

И. А. Березиной

70



УДК 539.374

И. А. Бережной. Сборник научных трудов/Под редакцией Ю. Л. Тарасова; Самар. гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 2004. 148 с.

ISBN 5-7883-0279-X

От редактора - составителя сборника

Активное участие в работе по подготовке сборника, посвященного семидесятилетию Главного конструктора Конструкторского бюро автоматических систем, профессора кафедры прочности летательных аппаратов Куйбышевского авиационного института имени академика С. П. Королева, доктора физико-математических наук И. А. Бережного, принимали Т. В. Бережная, дочь Ольга Игоревна, а также группа коллег и друзей Игоря Александровича - П. Н. Сыгуров, Г. А. Кулаков, С. А. Привалов, В. В. Игнатьев, В. И. Цейлер, Ю. Л. Коган и др.

Считаем своим долгом посвятить наш скромный труд по изданию сборника светлой памяти матери Игоря Александровича Бережного Марии Андреевны.

Заслуженный деятель науки и техники РСФСР,
профессор, доктор технических наук Ю. Л. Тарасов

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного университета имени академика С. П. Королева.

ISBN 5-7883-0279-X

© Самарский государственный аэрокосмический университет, 2004.



Бережной Игорь Александрович

ЮБИЛЕЙ ВЫДАЮЩЕГОСЯ УЧЕНОГО

21 апреля 2004 года Игорю Александровичу Бережному - бывшему Главному конструктору КБ автоматических систем, профессору, доктору физико-математических наук исполнилось бы семьдесят лет.

Игорь Александрович окончил Куйбышевский авиационный институт в 1957 году. Практически все годы обучения он работал по совместительству на кафедре физики, а затем на кафедре прочности летательных аппаратов. Уже тогда он проявил себя как талантливый экспериментатор. В то время для различных приложений механики чрезвычайно актуальной была проблема многоточечной дистанционной тензометрии - этого требовала бурно развивающаяся в 50-е годы строительная механика оболочек. Нужно сказать, что в институте была разработана необходимая аппаратура и налажено производство тензодатчиков. Это сделало возможным задолго до появления серийной тензоаппаратуры оснастить не только учебный процесс на высоком по тому времени уровне, но и проводить научные исследования, и в этом была немалая заслуга студента Бережного И.А. В первые годы работы после окончания института в Центральной заводской лаборатории Воронежского авиазавода им были разработаны тензометрические весы для взвешивания самолетов, тензометрические измерители динамических нагрузок.

Еще в студенческие годы Игорь научился работать с серьезной научной литературой. В период работы в лаборатории прочности его настольной книгой была фундаментальная монография И.Бонч-Бруевича "Применение электронных ламп в экспериментальной физике", известная только узкому кругу специалистов, а "приданое" молодого специалиста Бережного составлял тяжеленный "бабушкин" сундук с книгами по различным областям науки и техники. Согласитесь, что собрать такую библиотеку студенту, снимающему вместе с однокурсником "угол" в курмышах тогдашней улицы Маяковского, было очень непросто, да еще заработать на книги деньги - на старших курсах Игорь практически не прибегал к помощи родителей!

В аспирантуру Игорь Александрович поступал в 1962 году. В этот период в Воронеже, куда он приехал по распределению, сложилось несколько крупных научных школ, возглавляемых известными учеными: математиком М.Красносельским, механиком Д.Ивлевым, физиком В.Постниковым. Поступить в аспирантуру тогда было вообще очень трудно, а для Игоря Александровича это было трудно вдвойне: во-первых, прошло уже почти пять лет после окончания института, во-вторых, он был инженером, хорошо подготовленным, талантливым, но инженером без университетского образования, а его будущий учитель Дюис Данилович Ивлев - представитель всемирно известной научной школы академика Л.И.Седова - известный теоретик в области теории идеальной пластичности не только у нас в стране, но и за рубежом. Ученики Ивлева того периода, более молодые, чем Игорь, уже были кандидатами наук, например, Г.И.Быковцев в то время был деканом только что созданного в университете факультета прикладной математики и механики. Неудивительно, что при первом знакомстве с Ивлевым Игорь получил по существу вежливый отказ в виде рекомендации изучить основополагающие работы по теории идеальной пластичности. Для этого, как минимум, требовалось освоить специальные разделы математики.

ки, которые не преподавались в авиационных ВУЗах, да еще в объеме университетского курса.

Нужно сказать, что Игорю Александровичу на это потребовалось всего около двух месяцев, после чего вопрос об аспирантуре был решен положительно, а талантливый ученый и педагог приобрел еще одного талантливого ученика.

Первая научная статья аспиранта Бережного И.А. "О кручении призматических стержней из идеально-пластического материала с учетом микронапряжений" была опубликована в 1963 г. в академическом журнале "Прикладная механика и техническая физика", а уже через год совместно с Д.Д.Ивлевым статья "О влиянии вязкости на механическое поведение пластических сред" была опубликована в самом престижном во все времена научном журнале "Доклады Академии наук". К моменту защиты кандидатской диссертации "Некоторые вопросы теории пластических сред, свойства которых зависят от времени" в 1966 г. в Ученом совете Воронежского университета в академической печати им было опубликовано еще две статьи. Не так уж мало для молодого ученого, если учесть, что за год до защиты диссертации он был назначен Главным конструктором конструкторского бюро, которое нужно было создавать, что называется, "с нуля". Агрегатные ОКБ, от уровня разработок которых, по существу, зависят характеристики изделия в целом, не пользовались в то время необходимым вниманием. В воображении министерских чиновников такое ОКБ виделось как некое подобие серийного конструкторского отдела, что, по вполне понятным причинам, не соответствовало замыслам Главного конструктора. И здесь Игорь Александрович проявил свой дар ученого и инженера, талантливого организатора, что и обеспечило ему поддержку и уважение авторитетов авиационной промышленности А.А.Туполева, О.К.Антонова, В.М.Мясищева и других менее именитых конструкторов и авиационных специалистов. В короткий срок была сформирована тематика, и ОКБ создавалось под нее. За шесть лет существования ОКБ "Шасси самолетов и вертолетов" (а если учесть нулевые начальные условия и считать как в математике "по среднему" - за 3 года!) был создан работоспособный научно-конструкторский коллектив, заложены основы производственной базы. За это время было разработано сложнейшее по конструкции шасси для сверхзвукового самолета конструкции П.О. Сухого: собрано, испытано, доведено до летных испытаний. Впервые в практике такого агрегатостроения шасси поставлялось комплексно: со всем входящим во взлетно-посадочную систему оборудованием. До этого только так поставлялись авиадвигатели. Уместно сказать, что по своему уровню самолет на добрые десять лет опережал американский его аналог В-1.

Параллельно с этой сложной даже для сложившегося ОКБ работой готовилось к серийному производству шасси другого самолета П.О.Сухого, не так давно снятого с вооружения. Работать над такой тематикой, да еще в контакте с такой прогрессивной фирмой, каковой являлось ОКБ П.О. Сухого, было не только сложно и ответственно - это была прежде всего прекрасная школа профессионализма для молодого КБ. Совместно с ОКБ О.К.Антонова с 1968г. велись научно-конструкторские изыскания с целью создания оптимальной взлетно-посадочной системы для сверхтяжелых самолетов, т.е. самолетов с взлетной массой около 1000 т, предварявших создание уже значительно позднее самолетов-гигантов "Руслан" и "Мрия".

В конце 60-х годов в США и Канаде интенсивно велись совместные исследования по созданию взлетно-посадочной системы на воздушной подушке для повышения мобиль

ности военно-транспортной авиации. В инициативном порядке были начаты работы по созданию такого взлетно-посадочного устройства и в ОКБ шасси. Для экспериментов был выбран самолет Ан-14 конструкции О.К. Антонова, который впоследствии предоставил Бережному И. А. полномочия самостоятельно вносить изменения в аэродинамику и прочность самолета. Летные испытания самолета с шасси на воздушной подушке, условно названного Ан-714, успешно были завершены в 1971 г., раньше чем в США на год. Даже этот далеко не полный перечень тем требовал не только напряженной конструкторской работы, но и научных разработок в области механики, металловедения, математического моделирования и т.п. Игорь Александрович был не только генератором идей, но и кропотливым исследователем. Под его руководством были подготовлены и успешно защищены в этот период три кандидатские диссертации. Сам же он подготовил и в начале 1971 года успешно защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук на тему "Некоторые общие вопросы пластичности и ее приложение в квазиэластических задачах движения колеса по поверхности с трением". Защита состоялась в Киевском государственном университете. Официальными оппонентами по диссертации выступили известные ученые-механики чл.-корр. АН СССР Л.А. Галин, чл.-корр. АН Украины А.Н. Гузь, профессор МГУ Ключников В.Д.

Справедливости ради нужно сказать, что все эти работы хотя и были стимулированы тематикой ОКБ, но были сугубо теоретическими работами в области механики негетерогенных систем, и их защиты проходили в ведущих в то время университетах: Воронежском, Новосибирском, Тартусском. К 1972г. ОКБ шасси набрало силу, и, хотя оно было еще очень малочисленным, в нем были созданы все функциональные подразделения, включая летно-экспериментальный отдел. Но этот год был последним в его истории: во исполнение известного Постановления ЦК КПСС и СМ СССР от 1970 г. оно в начале 1972 г. вошло в состав Куйбышевского агрегатного объединения. В связку с заводами поверстали все агрегатные ОКБ Минавиапрома. "ОКБ Бережного", как его называли тогда в Куйбышеве, и ОКБ по разработке воздушных винтов были последними. Нужно сказать, что процесс объединения не поддерживался Генеральными конструкторами, но протестовать в то время, как известно, было бесполезно. Научно-техническому прогрессу в авиации был нанесен непоправимый удар. Достаточно сказать, что подписание приказа по ликвидации этих ОКБ совпало с сообщением о создании английскими специалистами винтовентиляторов, проблема которых у нас не решена и до сих пор.

