9. Соболев В.А. Об интегральных многообразиях сингулярно возмущенных систем в одном критическом случае. - Дифференциальные уравнения. Куйбышев: КГУ, 1976, с.63-71.

10. Стрыгин В.В., Фридман Э.М. Об асимптотическом представлении интегральных многообразий сингулярно возмущенных функционально-дифференциальных уравнений. - В кн.: Приближенные методы исследования дифференциальных уравнений и их приложения. Куйбышев: КГУ, 1982, с. 133-141.

11. Плисс В.А. Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1977, 304 с.

С.О.Стрыгина

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОЛИНОМОВ В МЕТОДЕ ГАЛЕРКИНА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим краевую задачу

$$L_\varepsilon u \equiv -\varepsilon u'' + p(x) u' = q(x, u) \tag{1}$$

$$u(-1) = u(1) = 0 \tag{2}$$

с малым положительным параметром ε при старшей производной. Известно [3,6], что характерной особенностью решения такого рода краевых задач является наличие пограничного слоя. В последнее время интенсивно развиваются численные методы решения сингулярно возмущенных краевых задач, и среди них - метод Галеркина, которому посвящен ряд работ (см., напр., [1,2,7]). Базисные функции в этих работах конструировались из сплайнов и функций типа погранслоя. В настоящей работе дается обоснование метода Галеркина с использованием в качестве базисных функций обычных полиномов и функции типа погранслоя, близость точного и приближенного решения оценивается в равномерной метрике.

1. Постановка задачи и формулировка результата. Относительно функций $p(x)$ и $q(x,u)$ в уравнении (1) будем предполагать, что $p: [-1,1] \to \mathbb{R}$, $q: [-1,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) \geq p_0 > 0 \ (x \in [-1,1])$ и обе функции достаточно гладкие. Кроме того, предположим, что q, q_u, q_{uu} равномерно ограничены.

При $\varepsilon = 0$ уравнение (1) переходит в дифференциальное уравнение первого порядка

$$p(x)u' = q(x,u). \tag{3}$$

Обозначим через $u_0(x)$ решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию

$$u(-1)=0 \tag{4}$$

(в сделанных предположениях оно существует, единственно и продолжимо на весь промежуток $[-1,1]$). Положим $\tau=(x-1)/\varepsilon$ и пусть $\Pi_0(\tau)$ - решение краевой задачи

$$-\frac{d^2u}{d\tau^2}+p(1)\ \frac{du}{d\tau}=0, \tag{5}$$

$$u(0)=-u_0(1),\ \lim_{\tau\to-\infty} u(\tau)=0. \tag{6}$$

Через $\Pi(x)$ обозначим $\Pi_0((x-1)/\varepsilon)$. Очевидно,

$$\Pi(x)=-u_0(1)e^{p(1)\frac{x-1}{\varepsilon}}. \tag{7}$$

Можно доказать, что найдется такое $\varepsilon_0>0$, что для всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ существует единственное решение $u_\varepsilon(x)$ задачи (I)-(2), для которого справедлива оценка

$$\|u_\varepsilon-(u_0+\Pi)\|_{C[-1,1]}\leq C_0\,\varepsilon, \tag{8}$$

где константа C_0 не зависит от ε (см. [3]).

Метод Галеркина отыскания приближенного решения задачи (I) -(2) заключается в следующем. Задаются две последовательности E_n^ε и F_n^ε конечномерных подпространств; приближенное решение u_n^ε задачи (I)-(2) определяется как элемент пространства E_n^ε ,удовлетворяющий равенству

$$(L_\varepsilon u_n^\varepsilon, \varphi)=(q\, u_n^\varepsilon, \varphi) \tag{9}$$

для любого $\varphi\in F_n^\varepsilon$. Здесь $q\,u_n^\varepsilon=q(x,u_n^\varepsilon)$, (ψ,φ) - скалярное произведение в $L_2[-1,1]$.

