УДК: 514.8

РАЗЛИЧНЫЕ СПОСОБЫ НАХОЖДЕНИЯ ЦЕНТРА МАСС ФИГУРЫ С ПОМОЩЬЮ КООРДИНАТ

Аверьянова Ирина Геннадьевна, студент воронежского государственного педагогического университета;
Лосева Анастасия Валентиновна, студент воронежского государственного педагогического университета.
Покорная Илана Юльевна, доцент кафедры высшей математики воронежского государственного педагогического университета.

В работе рассматриваются несколько способов нахождения центра масс фигуры, используя координаты ее вершин. Изучение этих способов помогает подобрать наиболее рациональный для решения определенных задач.

Ключевые слова: центр масс, фигура, симметрия, дополнение, разбиение.

VARIOUS WAYS TO FIND THE CENTER OF MASS OF A FIGURE USING COORDINATES

Averyanova Irina Gennadievna, student of the Voronezh State Pedagogical University;
Loseva Anastasia Valentinovna, student of the Voronezh State Pedagogical University
Pokornaya Ilana Yulievna, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Voronezh State Pedagogical University.

The paper considers several ways to find the center of mass of a figure using the coordinates of its vertices. The study of these methods helps to choose the most rational one for solving certain tasks.

Keywords: center of mass, figure, symmetry, complement, partition.

Существует несколько способов нахождения координат центров масс твердых тел [3]. Рассмотрим их на пример нахождения центра масс конфеты.

Задача. Найти координаты центра масс конфеты (рис. 1), размеры которой $AL = 10$ см, $GD = DE = AB = KL = 4$ см, $AG = FL = 3$ см.

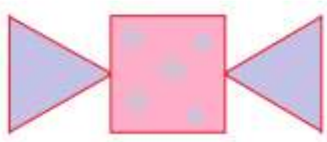

Рис. 1

- Способ разбиения

Этот способ применяется для определения центров тяжести тел сложной геометрической формы. Общий прием определения центров тяжести таких тел состоит в том, что данное тело разбивают на конечное число частей простейшей геометрической формы (если это возможно), для каждой из которых положение центра тяжести известно или оно сравнительно легко может быть найдено [2]. Координаты центра тяжести всего тела можно будет непосредственно вычислить по формулам:

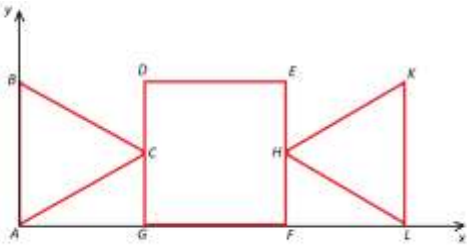

Рис. 2

$$x_c = \frac{\sum x_i S_i}{\sum S_i} = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{S_1 + S_2}; \qquad y_c = \frac{\sum y_i S_i}{\sum S_i} = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2}{S_1 + S_2}. \qquad (1)$$

Введем систему координат следующим образом (рис. 2):

Найдем координаты центра масс и площадь прямоугольника GDEF:

$$x_1 = \frac{AL}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ (см)}; \ y_1 = \frac{GD}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ (см)}.$$

$$S_1 = GD \cdot DE = 4 \cdot 4 = 16 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Следовательно, координаты центра масс прямоугольника GDEF: C_1 (5; 2).

Далее найдем координаты центра масс и площадь ΔABC и ΔHKL:

$$x_2 = \frac{1}{3}(0 + 0 + 3) = 1 \text{ (см)}; \ y_2 = \frac{1}{3}(0 + 4 + 2) = 2 \text{ (см)}.$$

$$x_3 = \frac{1}{3}(7 + 10 + 10) = 9 \text{ (см)}; \ y_3 = \frac{1}{3}(2 + 4 + 0) = 2 \text{ (см)}.$$

Тогда координаты центра масс ΔABC C_2 (1; 2), а ΔHKL C_3 (9; 2).

Так как $\Delta ABC = \Delta HKL$, то их площади тоже равны:

$$S_2 = S_3 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Тогда можем по формулам (1) найти центр масс всей фигуры:

$$x_c = \frac{140}{28} = 5 \text{ (см)}; \ y_c = \frac{56}{28} = 2 \text{ (см)}.$$

Таким образом, мы получаем координаты точки центр масса C (5; 2).

- Способ дополнения

Этот способ является частным случаем способа разбиения и применяется к телам, имеющим вырезы, если центр тяжести тела без вырезов и вырезанных частей известен или легко определяется [1]. Его можно применить практически для любой фигуры (рис. 3).