"Дамоклов меч" объединения висел над ОКБ с 1970 г., поэтому Игорь Александрович в знак протеста подал заявление об увольнении еще в начале 1972 г., которое просил подписать, по крайней мере, одновременно с приказом об объединении ОКБ с Агрегатным заводом. По тем временам это был смелый шаг, исполненный ответственности ученого и руководителя за научно-технический прогресс, за судьбу тех важных для обороны страны научно-конструкторских заделов, которые имелись тогда в "портфеле" ОКБ.

Откуда взялись эти заделы? С конца 1967 года стало традицией после работы, иногда и до глубокой ночи, включая выходные дни, если конечно не было авралов, которые случались тоже, заниматься научной работой, поиском нетрадиционных решений тех задач, которые возникали в деятельности ОКБ. Эта работа велась, как правило, со студентами-дипломниками и молодыми специалистами, которые и были основной активной силой. Кстати, за эту внеурочную работу никакой оплаты не полагалось, кроме вознаграждения за

изобретения, подтвержденное авторским свидетельством - не более 50 рублей на одного автора или 300 рублей на одно коллективное изобретение. Правда, число авторских свидетельств в току времени переважило за полсотни.

Исследования отличались большим разнообразием. Именно тогда были сформулированы основные конструктивно-технологические принципы взлетно-посадочной системы самолетов с шасси на воздушной подушке, благодаря чему разработка и создание самолета заняло несколько месяцев, тогда же был найден целый ряд чрезвычайно эффективных решений по применению лазеров, конструкции газодинамических лазеров, разработанная технология литья особо сложных деталей шасси из высокопрочных сплавов, технология обработки металлических поверхностей до "оптической" чистоты, получения магнитных жидкостей, т.е. жидкостей, реологические свойства которых изменяются в зависимости от наложенного магнитного поля, и т.п. Именно благодаря этим работам, которые не могли быть не замечены, в том числе и в Академии наук, что называется, под Бережного И.А. было создано в декабре того же 1972 года Конструкторское бюро автоматических систем на "части бывшего ОКБ шасси", как звучало в приказе Минавиапрома.

Эта "часть" состояла из 50 сотрудников и кустарных сооружений на территории свинсовхоза "Зубчаниновский". Правда, была передана часть приборов и оборудования и значительная часть библиотеки, которая содержала по меньшей мере около сотни наименований научной периодики за несколько лет. Таким образом, опять предстояло начать все сначала.

Вот на этой "части" уже практически через год развернулись работы по созданию лазерной курсо-глизсадной системы посадки самолетов "Глиссада", использующей принцип ориентирования, основанные на применении рассеянного излучения, в частности лазерного, позволяющего создавать из-за его высокой направленности протяженные световые ориентиры. Именно так звучит патентная формула в многочисленных зарубежных патентах.

"Глиссада" - это только один пример, реализующий этот принцип. Известно, как долог путь от разработки принципа до его практической реализации! Нужно было пройти практически весь тот путь, который прошли радиотехнические системы от момента создания источников радиоизлучения до современных приборных реализаций. Можно сказать, что жизнь Главного конструктора, профессора, доктора физико-математических наук Игоря Александровича Бережного трагически оборвалась в то время, когда была уже пройдена большая часть этого пути.

Справедливости ради следует ответить, что "Глиссада" представляла только одно из направлений в разработках ОКБ. Так случилось, что она стала наиболее известной.

Но и в этот период Игорь Александрович, уже будучи профессором авиационного института, продолжал исследования в области теории идеальной пластичности.

Полный список научных работ Игоря Александровича составил более двухсот наименований, включая более полутора десятка изобретений и зарубежных патентов.

Авторы этого материала знали Игоря Александровича со студенческой скамьи, работали с ним в лаборатории. Одному из авторов довелось после аспирантуры в МАИ работать и в КБ под руководством Игоря Александровича, другой поддерживал деловую связь с ним, работая в институте.

Что можно сказать о нем?

И. А. Бережной обладал высоким талантом создания коллектива. Он по сути дела создал коллективы двух КБ. И для этого он искал одаренных инженеров, заказывал подготовку специалистов по индивидуальным планам. И сам участвовал в этой подготовке: читал лекции, руководил курсовым и дипломным проектированием.

И базу научно-экспериментально-производственную он создавал основательно. И была она создана также, по сути дела, в двух КБ.

Игорю Александровичу присуща была скрупулезная дотошность и высокий профессионализм во всех делах. Он сам носился на автомобиле "Москвич" по взлетно-посадочной полосе, проверяя реализацию своих идей бестормозного торможения, торможения путем разворота колес "елочкой". Насколько бы удалось облегчить взлетно-посадочные устройства, применив эти разработки. А обретение навыков пилота? Ведь Главный конструктор полностью освоил пилотирование тяжелых самолетов на всех этапах эксплуатации самолета, включая вход в Московскую зону и посадку на подмосковных аэродромах. Он ценил профессионализм во всем. Отдыхая, он освоил серфинг, подводное плавание. Любил и ценил не хрустальное многопудье, а керамические и деревянные творенья российских умельцев.

Об Игоре Александровиче Бережном говорить можно много и долго. Безусловно, здесь сказано не всё и не полно. К сожалению, трагическая гибель преждевременно унесла из жизни талантливого ученого, одаренного конструктора. Он мог бы сделать очень много из того, что было еще не реализовано. А то, что сделано им в науке и в технике, достойно глубочайшего уважения.

Ю Л. Тарасов, В.В. Игнатъев

$$\alpha(\lambda) = \frac{3,912}{5m} \omega(\lambda)$$

$$\omega(\lambda) = \frac{\alpha(\lambda)}{\alpha(0,5)}$$

$$\alpha(\lambda) L = 21$$

$$\alpha(\lambda) = \frac{\alpha(\lambda)}{\alpha(0,5)} \cdot \frac{3,912}{5m}$$

$$\alpha(\lambda) = \frac{0,5}{\lambda} \cdot \frac{3,912}{5m}$$

$$J = J_0 e^{-\alpha L}$$

$$J = \frac{J_0}{1 + (\alpha L)^2}$$

$$J = \frac{J_0}{1 + \left(\frac{2D}{\alpha L}\right)^2} \quad L = 20$$

$$L = 5m \cdot \lambda \cdot \frac{40}{4}$$

$$L = 5m \cdot \lambda \cdot 10$$



$$\frac{0,5}{\lambda} \cdot \frac{3,912}{5m} L = 20$$

$$J = J_0 e^{-\alpha L}$$

$$\frac{J_0}{(12,7 \cdot \alpha L)^2} = \frac{J_0}{e} e^{-\alpha L}$$

$$J = J_0 \frac{e^{-\alpha L}}{(12,7 \cdot \alpha L)^2}$$

$$\alpha D$$

$$16 \cdot 0,$$

$$L \approx 10 \lambda : 5m$$

$$\lambda = 0,5 \quad L = 5 Sm.$$

$$\lambda = 1 \quad L = 10 Sm.$$

$$\lambda = 10 \quad L = 100 Sm$$

$$10 \frac{J_0}{(12,7 \cdot \alpha L)^2}$$

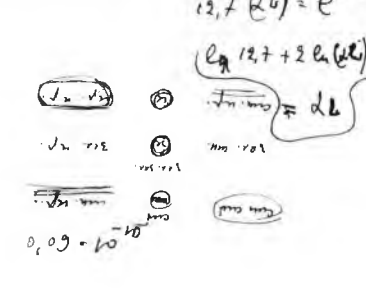
$$\frac{1}{(12,7 \cdot \alpha L)^2} = e^{-\alpha L}$$

$$\ln \frac{1}{(12,7 + 2 \ln \alpha L)^2} = -\alpha L$$

$$\left(\frac{\alpha D}{L}\right)^2$$

$$\frac{3 \pi n}{\lambda} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\frac{0,3}{10^5} = \left(0,3 \cdot 10^{-5}\right)^2$$



Фрагмент черновика рукописи



И.А. Бережной, крайний справа –В.В. Игнатьев.
Подготовка к испытаниям стойки шасси знаменитой "100" (Т4).



И.А. Бережной , С.А. Привалов



И.А. Бережной, Заслуженный летчик-испытатель СССР, ведущийлетчик-испытатель фирмы О.К. Антонова – Калинин, Главный инженер КБ шасси В.В. Игнатъев после испытаний самолета АН – 714 «Пчелка». Вместо колесного шасси – опоры на воздушной подушке.



И.А. Бережной, крайний слева – главный инженер КБАС Цейлер В.И.



И.А. Бережной, третий справа – секретарь Куйбышевского обкома КПСС Н.Н.Панов.



Главкома ВВС СССР, маршала авиации, Героя Советского Союза П.С. Кутахова очень интересуется предложением И.А. Бережного.



Заинтересованность в разработках КБАС привела к И.А. Бережному заслуженного летчика испытателя СССР, летчика-космонавта СССР, дважды Героя Советского Союза Г.Т. Берегового.



И.А. Березной, главком ВВС СССР, маршал авиации, Герой Советского Союза
П.С. Кутахов, заместитель министра авиационной промышленности СССР Н.А.
Дондуков. Очень интересно и нужно!



Лауреат Нобелевской премии, академик Н.Г. Басов и И.А. Березной.
Разговор единомышленников.



Академик Н.Г. Басов доволен. На заднем плане – секретарь Обкома КПСС Н.Н. Панов. Крайний слева Цейлер В.И., второй от него А.И. Елатонцев.



И.А. Березной среди командиров авиационной промышленности.



Идет деловой разговор с министром авиационной промышленности СССР, дважды Героем Социалистического труда П.В. Дементьевым.(крайний слева в первом ряду).



В центре лауреат Нобелевской премии, академик А.М. Прохоров.



Талантливый физик – экспериментатор И.А. Бережной.



Перед коллективом нужно выступать – подводить итоги, ставить задачи.



Уточняются последние вопросы программы работ.
В центре академик Н.Г. Басов, справа – И. А. Бережной.



Академик Н.Г. Басов и И.А. Бережной на борту самолета перед полетом
в Москву.



На полигоне.

Слева направо: зам. Начальника летно-испытательной станции, летчик-испытатель 1-го класса В.Г. Рыбкин, директор ЧОЗИП Я.Д. Мясин, И.А. Бережной, ведущий конструктор А.Н.Жмаев.

ОСЦИЛЛОГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ ПРИ СОУДАРЕНИИ¹

При исследованиях работы оборудования и разного рода устройств, работа которых основана на явлениях соударения движущихся масс (кузнечное оборудование, клепальные пневмомолотки и т. д.), значительную трудность представляет экспериментальное определение скорости движущихся частей перед соударением. Величина скорости определяет кинетическую энергию движущихся частей и, в конечном счете, характеризует мощность оборудования, поэтому ее определение имеет большое практическое значение как при проектировании оборудования, так и при выборе оптимальных режимов в процессе работы.

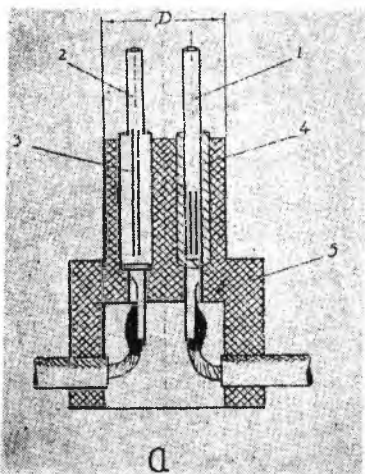


Рис. 1. Конструкция контактного устройства.
(1, 2 — контакты, 3, 4 — направляющие, 5 — корпус)

Направляющие запрессованы в корпус и изоляционного материала. Каждый контакт через аperiodическое звено с введением производной подключается на вход электронного осциллографа (рис. 2). Перед установкой контактного устройства вместо обжимки задается база, как разность высот контактов. Геометрические размеры контактного устройства выполнены таким образом, что середина базы лежит в плоскости соударения бойка с обжимкой. Питание схемы осуществляется от батареи, либо другого источника постоянного тока с напряжением 60—80 вольт.

При движении бойка в момент его соприкосновения с контактом на последнем скачком возрастает напряжение. Скачкообразное изменение напряжения преобразуется апе-

Предлагаемый метод, отличающийся простотой осуществления и достаточной точностью, позволяет определить скорость движущихся частей перед соударением.

Сущность метода заключается в определении скорости на малой базе известной длины, которая задается заранее посредством контактного устройства. Этим методом было произведено экспериментальное определение скорости бойка в конце хода для одноударного клепального молотка *).

Контактное устройство (рис. 1), посредством которого задается база, состоит из двух контактов 1 и 2, скользящих в направляющих 3, 4.

¹ «Бюллетень трудового опыта», 1957

* Экспериментальное определение скорости проводилось совместно с инженером Котляренко В. С.

продвижением шепом в импульс и регистрируется осциллографом. Таким образом происходит фиксирование начала прохождения базы. Аналогичным образом происходит фиксирование конца прохождения измерительной базы. Картина, видимая на экране осциллографа, приведена на рис. 3.

Длительность паузы (Т) между импульсами, определяемая по отметкам времени, либо методом сравнения, позволяет определить значение средней скорости на заданной базе. Следует отметить, что величина базы выбирается исходя из возможностей

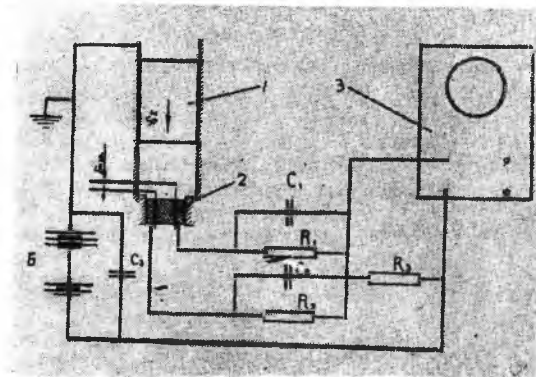


Рис. 2. Схема включения
(1 — боек молотка, 2 — контактное устройство,
3 — осциллограф, C_1, C_2 — 100 пф. C_3 — 1,0 мф.
 R_1, R_2 — 150 ком; R_3 — 10 ком; В — источник питания)

применение которого обеспечило достаточную точность и быстроту ее установки.

Для испытываемого типа молотка при давлении воздуха 4 кг/см^2 была получена длительность паузы между импульсами $t = 85 \cdot 10^{-6}$ сек., что соответствует скорости (при базе 1,1 мм) $12,9 \text{ м.сек.}^{-1}$.

Точность измерения по описанному методу в основном зависит от точности введения базы, точности определения времени между импульсами и влияния величины силы трения в контактном устройстве на изменение скорости бойка при прохождении базы. Изменение скорости за счет торможения с некоторыми допущениями описывается выражением

$$\Delta V = \frac{\Delta A}{mV}$$

где ΔA — работа на преодоление сил трения при прохождении базы;

m — масса подвижной части;

V — скорость подвижной части.

При практически встречающихся величинах массы и скорости подвижных частей погрешностью в определении скорости за счет сил трения можно пренебречь. В основном погрешность измерения скорости зависит от погрешности измерения времени, т. е. от применяемого типа осциллографа. Современ-

применяемых осциллографов и величины предполагаемых скоростей и ускорений.

Определение скорости при одиночном соударении ведется с применением осциллографа, имеющего режим ждущей развертки.

Экспериментальное определение скорости бойка для одноударного клепального молотка по описанному методу дало вполне

удовлетворительные результаты. База, равная 1,1 мм, задавалась с помощью специального шаблона,

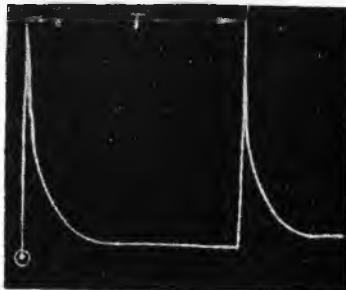


Рис. 3. Картина, видимая на экране осциллографа.

ные отечественные осциллографы гарантируют точность измерения времени порядка 1÷3 проц. Во всяком случае точность измерения скорости по этому методу вполне приемлема для инженерной практики.

ВЫВОДЫ:

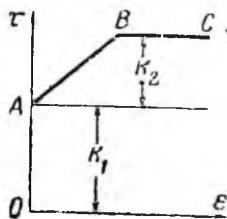
Описанный метод практически может быть рекомендован для определения скорости соударяющихся частей различного рода оборудования, машин и механизмов при соответствующих конструкциях контактного устройства. В случае необходимости выполнение контактных устройств возможно непосредственно в соударяющихся частях. Подобная методика может быть рекомендована для измерения скорости и частоты ударов при периодическом соударении, имея соответствующие конструкции контактного устройства. В этом случае на экране осциллографа можно наблюдать неподвижную картину, соответственно подобрав частоту развертки.

О КРУЧЕНИИ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ ИЗ ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА С УЧЕТОМ МИКРОНАПРЯЖЕНИЙ¹

И. А. Бережной, Д. Д. Ивлев (Воронеж)

Теория кручения стержней из идеального жестко-пластического материала изложена в работах [1-4]. В работе [5] рассмотрено кручение призматических стержней из жестко-пластического анизотропно упрочняющегося материала при линеаризованном условии пластичности. В настоящей работе рассматривается кручение стержней полигонального поперечного сечения. Материал стержней предполагается идеально пластическим, причем идеально пластическое состояние достигается при переходе через область упрочнения [6]. При этом в материале возникают остаточные микронапряжения [7]. Подобный материал можно назвать материалом с конечным упрочнением.

1. Рассмотрим задачу кручения стержней, материал которых следует зависимости между касательными напряжениями и необратимой частью сдвига, приведенной на фиг. 1. Выберем координатную систему, как показано на фиг. 2, в дальнейшем в обозначениях напряжений τ_x, τ_y и деформаций ϵ_x, ϵ_y будем опускать индекс z .



Фиг. 1

исходные соотношения для задачи кручения стержней из анизотропно упрочняющегося жестко-пластического материала с конечным упрочнением имеют вид

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

$$(\tau_x - s_x)^2 + (\tau_y - s_y)^2 = k_1^2, \quad s_x^2 + s_y^2 \leq k_2^2, \quad k_1, k_2 = \text{const} \quad (1.2)$$

¹ «Прикладная механика и техническая физика», №5, 1963.

$$\frac{d\varepsilon_x}{\varepsilon_x - s_x} = \frac{d\varepsilon_y}{\varepsilon_y - s_y} = \frac{d\chi_x}{s_x} = \frac{d\chi_y}{s_y} \quad (1.3)$$

$$s_x = c(\varepsilon_x - \chi_x), s_y = c(\varepsilon_y - \chi_y), c = const \quad (1.4)$$

Причем, если $s_x^2 + s_y^2 < k_2^2$, то $\chi_x = \chi_y = 0$

Здесь s_x, s_y — компоненты микронапряжений, χ_x, χ_y — компоненты микродеформаций, c — параметр упрочнения.