В качестве E_n^ε возьмем

$$E_n^\varepsilon=\left\{u(x)\,\middle|\,u(x)=v(x)+Ce^{p(1)\frac{x-1}{\varepsilon}},\quad u(-1)=u(1)=0\right\},$$

где $v(x)$ - полином степени $\leqslant n$, $C\equiv const$. Положим $F_n^\varepsilon=L_\varepsilon F_n^\varepsilon$. Так как уравнение $-\varepsilon u''+p(x)u'=W(x)$ при любом $W(x)\in C[-1,1]$ имеет единственное решение, удовлетворяющее краевым условиям (2), то оператор L_ε осуществляет взаимно-однозначное соответствие между E_n^ε и F_n^ε.

Т е о р е м а. Найдутся натуральное число N и число $\bar\varepsilon>0$, такие что при всех $n\geqslant N$ и $\varepsilon\in(0,\bar\varepsilon]$ галеркинские приближения u_n^ε, определяемые равенством (9), существуют и близки к точному решению u_ε задачи (I)-(2). Более точно, справедлива оценка

$$\|u_n^\varepsilon-u_\varepsilon\|_{C[-1,1]}\leqslant C_*[\varepsilon^{1/2}+\ln(n-2)E_{n-2}(u_0'')]$$

(константа C_* не зависит от ε и n).

2. Эквивалентные операторные уравнения. Чтобы доказать существование приближенного решения u_n^ε, а также равномерную близость u_n^ε и точного решения u_ε задачи (I)-(2), удобно перейти к рассмотрению операторных уравнений. Пусть u - дважды непрерывно дифференцируемая функция. Введем обозначение $W=-\varepsilon u''+p(x)u'=L_\varepsilon u$. Тогда функция $u(x)$, удовлетворяющая однородным краевым условиям (2), может быть однозначно определена по $W(x)$ с помощью функции Грина $G_\varepsilon(x,\xi)$ краевой задачи $L_\varepsilon u=W$, $u(-1)=u(1)=0$, то есть

$$u(x)=\int_{-1}^{1}G_\varepsilon(x,\xi)W(\xi)d\xi. \tag{I0}$$

В [2] показано, что $G_\varepsilon(x,\xi)$ равномерно по ε ограничена. Положим

$$G_\varepsilon W=\int_{-1}^{1}G_\varepsilon(x,\xi)W(\xi)d\xi,$$

тогда задача (I)-(2) эквивалентна задаче о решении операторного уравнения

$$W=T_\varepsilon W, \tag{II}$$

где $(T_\varepsilon W)(x)=q(x, G_\varepsilon W)$. Уравнение (II) будем рассматривать в пространстве $L_2[-1,1]$ с нормой

$$\|W\| = \left[\int_{-1}^{1} |W(x)|^2 dx\right]^{1/2},$$

Операторы T_ε вполне непрерывны в $L_2[-1,1]$.

Очевидно, F_n^ε является конечномерным подпространством в $L_2[-1,1]$. Обозначим через P_n^ε ортопроектор из $L_2[-1,1]$ на F_n^ε . Равенство (9) можно переписать в виде

$$(W_n^\varepsilon, \varphi) = (T_\varepsilon W_n^\varepsilon, \varphi), \tag{I2}$$

если обозначить $L_\varepsilon u_n^\varepsilon$ через W_n^ε . Выполнение равенства (I2) при любом $\varphi \in F_n^\varepsilon$ равносильно выполнению равенства

$$W_n^\varepsilon = P_n^\varepsilon T_\varepsilon W_n^\varepsilon . \tag{I3}$$

Следовательно, решение y_n^ε уравнения (I3) есть галеркинское приближение для решения операторного уравнения (II) (см. [5]). Так как линейные операторы P_n^ε ограничены $(\|P_n^\varepsilon\| \leqslant 1)$, то операторы $P_n^\varepsilon T_\varepsilon$ вполне непрерывны.

