,x(\tau,\omega))d\tau+\int_0^t B(\tau,x(\tau,\omega)dw_\tau, \qquad (I)$$

где w_t - винеровский процесс.

Определение 3. Будем говорить, что включение (I) имеет слабое решение, если существует вероятностное пространство, процесс $x(t,\omega)$ и винеровский процесс w_t на этом пространстве, для которых почти наверное выполнено (I).

В данном случае термин "слабое" соответствует общей терминологии теории стохастических дифференциальных уравнений.

Важным примером стохастических дифференциальных включений являются включения, порожденные стохастическими дифференаиальными уравнениями с разрывными коэффициентами. Такие включения для уравнений с непрерывной диффузией и измеримым сносом исследовались, например, в работах [I,2].

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$x(t,\omega)=x_0+\int_0^t a(\tau,x(\tau,\omega))d\tau+\int_0^t b(\tau,x(\tau,\omega))dw_\tau, \qquad (2)$$

где коэффициенты $a(t,x)$, $b(t,x)$ удовлетворяют условию локальной ограниченности без предположения непрерывности, измеримости, невырожденности и т.д. Рассмотрим множества

$$A(t,x)=\bigcap_{\delta>0,N}\overline{co}\{a(\tau,y)\,|\,|t-\tau|+|x-y|<\delta,(\tau,y)\notin N\},$$

$$B(t,x)=\bigcap_{\delta>0,N}\overline{co}\{b(\tau,y)\,|\,|t-\tau|+|x-y|<\delta,(\tau,y)\notin N\},$$

где N пробегает множества лебеговой меры нуль, $\overline{co}$ означает замкнутую выпуклую оболочку. Аналогично [5, лемма I] можно показать, что многозначные отображения $A(t,x)$, $B(t,x)$ полунепрерывны сверху.

Определение 4. Слабое решение включения

$$x(t,\omega)\in x_0+\int_0^t A(\tau,x(\tau,\omega))d\tau+\int_0^t B(\tau,x(\tau,\omega))dw_\tau$$

называется ослабленным решением стохастического дифференциального уравнения (2).

Т е о р е м а 4. Пусть м-отображения $A, B: R^2\to K(R^1)$ (i) имеют выпуклые образы при всех $t,x\in R^1$; (ii) являются полунепрерывными сверху по совокупности переменных; (iii) удовлетворяют условию Ито, т.е. при некотором $K>0$ и всех $t,x\in R^1$ выполняется неравенство

$$\sup_{a\in A(t,x)}|a|+\sup_{b\in B(t,x)}|b|<K(1+|x|).$$

Тогда включение (I) имеет слабое решение.

Идея доказательства теоремы 5 сводится к следующему. Рассмотрим последовательность $a_i(t,x)$, $b_i(t,x)$ непрерывных однозначных ε_i -аппроксимаций многозначных отображений $A(t,x)$, $B(t,x)$

соответственно, при $i \to \infty, \varepsilon_i \to 0$. Эти аппроксимации обладают тем свойством, что графики $a_i(t,x), b_i(t,x)$ находятся в ε_i -окрестности графиков $A(t,x), B(t,x)$ соответственно. Существование таких аппроксимаций доказано, например, в работе [7] . Стохастические дифференциальные уравнения, имеющие снос $a_i(t,x)$ и диффузию $b_i(t,x)$, обладают слабыми решениями $x_i(t,\omega)$, причем в условиях теоремы множество мер на пространстве траектории, соответствующих этим решениям, слабо компактно, так как все $a_i(t,x)$, $b_i(t,x)$ удовлетворяют условию ИТО с одной и той же константной K [8] . Выберем подпоследовательность $x_i(t,\omega)$, для которой соответствующая последовательность мер слабо сходится к мере, соответствующей некоторому процессу $x(t,\omega)$. Процесс $x(t,\omega)$ и является искомым решением. Это доказывается с помощью мартингального подхода (см., например, [8,9]). Мы строим сечения $a(t,x)$, $b(t,x)$ отображений $A(t,x), B(t,x)$ соответственно используя лемму 2 и показываем, что процессы $x(t,\omega)-\int_0^t a(\tau,x(\tau,\omega))d\tau$ и $(x(\tau,\omega)-\int_0^t a(\tau,x(\tau,\omega))d\tau)^2-\int_0^t b^2(\tau,x(\tau,\omega))d\tau$ являются мартингалами.

Следствие. Если коэффициенты стохастического дифференциального уравнения (2) удовлетворяют условию ИТО, то уравнение (2) имеет ослабленное решение.

Литература

1. Conway E.D. Stochastic equations with discontinuous drift.– Trans. Amer. Math. Soc., 1971, v. 157, No 1, pp 235–245.

2. Лебедев В.А. О единственности ослабленного решения системы стохастических дифференциальных уравнений.– Теория вероятн. и ее примен., 1978, т.23, вып.I, с.153–161.

3. Da Prato G., Iannelli M., Tubaro L. Dissipative functions and finite dimensional stochastic differential equations – J. Math. pures et appl., 1978, v. 57, pp 173–180.

4. Lasota A., Opial Z. An application of the Kakutani – Ky Fan theorem in the theory of ordinary differential equations. – Bull. Acad. pol. sci., Ser. sci. math., astron. et phys., 1965, t. 13, No 11–12, pp 781–786.

5. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Многозначные отображения. – В кн.: Математический анализ, т.19.

8–6501

(Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР). М., 1982, с.127-231.

6. Гельман Б.Д., Гликлих Ю.Е. Двухточечная краевая задача в геометрической механике с разрывными силами. - ПММ, 1980, т.44, в.3, с.565-569.

7. Lasota A., Opial Z. An approximation theorem for multi-valued mappings. - Podst. sterow., 1971, v.1., No 1 pp 71-75.

8. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов, т.3, М.: Наука, 1975.

9. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Киев, Наукова думка, 1982.

С.В. Дворянинов

ПРИМЕРЫ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ИМЕЮЩИХ АВТОВОЛНОВЫЕ РЕШЕНИЯ

В литературе отмечается необходимость изучения математических моделей колебательных процессов, учитывающих распределенность колебаний и во времени, и в пространстве [1,2]. Ниже указаны параболические системы вида

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} = K\frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial x^2} + F(\vec{w}, x),$$

для которых первая краевая задача имеет периодическое по t решение. Так как в уравнения переменная t явно не входит, эти решения можно назвать автоволновыми. Возможность конструкции таких систем была указана проф. М.В.Федорюком.

Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k_1\frac{\partial^2 u}{\partial x_2} + v + k_1 u \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= k_2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - u - v + \sin x \cdot \operatorname{sgn} v + k_2 v \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

в которой $t \geqslant 0, 0 \leqslant x \leqslant \pi$ и неизвестные скалярные функции $u(x,t), v(x,t)$ удовлетворяют граничным условиям

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=\pi} = v\big|_{x=0} = v\big|_{x=\pi} = 0. \qquad (2)$$