Условие пластичности (1.2) в плоскости τ_x, τ_y представляет окружность с координатами центра s_x, s_y . В начальный момент пластического течения

$$s_x = s_y = 0, \tau_x = \tau_x^0, \tau_y = \tau_y^0, (\tau_x^0)^2 + (\tau_y^0)^2 = k_1^2$$

Условие пластичности (1.2) может быть интерпретировано как огибающая семейства касательных к данному условию пластичности. В дальнейшем, следуя [5], линеаризуем условие пластичности, считая, что напряженное состояние в каждой точке тела соответствует касательной к окружности условия пластичности, сохраняющей свое направление в плоскости τ_x, τ_y в процессе деформирования тела

$$\tau_x^0(\tau_x - s_x) + \tau_y^0(\tau_y - s_y) = k_1^2 \quad (1.5)$$

Аналогично для микронапряжений можно положить, что после достижения ими предельных значений $s_x^0, s_y^0, (s_x^0)^2 + (s_y^0)^2 = k_2^2$ имеет место линеаризованное условие

$$s_x^0 s_x + s_y^0 s_y \leq k_2^2 \quad (1.6)$$

Рассматривая условия (1.5) и (1.6) в качестве пластических потенциалов, получим вместо (1.3) соотношения

$$\frac{d\varepsilon_x}{\tau_x^0} = \frac{d\varepsilon_y}{\tau_y^0}, \frac{d\chi_x}{s_x^0} = \frac{d\chi_y}{s_y^0} \quad (1.7)$$

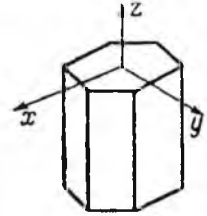
Так как, в процессе пластического течения τ_x^0, τ_y^0 и s_x^0, s_y^0 не зависят от пара метра нагружения, то, интегрируя (1.7), получим

$$\frac{\varepsilon_x}{\tau_x^0} = \frac{\varepsilon_y}{\tau_y^0} + c_1(x, y), \frac{\chi_x}{s_x^0} = \frac{\chi_y}{s_y^0} + c_2(x, y) \quad (1.8)$$

Полагая, что в начальный момент стержень находился в жестком, недеформированном состоянии и микронапряжения отсутствовали, получим, что $c_1 = c_2 = 0$, и окончательно соотношения (1.8) примут вид

$$\tau_y^0 \varepsilon_x - \tau_x^0 \varepsilon_y = 0, s_y^0 \chi_x - s_x^0 \chi_y = 0 \quad (1.9)$$

В дальнейшем необходимо исключить из исходных соотношений величины микронапряжений и микродеформаций. Используя (1.4), получим (1.5) и (1.6) в виде



Фиг. 2

$$\tau_x^o[\tau_x - c(\varepsilon_x - \chi_x)] + \tau_y^o[\tau_y - c(\varepsilon_y - \chi_y)] = k_1^2 \quad (1.10)$$

$$s_x^o(\varepsilon_x - \chi_x) + s_y^o(\varepsilon_y - \chi_y) = \frac{k_2^2}{c} \quad (1.11)$$

Условие (1.11) может быть записано

$$\chi_x s_x^o + \chi_y s_y^o = q \quad q = s_x^o \chi_x + s_y^o \chi_y - \frac{k_2^2}{c} \quad (1.12)$$

Решая линейную систему уравнений—соотношение для микронапряжений (1.9) и (1.12), получим для микродеформаций выражения

$$\chi_x = \frac{qs_y^o}{k_2^2}, \chi_y = \frac{qs_x^o}{k_2^2} \quad (1.13)$$

Тогда с учетом соотношений (1.13), условие (1.10) примет окончательно вид

$$\tau_x^o \left\{ \tau_x - c\varepsilon_x + \left[s_x^o \left(\frac{cs_y^o \varepsilon_x + cs_x^o \varepsilon_y}{k_2^2} - 1 \right) \right] \right\} + \tau_y^o \left\{ \tau_y - c\varepsilon_y + \left[s_y^o \left(\frac{cs_x^o \varepsilon_x + cs_y^o \varepsilon_y}{k_2^2} - 1 \right) \right] \right\} = k_1^2 \quad (1.14)$$

Компоненты деформаций определяются соотношениями

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2} \left(-\theta y + \frac{\partial \omega}{\partial x} \right), \varepsilon_y = \frac{1}{2} \left(\theta x + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \quad (1.15)$$

где $\omega(x, y)$ —депланация сечения, θ —крутка. Таким образом, для τ_x, τ_y и ω имеем: уравнение равновесия (1.1), условие пластичности (1.14) и закон пластического течения (первое соотношение (1.9)).

2. Рассмотрим область *oef* стержня полигонального поперечного сечения (фиг. 3а), где *oe*—линия разрыва напряжений. Уравнение линий разрыва $y = ax$ ($a = \text{const}$). Причем ось *x* перпендикулярна к свободной границе контура стержня *ef*.

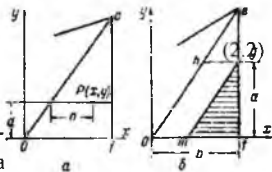
Из решения теории идеальной пластичности [1-4] следует

$$\tau_x^o = 0, \tau_y^o = k_1 \quad (2.1)$$

Как отмечалось в работе [3], депланация поперечного сечения стержня из упрочняющегося материала совпадает с депланацией при идеально пластическом течении стержня. Депланация в условиях жестко-пластического кручения определяется выражением $\omega = \pi d$, где π —расстояние от точки $P(x, y)$ до линии разрыва по нормали к *ef*, проходящей через точку - P. Для рассматриваемой области будем иметь

$$\omega(x, y) = \theta \left(x - \frac{y}{\alpha} \right) y \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_x = 0, \varepsilon_y = \theta \left(x - \frac{y}{\alpha} \right)$$



Предположим, что в некоторой области *mgf* (фиг. 3б) материал стержня достиг предела текучести (состояние BC на фиг. 1), тогда в рассматриваемой области

$$s_x^o = 0, s_y^o = k_2 \quad (2.3)$$

Линеаризованное условие текучести (1.14) с учетом (2.1) и (2.3) примет вид

$$\tau_y - c\varepsilon_y + \left[k_2 \left(\frac{c\varepsilon_y}{k_2} - 1 \right) \right] = k_1 \quad (2.4)$$

Отсюда следует, что в области *mgf*

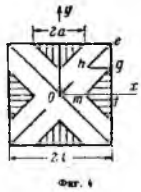
$$\tau_y = k_1 + k_2 \quad (2.5)$$

Подставляя выражение (2.5) в уравнение равновесия (1.1), найдем, что $\tau_x = \tau_x(y)$. На контуре *ef* всегда $\tau_x = 0$, следовательно, $\tau_x = 0$ всюду в области *mgf*.

В области *oegm* состояние материала соответствует отрезку АВ, показанному на фиг. 1. В этой области $s_x^2 + s_y^2 \leq k_2^2$ и $\chi_x = \chi_y = 0$. Тогда в области *oegm* условие пластичности (2.4) примет вид

$$\tau_y = k_1 + c\varepsilon_y \quad (2.6)$$

Уравнение равновесия (1.1) при условии (2.6) будет удовлетворено в рассматриваемой области, если



(2.7)

На границе области идеальной пластичности *mgf* имеем $\tau_y = k_1 + k_2, \tau_x = 0$, откуда, из выражений (2.7) найдем

$$c\theta \left(x - \frac{y}{\alpha} \right) = k_1, f(y) = -\frac{c\theta}{\alpha^2} y.$$

В области *ohgm* получим

$$\tau_x = \frac{c\theta}{\alpha} \left(x - \frac{y}{\alpha} \right) - \frac{k_1}{\alpha} \quad (2.8)$$

В области *heg*, удовлетворяя условию $\tau_x = 0$ на контуре *eg*, получим

$$\tau_x = \frac{c\theta}{\alpha} (x - b) \quad (2.9)$$

На границе *hg* компонента напряжения τ_x терпит разрыв. Разрыв компоненты напряжения τ_x статически допустим, так как контактирующие напряжения τ_y при переходе через *hg* непрерывны. Появление разрыва обусловлено принятой предельной схемой. Обозначим длину области идеальной пластичности вдоль свободного контура *ef* через *gf* = *a*, тогда из (2.7) будем иметь

$$a = \left(b - \frac{k_1}{c\theta} \right) \alpha \quad (a=0 \text{ при } \theta \leq \frac{k_1}{cb}) \quad (2.10)$$

3. Рассмотрим конкретные примеры.

1) В случае стержня, квадратного сечения (фиг. 4) с длиной стороны *2l* в области *oef* уравнение линии разрыва *oe* имеет вид $y = x, \alpha=1$. Из (2.5), (2.7), (2.8) и (2.9) найдем

$$\begin{aligned} \tau_y &= k_1 + k_2, \tau_x = 0 \quad (\text{в } mgf) \\ \tau_y &= k_1 + c\theta(x - y), \tau_x = c\theta(x - y) - k_2 \quad (\text{в } ohgm) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\tau_y = k_1 + c\theta(x-y), \tau_x = c\theta(x-l) \text{ (в } heg)$$

Крутящий момент для всего сечения будет

$$M = 4(k_1 + k_2) \left(la^2 - \frac{a^3}{3} \right) + \frac{8}{3} k_1 \left(l^3 - \frac{3}{2} a^2 l + \frac{a^3}{3} \right) + 2k_2(la^2 - a^3) + \frac{4}{3} c\theta(l^4 + 4l^3 a - 24l^2 a^2 + 32la^3 - 13a^4)$$

$$\text{где } a=0 \text{ при } \theta \leq \frac{k_2}{cl}, \quad a = l - \frac{k_2}{c\theta} \text{ при } \theta > \frac{k_2}{cl} \quad (3.3)$$

Области пластичности, соответствующие состоянию идеальной пластичности материала (BC на фиг. 1), здесь и везде заштрихованы.

2) Рассматривая область *oef* стержня треугольного сечения (фиг. 5) со стороной $2l$ получим уравнение линии разрыва *oe* в виде

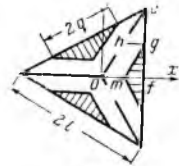
$$y = \frac{3x}{\sqrt{3}}, \alpha = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

Тогда из (2.5), (2.7), (2.8) и (2.9) найдем компоненты напряжений

$$\tau_y = k_1 + k_2, \tau_x = 0 \quad (\text{в } mgf) \quad (3.4)$$

$$\tau_x = k_1 + c\theta \left(x - \frac{\sqrt{3}}{3} y \right), \tau_y = c\theta \frac{\sqrt{3}}{3} \left(x - \frac{\sqrt{3}}{3} y \right) - k_2 \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\text{в } ohgm)$$

$$\tau_y = k_1 + c\theta \left(x - \frac{\sqrt{3}}{3} y \right), \tau_x = c\theta \frac{\sqrt{3}}{3} \left(x - \frac{\sqrt{3}}{3} l \right) \quad (\text{в } heg)$$



Фиг. 5

Крутящий момент для всего сечения будет равен

$$M = (k_1 + k_2) \left(\frac{13}{3} a^2 - 2al^2 - \frac{5}{3} a^3 \right) + k_1 \left(\frac{2}{3} l^3 - a^2 l + \frac{a^3}{3} \right) + k_2(la^3 - a^3) + c\theta \frac{\sqrt{3}}{9} (l^4 - 2l^3 a - 3l^2 a^2 + 5la^3 - a^4) \quad (3.5)$$

где

$$a=0 \text{ при } \theta \leq \frac{3k_2}{\sqrt{3}cl}, \quad a = l - \frac{3k_2}{\sqrt{3}c\theta} \text{ при } \theta > \frac{3k_2}{\sqrt{3}cl} \quad (3.6)$$

3) Решение для стержня прямоугольного сечения со сторонами $2h$ и $2l$ (фиг. 6) в области *oef* определяется аналогично стержню квадратного сечения.