Таким образом, вопрос о существовании приближенного решения u_n^ε задачи (I)-(2) сводится к вопросу о существовании галеркинского приближения y_n^ε для уравнения (II). Обозначим через $\bar{W}_\varepsilon$ решение уравнения (II), тогда

$$u_\varepsilon = \int_{-1}^{1} G_\varepsilon(x,\xi)\,\bar{W}_\varepsilon(\xi)\,d\xi .$$

Так как

$$u_n^\varepsilon = \int_{-1}^{1} G_\varepsilon(x,\xi)\,y_n^\varepsilon(\xi)\,d\xi ,$$

то

$$\|u_n^\varepsilon - u_\varepsilon\|_{C[-1,1]} \leqslant \sup_{-1\leqslant x\leqslant 1} \left(\int_{-1}^{1} |G_\varepsilon(x,\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} \|\bar{W}_\varepsilon - y_n^\varepsilon\| .$$

Отсюда ясно, что достаточно оценить норму разности $\|\bar{W}_\varepsilon - y_n^\varepsilon\|$ в $L_2[-1,1]$.

3. Сильная сходимость проекционных операторов. Чтобы изучить аппроксимационные свойства проекторов P_n^ε, которые играют важную роль при обосновании метода Галеркина, докажем несколько вспомогательных утверждений. Пусть f – произвольная дифференцируемая на $[-1,1]$ функция. Обозначим через v_ε решение краевой задачи $L_\varepsilon v=f,\ v(-1)=v(1)=0$ (в сделанных предположениях оно существует и единственно). Известно [6], что

$$v_\varepsilon(x)=v_0(x)+\Pi(x)+0(x),$$

где $v_0(x)$ – решение задачи Коши $p(x)v'=f(x),\ v(-1)=0$, а $\Pi(x)$ определяется равенством (7), в котором вместо $u_0(-1)$ надо взять $v_0(-1)$.

Л е м м а I. Справедлива оценка

$$\|L_\varepsilon(v_0+\Pi)-f\|\leqslant C_1\varepsilon^{1/2}. \tag{I5}$$

Доказательство. Из определения v_0 и Π

$$\|L_\varepsilon(v_0+\Pi)-f\|\leqslant\varepsilon\|v_0''\|+\|p\Pi'-\varepsilon\Pi''\|. \tag{I6}$$

Так как $-\varepsilon\Pi''(x)=-p(1)\Pi'(x)$,

$$\|p(x)\Pi'(x)-\varepsilon\Pi''(x)\|\leqslant C_2\|(x-1)\Pi'(x)\|. \tag{I7}$$

Но

$$\|(x-1)\Pi'(x)\|\leqslant$$
$$\leqslant C_3\left\{\int_{-1}^{1}\left[\frac{p(1)(x-1)}{\varepsilon}\right]^2 e^{2p(1)\frac{x-1}{\varepsilon}}dx\right\}^{1/2}\leqslant C_4\varepsilon^{1/2}.$$

Отсюда и из (I6), (I7) вытекает (I5).

Функцию $v_0(x)$ вместе с первой и второй производной будем аппроксимировать полиномами на промежутке $[-1,1]$. Ниже $E_K(h)$, как обычно [4], означает наилучшее равномерное приближение функции $h(x)$ в классе полиномов степени $\leqslant n$ на промежутке $[-1,1]$.

Л е м м а 2. Каково бы ни было целое $n\geqslant 2$, существует полином $z_n(x)$ степени $\leqslant n$, такой что

$$\max\left\{\|v_0-z_n\|,\|v_0'-z_n'\|,\|v_0''-z_n''\|\right\}\leqslant C_5\ln(n-2)E_{n-2}(v_0''). \tag{I8}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение линейную функцию

$$\chi(x)=v_0(1)(x+1)/2.$$

Тогда $\hat{v}_0(x)=v_0(x)-\chi(x)$ обращается в нуль на концах отрезка $[-1,1]$, а $\hat{v}_0''(x)=v_0''(x)$. Если обозначить $\hat{v}_0''(x)$ через $h(x)$, то

$$\hat{v}_0(x)=\int_{-1}^{1}H(x,\tau)h(\tau)d\tau, \tag{19}$$

где $H(x,\tau)$ – функция Грина задачи $u''=h(\tau)$, $u(-1)=u(1)=0$.