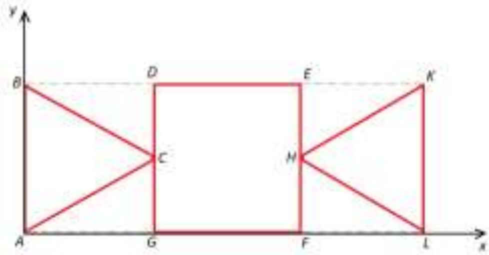

Рис. 3

Дополним нашу исходную фигуру до прямоугольника ABKL, найдем его центр масс и центр масс дополнительных равных треугольников BDC, HEK, HFL, ACG. Далее воспользуемся следующими формулами:

$$x_c = \frac{x_0S_0 - x_1S_1 - x_2S_2 - \dots - x_nS_n}{S_0 - S_1 - S_2 - \dots - S_n}; \ y_c = \frac{y_0S_0 - y_1S_1 - y_2S_2 - \dots - y_nS_n}{S_0 - S_1 - S_2 - \dots - S_n}. \quad (2)$$

Найдем координаты центра масс и площадь прямоугольника ABKL:

$$x_0 = \frac{AL}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ (см)}; y_0 = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ (см)}.$$

$$S_0 = AL \cdot AB = 10 \cdot 4 = 40 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Координаты центра масс прямоугольника GDEF: C_0 $(5;\ 2)$.

Найдем координаты центра масс ΔBDC:

$$x_1 = \frac{1}{3}(0 + 3 + 3) = 2 \text{ (см)}; y_1 = \frac{1}{3}(4 + 4 + 2) = \frac{10}{3} \text{ (см)} \Rightarrow C_1 \ (2; \frac{10}{3}).$$

Аналогично, найдем координаты центра масс ΔHEK, ΔHFL и ΔACG:

$$x_2 = \frac{1}{3}(7 + 7 + 10) = 8 \text{ (см)}; y_2 = \frac{1}{3}(2 + 4 + 4) = \frac{10}{3} \text{ (см)}.$$

$$x_3 = \frac{1}{3}(7 + 7 + 10) = 8 \text{ (см)}; y_3 = \frac{1}{3}(0 + 0 + 2) = \frac{2}{3} \text{ (см)}.$$

$$x_4 = \frac{1}{3}(0 + 3 + 3) = 2 \text{ (см)}; y_4 = \frac{1}{3}(0 + 0 + 2) = \frac{2}{3} \text{ (см)}.$$

Следовательно, C_2 $(8; \frac{10}{3})$ – координаты центра масс ΔHEK, C_3 $\left(8; \frac{2}{3}\right)$ – координаты центра масс ΔHFL, C_4 $(1;\ 2)$ – координаты центра масс ΔACG:

Так как ΔBDC = ΔHEK = ΔHFL = ΔACG, то их площади тоже равны.

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Тогда можем по формулам (2) найти центр масс всей фигуры:

$$x_c = 5 \text{ (см)}; y_c = 2 \text{ (см)}.$$

Таким образом, мы получаем координаты точки центр масса С (5; 2).

- Способ симметрии

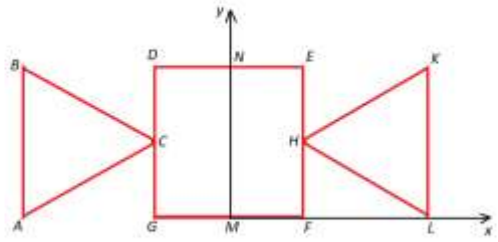

Рис. 4

Так как данная фигура симметрична, то можем ввести систему координат по оси симметрии, например, так (рис. 4):

Если однородное твердое тело имеет ось или центр симметрии, то центр масс этого тела лежит соответственно или на оси, или в центре симметрии. В данном случае MN – вертикальная ось симметрии, а значит, $x_c = \frac{AL}{2} = 5$ (см)*;* $y_c = \frac{MN}{2} = 2$ (см). Тогда С (5; 2) – координаты точки центра масс фигуры.

Таким образом, вышеизложенные способы формируют в целом понимание о центре масс фигуры, заданной координатами вершин, а также позволяют выбрать более рациональный способ решения в зависимости от сложности исходной фигуры.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Балк, М.Б. Геометрические приложения понятия о центре тяжести. – Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. – 230 с.

2. Гашков, С.Б. Центр тяжести и геометрия. – Москва: МЦНМО, 2015. – 64 с.

3. Лосева, А. В. Нахождение центра масс в задачах различных типов/ А. В. Лосева, И. Г. Аверьянова, И. Ю. Покорная // XXIV Всероссийская студенческая научно-практическая конференция Нижневартовского государственного университета. Часть 2. – Нижневартовск: НВГУ, 2022. С. 87-91.