В области *o1omm1* угловой коэффициент линии разрыва $a = \infty$, тогда из (2.5), (2.7), (2.8) и (2.9) компоненты напряжения определяются

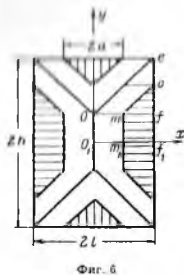
$$\tau_y = k_1 + k_2, \tau_x = 0 \quad (\text{в } mm1ff1)$$

$$\tau_y = k_1 + c\theta x, \tau_x = 0 \quad (\text{в } o1omm1) \quad (3.7)$$

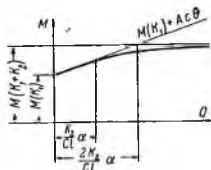
Крутящий момент для всего сечения будет равен

$$M = M^* + 4(h-l)[(k_1 + k_2)al + k_1(l^2 - al) + k_2(la - a^2) + \frac{1}{3} c\theta(l-a)^3] \quad (3.8)$$

где M^* — крутящий момент для стержня квадратного сечения, определяемый по формуле (3.2). Отметим, что зависимость $M = M(\theta)$ для стержней из жестко-пластического материала



Фиг. 6



Фиг. 7

ла с конечным упрочнением при значениях крутки в пределах $0 < \theta \leq \frac{k_2}{cb} = \frac{k_2 \alpha}{cl}$ совпадает с зависимостью $M = M(\theta)$ для идеально пластического материала с линейным упрочнением [5]. В интервале значений крутки $\frac{k_1 \alpha}{cl} < \theta \leq \infty$ зависи-

мость $M = M(\theta)$ становится нелинейной и по мере роста крутки асимптотически приближается к решению для идеально пластического материала с пределом текучести $(k_1 + k_2)$, это обстоятельство указано на фиг. 7.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Теория пластичности. Изд. АН СССР, 1946; Гостехтеоретиздат, 1950.
2. Хилл Р. Математическая теория пластичности. Гостехтеоретиздат, 1956.
3. Прагер В. и Ходж Ф. Теория идеально пластических тел. ИЛ, 1956.
4. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. Гостехтеоретиздат, 1956.
5. Дудукаленко В. В., Ивлев Д. Д. О кручении призматических стержней из упрочняющегося материала при линеаризованном условии пластичности. Изв. АН СССР. ОТН, Механика и машиностроение, 1963, № 3.
6. Ивлев Д. Д. Об идеально пластическом течении материала с учетом остаточных микронапряжений. ПММ, 1962, т. XXVI, № 4.
7. Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В. Теория пластичности, учитывающая микронапряжения. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 1.

О ВЛИЯНИИ ВЯЗКОСТИ НА МЕХАНИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД¹

И. А. БЕРЕЖНОЙ, Д. Д. ИВЛЕВ

В последнее время появился ряд работ, посвященных теории вязко-упруго-пластических сред, среди которых отметим ⁽¹⁻⁵⁾.

В настоящей работе рассматривается обобщение модели анизотропно упрочняющегося упруго-пластического тела ⁽⁶⁻⁸⁾ путем введения внутреннего элемента вязкости, который определяет релаксацию остаточных микронапряжений. Показано, что для анизотропно упрочняющегося пластического материала проявление релаксирующих свойств микрона-

¹ Доклады Академии наук СССР 1965. Том 163, № 3

пряжений позволяет объяснить появление “угловых точек” при изломе траектории нагружения.

Возможные сочетания элементов упругости, вязкости и пластичности показаны на рис. 1. Наличие вязкости делает механическое поведение зависимым от времени, поэтому поведение материала будет зависеть от скорости нагружения. Следует различать два предельных случая: скорость нагружения бесконечно мала; скорость нагружения бесконечно велика, (мгновенное нагружение). Инерционные свойства моделей при этом во внимание не принимаются.

При бесконечно медленном нагружении релаксационные процессы происходят в полной мере, и элемент вязкости не сопротивляется усилию. Наоборот, при мгновенном изменении усилий элемент вязкости ведет себя как жесткая связь. Аналогично материал ведет себя при сколь угодно малом или сколь угодно большом коэффициенте вязкости.

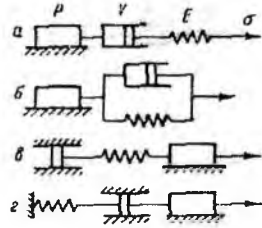


Рис. 1

При данных константах, характеризующих механические свойства моделей, зависимость напряжение — деформация ($\sigma - e$) зависит от скорости нагружения. На рис. 2 приведены области зависимости ($\sigma - e$), соответствующие моделям, приведенным на рис. 1. Модели, приведенной на рис. 1а, соответствует на рис. 2 область, ограниченная линиями oa, obd ; модели рис. 1б — область, ограниченная линиями $obd, ocbd$; модели рис. 1в — область, ограниченная линиями $ocd, ocф$; модели рис. 1г — область, ограниченная линиями $ocф, ocг$.

Сосредоточим внимание на модели рис. 1в. В случае, когда нагружение мгновенно или коэффициент вязкости неограниченно велик, имеет место модель анизотропно упрочняющегося пластического материала; когда нагружение бесконечно медленное или коэффициент вязкости равен нулю — модель идеально пластического тела. Отметим также, что с неограниченным ростом коэффициента жесткости упругой пружины связь между элементом вязкости и пластичности становится жесткой, и имеет место модель вязкопластического тела (тело Бингама) и т. д.

Следя идеям работы ⁽⁸⁾, на рис.3 приводим полезную двумерную модель, соответствующую одномерной модели рис.1в. Обозначим через T_1 и T_2 внешние усилия, действующие на пластический элемент рис.3, через s_1, s_2 — усилия в пружинах. Далее, через q_1, q_2 обозначим перемещения пластического элемента, через r_1, r_2 — перемещения элемента вязкости. Полная система уравнений, определяющих механическое поведение рассматриваемой модели, будет иметь вид

$$(T_1 - s_1)^2 + (T_2 - s_2)^2 = k^2, \quad \Delta q_1 : \Delta q_2 = (T_1 - s_1) : (T_2 - s_2),$$

$$s_i = c(q_i - r_i), \quad \dot{s}_i = \mu \dot{r}_i, \quad i=1,2, \quad (1)$$

где k — коэффициент трения; μ — коэффициент вязкости; c — коэффициент жесткости; Δq_i — приращения перемещений пластического элемента; точка сверху означает дифференцирование по времени.

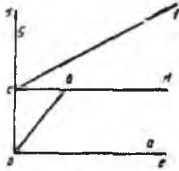


Рис. 2

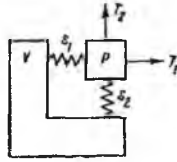


Рис. 3

При использовании динамических аналогий усилиям ставятся в соответствие напряжения, перемещения — деформации. Обозначим через σ_{ij} , тензор действительных напряжений (соответствующий усилиям T_i), через s_{ij} (следуя терминологии работы (8)) — тензор микронапряжений (соответствующий усилиям s_i), через e_{ij} — тензор действительных деформаций (соответствующий перемещениям q_i). Девiatorам соответствующих тензоров припишем штрих сверху. Отметим, что рассматриваемая среда является жестко пластической, поэтому e_{ij} — компоненты пластической деформации.

Условие текучести запишем в виде

$$f(\sigma_{ij} - s_{ij}) = 0. \quad (2)$$

Предположим, что функция f — достаточно гладкая. Рассмотрим выражение приращения работы $dA = \sigma_{ij} de_{ij}$. Полагая справедливым принцип Мизеса (9) об экстремальности работы напряжений на данных приращениях деформации среди всех возможных значений компонент напряжений, получим ассоциированный закон течения

$$de_{ij} = d\lambda \partial f / \partial \sigma_{ij}, \quad d\lambda \geq 0. \quad (3)$$

Исходя из принципа Мизеса, можно установить также невогнутость функции нагружения $f = 0$.

Предположим для простоты, что функция нагружения не зависит от первых инвариантов σ_{ij}, s_{ij} . Далее положим

$$\dot{s}_{ij} = c(e_{ij}^* - \chi_{ij}^*), \quad \dot{s}_{ij} = \mu \chi_{ij}^*, \quad e_{ij}^* = \chi_{ij}^* = 0, \quad c, \mu = const. \quad (4)$$

Система соотношений (2)—(4) полностью определяет механические свойства рассматриваемой модели тела, индекс которой $Pe\nu$, согласно классификации (5).

Отметим очевидные свойства рассматриваемой модели. Материал жестко-пластический. Если вывести материал за предел текучести и зафиксировать нагрузки, то будет происходить процесс ползучести. Если материал вывести за предел текучести, а затем разгрузить, то за счет релаксации микронапряжений s_{ij} поверхность нагружения с течением времени будет стремиться занять исходное положение и т. д.

Известные определения нагружения полностью сохраняют силу: нагружение будет в случае, когда $f = 0, \dot{f} > 0$; разгрузка — при $f < 0, \dot{f} < 0$; нейтральное нагружение — при $f = 0, \dot{f} = 0$.