Обозначим через $h_n(x)$ полином степени $n-2$, интерполирующий функцию $h(x)$ по узлам

$$\tau_{mn}=\cos\frac{2m+1}{2(n-1)} \quad (m=0,1,\dots,n-2)$$

(т.е. по нулям полинома Чебышева T_{n-1}). Тогда (см. [4])

$$\|h-h_n\|_{C[-1,1]}\leq\tilde{C}\ln(n-2)E_{n-2}(h). \tag{20}$$

Положим теперь

$$\rho_n(x)=\int_{-1}^{1}H(x,\tau)h_n(\tau)d\tau. \tag{21}$$

Очевидно, $\rho_n(x)$ – полином степени n, $\rho_n(-1)=\rho_n(1)=0$. Так как $\hat{v}_0''=h$, из (19)-(21) вытекают оценки

$$\|\hat{v}_0-\rho_n\|\leq C_6\ln(n-2)E_{n-2}(v_0''), \tag{22}$$

$$\|\hat{v}_0'-\rho_n'\|\leq C_7\ln(n-2)E_{n-2}(v_0''). \tag{23}$$

Возьмем, наконец, $z_n(x)=\rho_n(x)+\chi(x)$. Тогда $z_n(x)$ – полином степени n, $v_0(x)-z_n(x)=\hat{v}_0(x)-\rho_n(x)$. С учетом обозначений оценка (18) есть следствие оценок (20), (22), (23).

Лемма 3. Справедлива оценка

$$\|L_\varepsilon(\hat{z}_n+\Pi)-f\|\leqslant C_8\left[\varepsilon^{1/2}+\ln(n-2)E_{n-2}(v_0'')\right]. \tag{24}$$

Доказательство вытекает из очевидных неравенств

$$\|L_\varepsilon(z_n+\Pi)-f\|\leqslant\|L_\varepsilon(z_n-v_0)\|+\|L_\varepsilon(v_0+\Pi)-f\|,$$

$$\|L_\varepsilon(z_n-v_0)\|\leqslant\varepsilon\|z_n''-v_0''\|+\|p(z_n'-v_0')\|$$

и леммы 2.

Лемма 4. Какова бы ни была непрерывно дифференцируемая на $[-1,1]$ функция f, можно указать такой элемент $v_n^\varepsilon\in E_n^\varepsilon$, что

$$\|L_\varepsilon v_n^\varepsilon-f\|\leqslant C_{10}\left[\varepsilon^{1/2}+\ln(n-2)E_{n-2}(v_0'')\right]. \tag{25}$$

Доказательство. Положим $v_n^\varepsilon=z_n+\Pi+\varphi$, где $\varphi(x)=-\Pi(-1)\frac{1-x}{2}$. Тогда $v_n(-1)=v_n(1)=0$. Отсюда $v_n^\varepsilon\in E_n^\varepsilon$. Оценка (25) получается из

$$\|L_\varepsilon\varphi\|=\|p\varphi'\|\leqslant C_{11}\varepsilon^{1/2}$$

и леммы 3.

Лемма 5. Для любой функции $f\in L_2[-1,1]$

$$\|P_n^\varepsilon f-f\|\to 0 \text{ при } n\to\infty,\ \varepsilon\to 0. \tag{26}$$

Если f непрерывно дифференцируема на $[-1,1]$, то справедлива оценка

$$\|f-P_n^\varepsilon f\|\leqslant C_{12}\left[\varepsilon^{1/2}+\ln(n-2)E_{n-2}(v_0''),\right. \tag{27}$$

где $v_0(x)$ - решение задачи $p(x)v'=f(x)$, $v_0(-1)=0$.

Доказательство. Поскольку P_n^ε - ортопроектор на F_n^ε, то

$$\|P_n^\varepsilon f-f\|=\inf_{W\in F_n^\varepsilon}\|f-W\|$$

и, следовательно,

$$\|P_n^\varepsilon f-f\|\leqslant\|f-W\| \tag{28}$$

для любого $w \in F_n^{\varepsilon}$. Пусть v_n^{ε} - элемент из E_n^{ε}, определенный в лемме 4, тогда $w_n^{\varepsilon} = L_{\varepsilon} v_n^{\varepsilon} \in F_n^{\varepsilon}$ и

$$\|w_n^{\varepsilon} - f\| \leq C_{12}\left[\varepsilon^{1/2} + \ln(n-2) E_{n-2}(v_0'')\right].$$

Отсюда и из (28) вытекает (27).

Так как множество бесконечно дифференцируемых функций плотно в $L_2[-1,1]$, достаточно доказать (26) для произвольной бесконечно дифференцируемой функции f. Но в этом случае в функции v_0'' бесконечно дифференцируема. Поэтому при любом k [4]

$$E_n(v_0'')\, n^k \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Отсюда с учетом (27) приходим к (26).

4. Существование галеркинских приближений для операторного уравнения. К уравнениям (II), рассматриваемым при $\varepsilon > 0$, присоединим уравнение при $\varepsilon = 0$, под которым будем понимать следующее: Если через w обозначить $p(x)u'$, то решение $u(x)$ задачи $p(x)u' = w,\ u(-1) = 0$ выразится через w с помощью функции Грина $G_0(x,\xi)$ этой задачи

$$u(x) = \int_{-1}^{1} G_0(x,\xi)\, w(\xi)\, d\xi.$$

Определим оператор T_0 равенством $(T_0 w)(x) = q(x, G_0 w)$. Тогда уравнение $w = T_0 w$ (т.е. уравнение (II) при $\varepsilon = 0$) будет эквивалентно задаче (3)-(4). Оператор T_0 вполне непрерывен в $L_2[-1,1]$. Используя явный вид функций $G_0(x,\xi)$ и $G_{\varepsilon}(x,\xi)$ (см. [2]), можно доказать соотношение

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left|G_{\varepsilon}(x,\xi) - G_0(x,\xi)\right|^2 d\xi\, dx\right)^{1/2} = 0. \tag{29}$$

В сделанных предположениях уравнение $w = T_0 w$ имеет единственное решение $\overline{w}_0$ ненулевого индекса. Это означает, что на границе Γ шара $S_z(\overline{w}_0)$ радиуса $z > 0$ с центром в точке $\overline{w}_0$ в пространстве $L_2[-1,1]$ вращение [6] $\gamma(I - T_0, \Gamma)$ вполне непрерывного векторного поля $I - T_0$ отлично от нуля. Используя (29), легко доказать существование такого числа $\varepsilon_* \in (0, \varepsilon_0]$, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ поля $I - T_{\varepsilon}$ невырождены на Γ и

$$\gamma(I - T_{\varepsilon}, \Gamma) = \gamma(I - T_0, \Gamma). \tag{30}$$

Представим вполне непрерывные векторные поля $I-P_n^\varepsilon T_\varepsilon$ в виде

$$I-P_n^\varepsilon T_\varepsilon = I-T_\varepsilon+\Phi_n^\varepsilon ,$$

где

$$\Phi_n^\varepsilon=(T_\varepsilon-T_0)+(T_0-P_n^\varepsilon T_0)+P_n^\varepsilon(T_0-T_\varepsilon).$$

Из этого представления и свойств проекторов P_n^ε вытекает, что можно выбрать число n_0 настолько большим, а $\varepsilon_1\in(0,\varepsilon_*]$ настолько малым, чтобы для всех $n\geqslant n_0$ и $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1]$ $\gamma(I-P_n^\varepsilon T_\varepsilon,\Gamma)=\gamma(I-T_\varepsilon,\Gamma)$. Отсюда и из (30) заключаем, что $\gamma(I-P_n^\varepsilon T_\varepsilon,\Gamma)\neq 0$, и, следовательно, внутри шара $S_z(\bar{W}_0)$ при любых $n\geqslant n_0$ и $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1]$ есть по крайней мере одна неподвижная точка оператора $P_n^\varepsilon T_\varepsilon$. В силу равенства $y_n^\varepsilon=P_n^\varepsilon T_\varepsilon y_n^\varepsilon$ элемент $y_n^\varepsilon\in F_n^\varepsilon$. Тем самым доказано существование галеркинского приближения u_n^ε к решению задачи (I)-(2).