Рассмотрим случай нейтрального нагружения. Из (2) следует, что при этом

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} (\dot{\sigma}_{ij} - \dot{s}_{ij}) = 0. \quad (5)$$

При нейтральном нагружении приращения пластических деформаций равны нулю: $de_{ij} = 0, d\lambda = 0$. Дифференцируя первое соотношение (4) по времени, для случаев нейтрального нагружения и разгрузки получим

$$\dot{s}_{ij} = -c \dot{\chi}_{ij} \quad (6)$$

Из второго соотношения (4) и (6) найдем

$$\dot{s}_{ij} + \frac{c}{\mu} s_{ij} = 0, \quad (7)$$

откуда

$$s_{ij} = s_{ij}^{(0)} e^{-\frac{c}{\mu} t}, \quad (8)$$

$$\dot{s}_{ij} = -\frac{c}{\mu} s_{ij}^{(0)} e^{-\frac{c}{\mu} t},$$

где $s_{ij}^{(0)}$ — микронапряжения в момент времени $t=0$, отсчитываемый

от начала разгрузки или нейтрального нагружения. Итак, при разгрузке и нейтральном нагружении скорости релаксации внутренних микронапряжений всегда пропорциональны микронапряжениям $s_{ij}^{(0)}$.

Согласно (5) в пространстве напряжений при нейтральном нагружении вектор $\dot{\sigma} - \dot{s}$ с компонентами $\sigma_{ij} - s_{ij}$ ортогонален нормали n к поверхности нагружения $f=0$. На рис.4 изображена регулярная поверхность нагружения $f=0$. В данной точке σ_{ij} к поверхности нагружения проведена нормаль n и построен вектор $-\dot{s}$. Вектор скорости изменения действительных напряжений $\dot{\sigma}$ при нейтральном нагружении направлен внутрь поверхности нагружения, так что вектор $\dot{\sigma} - \dot{s}$ лежит в касательной плоскости к поверхности $f=0$.

Следовательно, в данной точке регулярной поверхности нагружения вследствие релаксации микронапряжений экспериментатор может наблюдать эффект "угловой точки" на поверхности нагружения: приращение пластических деформаций может происходить и в случае, когда вектор приращения напряжений направлен внутрь исходной поверхности нагружения. Аналогичные эффекты отмечаются в работе (4).

Угол, образуемый вектором $\dot{\sigma}$ с нормалью n , зависит, очевидно, от скорости нагружения σ . В случае мгновенного изменения напряжений $\dot{\sigma} \gg \dot{s}$ и вектор $\dot{\sigma}$ ортогонален к n .

В данном случае может наблюдаться не только эффект внутренней, но и внешней угловой точки. В самом деле, если путем мгновенного изменения вектора напряжений $\dot{\sigma}$ перейти в некоторую другую точку поверхности нагружения (σ_1 на рис. 4), то векторы s и $-\dot{s}$ сохранят свое первоначальное значение. На замкнутой поверхности нагружения всегда найдутся такие точки, для которых вектор $-\dot{s}$ направлен внутрь поверхности нагружения. Тогда вектор $\dot{\sigma}$, соответствующий нейтральному нагружению, будет лежать, вообще говоря, вне мгновенной поверхности нагружения и будет образовывать острый угол с нормалью n в данной точке поверхности нагружения.

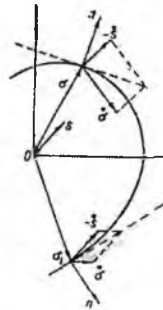


Рис. 4

Итак, эффекты релаксации микронапряжений s_{ij} , обеспечивают стремление поверхности нагружения $f(\sigma_{ij} - s_{ij}) = 0$ к исходному состоянию в пространстве нагружения, что приводит к возможности пластического деформирования, когда приращение вектора напряжений $\Delta\sigma$ лежит либо внутри, либо вне области, ограниченной поверхностью нагружения предыдущего состояния. Последнее обстоятельство объясняет кажущееся появление угловой точки на поверхности нагружения, исходя из представления о релаксирующих микронапряжениях.

Отметим, что для рассматриваемой модели зависимость между напряжениями и деформациями на примере чистого сдвига может быть записана в виде

$$c\tau + \mu\dot{\tau} + c\mu\dot{\epsilon} = const. \quad (9)$$

Следовательно, функция нагружения в данном случае зависит и от скорости изменения напряжений.

Авторы выражают признательность В. Д. Ключникову за ряд ценных замечаний.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Landau, J. Weiner, E. Zwicky, J. Appl. Mech., 27, 481 (1960).
2. Д. Д. Ивлев, В сборн. Проблемы механики сплошной среды, в честь акад. Н. И. Мухомелишвили. Изд. АН СССР, 1961.
3. Р. Pezyna, Techn. Rep., Brown Univ., № 76 (1962).
4. П. М. Нагди, С. А. Мерч, Прикладная механика, 30, № 3 (1963).
5. Д. Д. Ивлев, ДАН, 148, № 1 (1963).
6. W. Prager, ZAMM. 15, H. 1/2 (1935).
7. Ю. И. Кадашевич, В. В. Новожилов, Прикл. матем. и мех., 22, в. 1 (1958).
8. R. Mises, ZAMM. 8. H. 1 (1928).

О ЛИНЕАРИЗАЦИИ СООТНОШЕНИЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД, СВОЙСТВА КОТОРЫХ ЗАВИСЯТ ОТ ВРЕМЕНИ¹

В работе рассматривается линеаризация исходных соотношений теории пластических сред, свойства которых могут зависеть от времени. Подобные идеи для случая кручения стержней развивались в [1-8].

1. Следуя [4,5], предположим, что функцию нагружения можно записать в виде

$$f(\sigma_{ij} - s_{ij}) = 0 \quad (1.1)$$

Здесь σ_{ij} — компоненты напряжений, s_{ij} — компоненты внутренних микронапряжений. Компоненты микронапряжений могут проявлять зависимости от компонент пла-

¹ МТТ АН СССР, № 3, 1966

стической деформации, скоростей пластической деформации и от других параметров. Ассоциированный закон пластического течения запишется в виде

$$d\varepsilon_y^p = d\lambda \star \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} \quad (1.2)$$

где $d\varepsilon_y^p$ — компоненты приращения пластической деформации.

Нелинейные соотношения (1.1), (1.2) приводят в общем случае к значительным математическим трудностям, которые в ряде случаев могут быть устранены за счет линеаризации этих соотношений.

Предположим, что в результате некоторой истории нагружения траектория нагружения в пространстве напряжений вышла на поверхность $f=0$ в точке σ_y^0 и будем предполагать, что это напряженное состояние характеризуется отсутствием начальных микронапряжений $s_y^0 = 0$. Тогда уравнение касательной гиперплоскости к поверхности нагружения в точке σ_y^0 запишется в виде

$$\left. \frac{\partial f(\sigma_y - s_y)}{\partial \sigma_y} \right|_{\sigma_y^0} \left[(\sigma_y - s_y) - \sigma_y^0 \right] = 0 \quad (1.3)$$

Таким образом, исходная функция нагружения локально в окрестности σ_y^0 заменяется касательной гиперплоскостью, которую в дальнейшем будем называть линеаризованной функцией нагружения. С учетом введенной линеаризованной функции нагружения ассоциированный закон пластического течения примет вид

$$d\varepsilon_y^p = d\lambda \frac{\partial f(\sigma_y - s_y)}{\partial \sigma_y} \Big|_{\sigma_y^0} \quad (1.4)$$

Из соотношения (1.4) очевидна градиентальность вектора приращения пластической деформации к линеаризованной поверхности нагружения, причем направление будет оставаться фиксированным и не зависимым от дальнейшей истории нагружения. Свойства приобретать анизотропию в процессе нагружения сохраняются и у линеаризованной функции нагружения. Заметим, что в начальный момент пластического течения вектор скорости пластической деформации для функций нагружения (1.1) и (1.3) будет совпадать, поэтому для начального пластического течения разница между решениями для обеих функций будет мала. Исходные предположения определяют кинематику, совпадающую с течением тела из идеально пластического материала, поэтому разница будет иметь место для компонент напряженного состояния. В ряде случаев достаточно использовать только линеаризованный закон пластического течения (1.4), оставляя функцию нагружения нелинейной.

2. В качестве примера рассмотрим кручение призматических стержней из пластического материала с трансляционным механизмом микронапряжений, который определяется моделью Максвелла при линеаризованных функциях нагружения и ассоциированного с ней закона пластического течения.

Определяющие соотношения для кручения стержней из пластического материала с упруго-вязким механизмом микронапряжений могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} = 0, (\tau_x - s_x)^2 + (\tau_y - s_y)^2 = k^2 \quad (2.1)$$

$$d\varepsilon_y^p = d\lambda(\tau_x - s_x), s_x = c(\varepsilon_x - \chi_x), s_y = \mu\chi_x \quad (2.2)$$

Здесь τ_x — компоненты касательных напряжений; s_x — компоненты микронапряжений; ε_y^p — компоненты пластической деформации; χ_x — компоненты микродеформаций вязкого элемента; c, μ — константы трансляционного упрочнения и вязкости соответственно. Здесь и везде индекс z в обозначении компонент переменных опускается, а индекс i будет принимать значение x, y .

Функция нагружения, определяемая вторым соотношением (2.1) в плоскости касательных напряжений τ , представляет собой окружность радиуса k и координатами центра s_x .

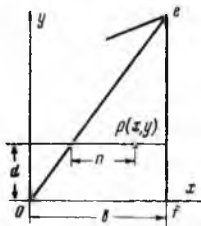
Приобретаемая анизотропия свойств модели определяется компонентами внутренних микронапряжений и на плоскости напряжений интерпретируется как перемещение окружности относительно начального положения, причем, в силу заданного соотношения, радиус окружности остается фиксированным. В начальный момент нагружения предполагается, что микронапряжения отсутствуют $s_i^0 = 0$, т. е. центр начальной окружности текущей совпадает с началом координат.

Линеаризированная согласно (1.3) функция нагружения (2.1) примет вид

$$\tau_x^0(\tau_x - s_x) + \tau_y^0(\tau_y - s_y) = k^2 \quad (2.3)$$

где τ_i^0 — компоненты начального напряженного состояния.

Ассоциированный закон пластического течения при линеаризированной функции нагружения (1.4) с учетом соотношения (2.3) и с исключенным скалярным множителем записывается



Фиг. 1

$$\frac{d\varepsilon_x}{\tau_x} = \frac{d\varepsilon_y}{\tau_y} \quad (2.4)$$

Так как в процессе пластического течения компоненты τ_i^0 не зависят от параметров нагружения, то, интегрируя соотношение (2.4), можно получить

$$\frac{\varepsilon_x}{\tau_x} = \frac{\varepsilon_y}{\tau_y} + c(x, y)$$

где постоянная интегрирования (определится из предположения, что в начальный момент стержень находился в жестком недеформированном состоянии и микронапряжения отсутствовали, тогда $c = 0$, и окончательно получим

$$\tau_y^0 \varepsilon_x - \tau_x^0 \varepsilon_y = 0 \quad (2.5)$$

В дальнейшем необходимо из определяющих соотношений исключить внутренние микронапряжения, выразив их через компоненты напряжений и пластических деформаций. Это можно сделать воспользовавшись вторым и третьим соотношениями (2.2). Дифферен-

цируя по времени второе соотношение (2.2) и внося в него третье, получим для определения микронапряжений линейные неоднородные дифференциальные уравнения в виде

$$s_i^* + \frac{c}{\mu} s_i = c(\varepsilon_i^{*p})^* \quad (2.6)$$

После интегрирования и определения постоянных интегрирования из начальных условий получим для микронапряжений соотношения

$$s_i = [s_i^* + c \int_0^t (\varepsilon_i^{*p})^* \exp\left(-\frac{c}{\mu} t\right) dt] \exp\left(-\frac{c}{\mu} t\right) \quad (2.7)$$

где s_i^* — компоненты начальных микронапряжений в момент времени $t = 0$. Компоненты скоростей пластической деформации определим через скорости крутки $\theta(t)$ и скорость изменения деформации сечения $\omega^*(t)$, дифференцируя по времени известные из теории кручения соотношения, которые примут вид

$$\varepsilon_x^* = \frac{1}{2} \left(-\theta_x + \frac{d}{dt} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_y^* = \frac{1}{2} \left(-\theta_y + \frac{d}{dt} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \quad (2.8)$$

Таким образом, решение задачи о кручении стержней в случае рассматриваемой модели материала определяется компонентами касательного напряжения τ_i и деформацией сечения, которые можно получить из уравнения равновесия, линеаризированной функции нагружения с учетом соотношений для компонент микронапряжений и компонент скоростей деформаций. В дальнейшем сосредоточим внимание на кручении стержней полигонального поперечного сечения, элемент которых приведен на фиг. 1. Рассматриваемый элемент стержня ограничен линией разрыва напряжений oe с уравнением $y = ax$ ($a = \text{const}$) и свободной границей ef с уравнением $x = b$. Из решения задачи кручения идеально пластического полигонального стержня известно

$$\tau_x^* = 0, \quad \tau_y^* = k, \quad (2.9)$$

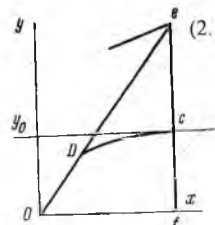
а так как рассматриваемый стержень в начальном состоянии является жесткопластическим и начальные микронапряжения отсутствуют, то деформация сечения в данном случае будет совпадать с деформацией идеально пластического кручения, которая выражается соотношением $\omega = n \theta d$, где (фиг. 1) n — расстояние текущей точки $p(x, y)$ от линии разрыва напряжений вдоль нормали к ef . Тогда для рассматриваемой области oef соотношения (2.8) примут вид

$$\omega(x, y) = \theta \left(x - \frac{y}{\alpha} \right), \quad \varepsilon_x^* = 0, \quad \varepsilon_y^* = \theta^* \left(x - \frac{y}{\alpha} \right) \quad (2.10)$$

С учетом этих соотношений из (2.3) и (2.7) при нулевых начальных микронапряжениях получим окончательное выражение для компоненты касательного напряжения τ_y в виде

$$\tau_y = k + c \left(x - \frac{y}{\alpha} \right) T \quad (2.11)$$

Здесь и везде далее будем обозначать



$$T = \int \rho(t) \exp\left(\frac{c}{\mu} t\right) dt \exp\left(-\frac{c}{\mu} t\right)$$

Компоненту τ_x получим, внося предыдущее соотношение в уравнение равновесия. После интегрирования и определения константы из условия на контуре $\tau_x = 0$ будем иметь

$$\tau_x = \frac{c}{\alpha}(x-b)T \quad (2.12)$$

3. Рассмотрим эту же задачу, но оставив функцию нагружения нелинейной. Так как компонента $\varepsilon_x'' = 0$, то $s_x = 0$ и функция нагружения будет иметь более простой вид

$$\tau_x^2 + (\tau_y - s_y)^2 = k^2 \quad (3.1)$$

Этому уравнению удовлетворим подстановкой

$$\tau_x = -k \sin(\beta), \quad \tau_y = k \cos(\beta) + s \quad (3.2)$$

Затем, внося (3.2) в уравнение равновесия (2.1), получим

$$k \cos(\beta) \frac{\partial \beta}{\partial x} + k \sin(\beta) \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial y} = 0 \quad (3.3)$$

Уравнению (3.3) с учетом соотношений (2.7) соответствует система обыкновенных дифференциальных уравнений, которая записывается

$$\frac{dx}{k \cos(\beta)} = \frac{dy}{k \sin(\beta)} = \frac{d\beta}{-\frac{c}{\alpha} T} \quad (3.4)$$

Отсюда после интегрирования и определения констант из условия на контуре получим

$$\sin(\beta) = \frac{c}{k\alpha} T(x-b), \quad \cos(\beta) = \frac{c}{k\alpha} T(y-y_0) + 1 \quad (3.5)$$

y_0 — ордината точки на контуре $x = b$ (фиг. 2), из которой выходит соответствующая характеристика. Внося эти соотношения в выражения (3.2), определим компоненты касательных напряжений в рассматриваемой области

$$\tau_x = \frac{c}{\alpha} T(x-b), \quad \tau_y = \frac{c}{\alpha} T(y-y_0) + k \left(x - \frac{y}{\alpha} \right) + k \quad (3.6)$$

Из соотношений (3.5) получим уравнение характеристик в плоскости τ ,

$$(x-b)^2 + \left(y - y_0 + \frac{k\alpha}{c} T^{-1} \right)^2 = \left(\frac{k\alpha}{c} \right)^2 \frac{1}{T^2} \quad (3.7)$$

которые представляют собой дуги окружности радиуса $\frac{k\alpha}{cT}$ с центрами в точках $x =$

$b, y = y_0 - \frac{k\alpha}{cT}$. Легко видеть, что при $c \rightarrow 0$ или $T \rightarrow 0$ имеет место решение идеальной пластичности, т. е. характеристики спрямляются и становятся ортогональными к свободной границе контура.

Соотношения для компонент касательного напряжения (3.6) справедливы вдоль характеристик: аналитические соотношения для компонент касательного напряжения запишутся

$$\tau_x = \frac{c}{\alpha} T(x-b), \quad \tau_y = \sqrt{k^2 - \tau_x^2} + cT(x - \frac{y}{\alpha}) \quad (3.8)$$

Сопоставляя соотношения (3.8) с соотношениями (2.11) и (2.12), заметим, что компоненты τ_x совпадают полностью, а компоненты τ_y совпадают с точностью до τ_x^2 в подкоренном выражении (3.8).

Рассмотрим конкретный пример. Для стержня квадратного сечения с учетом соотношений (2.11) и (2.12) получим выражение, связывающее крутящий момент с круткой в виде $M = 8/3 kl^3 + 4/3 cl^4 T$, которое для постоянной скорости крутки $\theta'(t) = const = \omega$ примет вид

$$M = (8/3)kl^3 + (4/3)l^4\omega\mu \left[1 - \exp\left(-\frac{ct}{\mu}\right) \right].$$

Это соотношение соответствует состоянию установившейся ползучести при угловой скорости ω , ($t \rightarrow \infty$) заметим также, что первый член приведенного соотношения соответствует решению для идеально пластического материала стержня.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дудукаленко В. В., Ивлев Д.Д.0 кручении призматических стержней из упрочняющегося материала при линеаризованном условии текучести. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1963, № 3.
2. Дудукаленко В. В., Ивлев Д.Д.0 кручении анизотропно упрочняющихся призматических стержней при линеаризованном законе пластического течения. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1963, № 5.
3. Бережной И. А., Ивлев Д.Д.0 кручении призматических стержней из идеально пластического материала с учетом микронапряжений. ПМТФ, 1963, № 5.
4. Кадашевич Ю. И. и Новожилов В. В. Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения. ПММ, 1958, т. 22, вып. 1.
5. Ивлев Д.Д. К теории сложных сред. Докл. АН СССР, 1963, т. 148, № 1.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД, СВОЙСТВА КОТОРЫХ ЗАВИСЯТ ОТ ВРЕМЕНИ¹

В механике сплошных сред объектом исследования является идеализированная математическая модель, удовлетворяющая тем или иным физическим принципам. В теории пластичности одной из основных моделей является модель идеально пластического тела. За последнее время в теории пластических сред появились более сложные модели, посредством которых можно учесть целый ряд новых механических эффектов, сопровождающих пластические деформации. К таким моделям можно отнести модели, учитывающие эффек-

¹ Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

та анизотропного и изотропного упрочнения и т. д. Хотя соотношения теории пластичности формулируются в скоростях деформации, но они оказываются однородными относительно времени и указанные модели не учитывают зависимость свойств от времени. Реальные же среды в той или иной мере проявляют зависимость своих свойств от времени, которые обуславливают такие эффекты, как ползучесть, последствие, релаксация и т. д.

Реферлируемая работа посвящена исследованию некоторых вопросов общей теории пластических сред, свойства которых зависят от времени и состоят из введения и трех глав.

Во введении дается краткий обзор отечественных и зарубежных работ, в том числе и экспериментальных, по теории пластических сред и в частности по теории пластических сред, свойства которых проявляют зависимость от времени.

Первая глава посвящена введению основных соотношений, определяющих законы течения сплошных сред, свойства которых зависят от времени. В первом параграфе рассматриваются основные соотношения теории пластических сред с упрочнением, свойства которых не зависят от времени [1,2].