Пусть σ - произвольное положительное число, $\sigma<z$. Легко убедиться,что при достаточно больших n и достаточно малых ε в шаровом слое $\sigma\leqslant\|y-\bar{W}_0\|\leqslant z$ нет неподвижных точек оператора $P_n^\varepsilon T_\varepsilon$. Так как σ произвольно, то это означает, что

$$\|y_n^\varepsilon-\bar{W}_0\|\to 0 \quad (n\to\infty,\ \varepsilon\to 0).$$

Отсюда и из соотношения $\|\bar{W}_0-\bar{W}_\varepsilon\|\to 0\ (\varepsilon\to 0)$ получаем

$$\|y_n^\varepsilon-\bar{W}_\varepsilon\|\to 0 \quad (n\to\infty,\ \varepsilon\to 0) \tag{31}$$

5. Оценка близости точного и приближенного решения решения краевой задачи. В сделанных предположениях операторы $T_\varepsilon\ (\varepsilon\geqslant 0)$ непрерывно дифференцируемы по Фреше в каждой точке шара $S_z(\bar{W}_0)$, причем

$$(T_\varepsilon'(w)h)(x)=q_u(x,G_\varepsilon w)G_\varepsilon h.$$

Более того, для любых $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1]$

$$\|T_\varepsilon'(W_1)-T_\varepsilon'(W_2)\|\leqslant C_{13}\|W_1-W_2\| \qquad (32)$$

(константа C_{13} не зависит от ε) и справедлива

Лемма 6. При всех достаточно малых ε операторы $I-T_\varepsilon'(\bar W_\varepsilon)$ обратимы, при этом нормы обратных операторов ограничены в совокупности

$$\|[I-T_\varepsilon'(\bar W_\varepsilon)]^{-1}\|\leqslant C_{14}. \qquad (33)$$

Доказательство. Так как линейная краевая задача $p(x)u'= q_u(x,u_0(x)), u(-1)=0$ имеет только тривиальное решение, то существует ограниченный обратный оператор к оператору $I-T_0'(\bar W_0)$. Утверждение леммы вытекает из соотношения

$$\|T_\varepsilon'(\bar W_\varepsilon)-T_0'(\bar W_0)\|\to 0 \quad (\varepsilon\to 0), \qquad (34)$$

которое есть следствие (29) и (32).

Рассмотрим теперь операторы

$$I-P_n^\varepsilon T_\varepsilon'(\bar W_\varepsilon)=I-T_\varepsilon'(\bar W_\varepsilon)+\psi_n^\varepsilon, \qquad (35)$$

где

$$\psi_n^\varepsilon=[T_\varepsilon'(\bar W_\varepsilon)-T_0'(\bar W_0)]+[T_0'(\bar W_0)-P_n^\varepsilon T_0'(\bar W_0)]+$$
$$+[P_n^\varepsilon T_0'(\bar W_0)-P_n^\varepsilon T_\varepsilon'(\bar W_\varepsilon)]. \qquad (36)$$

Тз (34) и леммы 5 имеем

$$\|\psi_n^\varepsilon\|\to 0 \quad (n\to\infty,\varepsilon\to 0). \qquad (37)$$

Из (35)-(37) вытекает, что при достаточно больших n и достаточно малых ε операторы $I-P_n^\varepsilon T_\varepsilon'(\bar W_\varepsilon)$ обратимы и нормы обратных операторов ограничены в совокупности

$$\|[I-P_n^\varepsilon T_\varepsilon'(\bar W_\varepsilon)]^{-1}\|\leqslant C_{15}.$$

Чтобы оценить близость $\bar W_\varepsilon=T_\varepsilon\bar W_\varepsilon$ и $y_n^\varepsilon=P_n^\varepsilon T_\varepsilon y_n^\varepsilon$

заметим, что справедливо равенство

$$[I-P_n^\varepsilon T_\varepsilon'(\bar{W}_\varepsilon)](\bar{W}_\varepsilon-y_n^\varepsilon)=(I-P_n^\varepsilon)\bar{W}_\varepsilon+$$

$$+P_n^\varepsilon[T_\varepsilon\bar{W}_\varepsilon-T_\varepsilon y_n^\varepsilon-T_\varepsilon'(\bar{W}_\varepsilon)(\bar{W}_\varepsilon-y_n^\varepsilon)]. \qquad (38)$$

С учетом (3I) и

$$\|T_\varepsilon\bar{W}_\varepsilon-T_\varepsilon y_n^\varepsilon-T_\varepsilon'(\bar{W}_\varepsilon)(\bar{W}_\varepsilon-y_n^\varepsilon)\|\leqslant C_{13}\frac{\|\bar{W}_\varepsilon-y_n^\varepsilon\|^2}{2}$$

из (38) получаем, что при достаточно больших n и достаточно малых ε выполняется неравенство

$$\|\bar{W}_\varepsilon-y_n^\varepsilon\|\leqslant C_{16}\|(I-P_n^\varepsilon)\bar{W}_\varepsilon\| \qquad (40)$$

(константа C_{16} не зависит от n и ε).

Оценим теперь $\|(I-P_n^\varepsilon)\bar{W}_\varepsilon\|$. Так как $\bar{W}_\varepsilon=T_\varepsilon\bar{W}_\varepsilon$, то $\bar{W}_\varepsilon=L_\varepsilon u_\varepsilon=q(x,u_\varepsilon(x))$. Если положить $f(x)=q(x,u_0(x))$, где $u_0(x)$ - решение задачи (3)-(4), то из (7),(8) будем иметь

$$\|\bar{W}_\varepsilon(x)-f(x)\|\leqslant C_{17}\varepsilon^{1/2},$$

где константа C_{17} не зависит от ε . Отсюда и из (28) вытекает неравенство

$$\|(I-P_n^\varepsilon)\bar{W}_\varepsilon\|\leqslant C_{18}(\varepsilon^{1/2}+\ln(n-2)E_{n-2}(u_0'')), \qquad (4I)$$

где константа C_{18} не зависит от n и ε .

В силу (I4) оценка близости y_n^ε и u_n^ε получается как следствие оценок (40), (4I).

Теорема полностью доказана.

Литература

I. Багаев Б.М. Вариационно-разностное решение уравнения с малым параметром при старшей производной. - В сб.: Мат.модели и вычисл.методы механики сплошной среды. Красноярск, 1979, с.152-157.

2. Блатов И.А. Метод Галеркина отыскания решений сингулярно

возмущенной двухточечной краевой задачи в пространстве $C[a,b]$.– В сб.: Приближенные методы исследования дифференц. уравнений и их приложения. Куйбышев: КГУ, 1983; с.9–19.

3. Васильев А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973.

4. Даугавет И.К. Введение в теорию приближения функций. – Ленинград; ЛГУ, 1977.

5. Красносельский М.А., Вайникко Г.М. и др. Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969.

6. Найфэ А. Методы возмущений. – М, 1976.

7. de Groen P.P.N., Hemker P.W. Error bounds for exponentially fitted methods applied to stiff two-point boundary value problems. – Numer. Anal. Singul. Perturb. Probl. London e.a. 1979, p.217–240.

Г.С.Жукова, Н.П. Черных

НЕОДНОРОДНЫЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ В СЛУЧАЕ КРАТНОГО СПЕКТРА ПРЕДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Как известно, решение неоднородной линейной системы дифференциальных уравнений достаточно просто выражается через общее решение соответствующей однородной системы. Однако при построении последнего нередко приходится сталкиваться со значительными трудностями. Кроме того, может понадобиться такое частное решение неоднородной системы, которое имеет тот же характер, что и свободный член системы.

В настоящей работе строится частное решение сингулярно возмущенной линейной неоднородной системы

$$\varepsilon^h \frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x - \varepsilon^d f(t,\varepsilon)\theta^{\hat{\theta}(t,\varepsilon)}, \quad t \in R^+, \qquad (I)$$

имеющее тот же характер, что и свободный член выражения (I). Рассмотрение ведется в банаховом пространстве E . Отдельно изучаются резонансный и нерезонансный случаи.