Во втором параграфе вводятся основные предположения теории упрочняющихся пластических сред, свойства которых зависят от времени. В этом случае функция нагружения кроме параметров, определяющих напряженное и деформированное состояние, содержит еще систему параметров, связанных интегральными или дифференциальными соотношениями с пластическими деформациями, историей нагружения и т. п. Например, в простейшем случае эти параметры могут совпадать с компонентами скорости пластической деформации. Теперь функция нагружения, ее размеры и ориентация относительно начальной системы координат меняется со временем, и для исследования этих процессов оказывается целесообразным введение понятий, связанных с предельными значениями временных параметров. Для этого вводится понятие мгновенной и квазистатической поверхности нагружения. Затем, применяя принцип максимума Мизеса, показывается невогнутость мгновенной поверхности нагружения и градиентальность вектора скорости пластической деформации к мгновенной поверхности нагружения в текущей точке траектории напряжений. Выпуклость и градиентальность также показываются, если напряженное и деформированное состояние удовлетворяет постулированному в работе [3] соотношению, которое для мгновенных функций нагружения совпадает с принципом Мизеса. В третьем параграфе даются основные соотношения между напряженным и деформированным состоянием и параметрами, определяющими процесс пластического течения с временными эффектами. Определяется скалярный множитель в ассоциированном законе пластического течения.

Во второй главе исследуются некоторые модели пластических сред, свойства которых зависят от времени. В первом параграфе рассматриваются модели пластических сред с трансляционными механизмами пластичности, вязкости и упругости.

Рассматриваются в общем виде соотношения для функций нагружения внешних и внутренних механизмов и даются соотношения между напряжениями и приращениями пластической деформации. Отмечается, что введенные модели могут позволить исследовать поведение пластических сред с анизотропным упрочнением и зависимость свойств от времени в пределах возможных комбинаций свойств исходных элементов [5]. Во втором параграфе рассмотрены модели, получаемые возможными комбинациями элементов идеальной пластичности, линейных упругости и вязкости. Затем подробно исследуется модель пластической среды с остаточными микронапряжениями, определяемыми максвелловским

механизмом. Показывается, что функция нагружения отражает эффект анизотропного упрочнения и может менять свое положение в пространстве напряжений с течением времени. Кроме того, касательное к мгновенной, поверхности, нагружение уже не является нейтральным, как это имеет место в пластичности без временных эффектов. Отмечается, что при экспериментальном изучении поверхности нагружения для таких сред вследствие релаксации внутренних микронапряжений можно обнаружить кажущиеся эффекты угловых точек на поверхности нагружения, несмотря на то, что поверхность нагружения по своей природе регулярна. В третьем параграфе рассматривается вязкоупруго-пластическая среда, в которой связи между напряжениями и деформациями определяются интегральными соотношениями ползучести классической теории вязкоупругости [6]. Рассматривается поведение функции нагружения в девятимерном пространстве напряжений и критерии нагружения. В четвертом параграфе дается обобщение модели упруго пластической среды [7] на упруго пластическую среду с трансляционным механизмом микронапряжений максвелловского типа. На этом примере изучается поведение упруго пластической среды, элементу которой приписаны свойства некоторой конструкции с зависимыми от времени параметрами. В пятом параграфе исследуются качественные особенности поведения пластических сред при зависимости функции нагружения от инвариантов тензоров напряжения, пластической деформации и ее скорости. Рассматриваются функции нагружения, построенные на основе системы независимых совместных инвариантов, и на примере чистого сдвига исследованы качественные особенности поведения. В частности, можно построить функции нагружения, проявляющие свойства анизотропного и изотропного упрочнения, ортотропного разупрочнения, а также функции нагружения, приобретающие в процессе нагружения угловые точки при начальной регулярности.

В параграфе шестом рассмотрено простое нагружение [4] пластических сред, свойства которых зависят от времени.

Глава третья посвящена приближенным методам решения задач теории пластичности для сред, свойства которых зависят от времени. В первом параграфе дается метод линеаризации исходных соотношений для рассматриваемых сред путем представления нелинейной функции нагружения как огибающей касательных гиперплоскостей в девятимерном пространстве напряжений. Причем каждой плоскости приписывается роль независимого механизма пластичности, таким образом, вектор скорости пластического течения остается ортогональным к каждой из своих гиперплоскостей и не меняет своего направления в процессе нагружения. В этом случае можно переходить к соотношениям деформационной теории пластичности. Приводятся некоторые примеры линеаризации для соотношений трансляционных моделей пластических сред. Во втором параграфе решена задача кручения стержней полигонального поперечного сечения из материала с микронапряжениями максвелловского типа для случаев, когда линеаризировались и функция нагружения и ассоциированный закон пластического течения и для случая, когда функция нагружения и оставалась нелинейной. В третьем параграфе решены некоторые конкретные примеры кручения стержней полигонального поперечного сечения из рассматриваемого материала. Причем интегрирование велось для компонент касательного напряжения полученных как при полной так и при частичной линеаризации исходных соотношений, рассмотренных в предыдущем параграфе.

Основные результаты диссертации изложены в работах [9-12].

ЛИТЕРАТУРА

1. Седо в Л. И. Введение в механику сплошной среды. Физматгиз, 1962.
2. Хилл Р. Математическая теория пластичности. Гостех-теоретиздат. 1956.
3. Прагер В. и Ходж Ф. Теория идеально пластических тел. ИЛ, 1956.
4. Ильюшин А. А. Пластичность. ГИТТЛ, 1948.
5. Ивлев Д. Д. К теории сложных сред. ДАН, 148, № 1, 1963.
6. Нагди, Мерч. О механическом поведении вязкоупруго-пластических тел. Пр. механика, № 3, 1963, серия Е.
7. Работнов Ю. Н. Модель, иллюстрирующая некоторые свойства упрочняющегося пластического тела. ПММ, т. XXIII, вып. 1, 1959.
8. Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В. Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения, ПММ, 22, вып. 1, 1958.
9. Бережной И. А., Ивлев Д. Д. О влиянии вязкости на механическое поведение пластических сред. ДАН, 163, № 3, 1965.
10. Бережной И. А., Ивлев Д. Д. О кручении призматических стержней из идеально пластического материала с учетом микронапряжений. ПМТФ, № 5, 1963.
11. Бережной И. А. О линеаризации соотношений теории пластических сред, свойства которых зависят от времени. Мех. тв. тела, № 3, АН СССР, 1966.
12. Бережной И. А. О поведении функций нагружения для сред, свойства которых зависят от времени. Мех. тв. тела, АН СССР (в печати).

О ФУНКЦИЯХ НАГРУЖЕНИЯ ПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД, СВОЙСТВА КОТОРЫХ ЗАВИСЯТ ОТ ВРЕМЕНИ¹

1. Функция нагружения [1] для класса пластических сред, свойства которых зависят от времени, может быть определена в общем виде соотношением

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, \chi_i, \mu_i, k_i) = 0 \quad (1.1)$$

Здесь $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ — компоненты тензоров напряжения и пластической деформации, χ_i — система параметров, связанная с остаточными деформациями или процессам нагружения, в частности, неголономными дифференциальными соотношениями; k_i — физические константы, характеризующие рассматриваемую среду; μ_i — система параметров, которая может быть связана интегральными или дифференциальными соотношениями с пластическими деформациями, историей нагружения и т. п.

В простейшем случае параметры μ_i могут совпадать с компонентами скорости пластической деформации $\dot{\varepsilon}_{ij}$. В частности, в работе [2] рассматривалось поведение среды, для которой параметры μ_i связаны с историей нагружения интегральным законом классической вязкоупругости.

¹ МТТ АН СССР. №1. 1967г.

В дальнейшем, следуя идеям работы [3], рассмотрим функции нагружения для класса сред, которые определяются в условиях протекания изотермических процессов соотношением (1.1), и система параметров μ , будет связана дифференциальными соотношениями с пластическими деформациями и в простейшем случае совпадает с компонентами скорости.

Таким образом, будем исследовать качественное поведение функции нагружения для сред с зависимыми от времени свойствами в виде

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^*) = 0 \quad (1.2)$$

В пластичности без временных эффектов показано, что функция нагружения, ее форма и поведение должны быть инвариантны относительно ориентации некоторой декартовой системы координат.

Этому условию можно удовлетворить только тогда, когда функция нагружения зависит от инвариантов своих аргументов. Обобщая это условие на функции нагружения, определяющие поведение пластических сред, свойства которых зависят от времени (1.2), будем полагать, что она зависит только от инвариантов соответствующих тензоров, включая и совместные. Полагая, что заданное напряженное и деформированное состояния, а также тензор скоростей пластической деформации определяются каждый тремя главными компонентами своего тензора, то совместные инварианты тензоров $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ и ε_{ij}^* будут характеризовать взаимную ориентацию главных направлений этих тензоров. Так, взаимная ориентация тензоров может быть задана, например, тремя эйлеровыми углами, характеризующими взаимную ориентацию главных направлений этих тензоров.

Этому случаю соответствует тот факт, что тензоры $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ имеют три независимых совместных инварианта. Аналогично, взаимная ориентация тензоров $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^*$ может быть определена тремя их совместными инвариантами. Также можно определить ориентацию тензоров $\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^*$.

Однако, если определены взаимные ориентации главных направлений тензоров $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ и $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^*$, то тем самым и определена взаимная ориентация тензоров $\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^*$. Поэтому из девяти совместных инвариантов тензоров $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^*$ независимыми будут лишь шесть, и любые другие системы совместных инвариантов являются зависимыми.

Исходная система инвариантов тензоров $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^*$ может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} & \delta_{ij}\sigma_{ij} \quad \sigma_{ij}\sigma_{ij} \quad \sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki} \quad \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \quad \sigma_{ij}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ki} \quad \sigma_{ij}\sigma_{jk}\varepsilon_{ki} \\ & \delta_{ij}\varepsilon_{ij} \quad \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} \quad \varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ki} \quad \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}^* \quad \varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk}^*\varepsilon_{ki}^* \quad \varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk}^*\varepsilon_{ki}^* \\ & \delta_{ij}\varepsilon_{ij}^* \quad \varepsilon_{ij}^*\varepsilon_{ij}^* \quad \varepsilon_{ij}^*\varepsilon_{jk}^*\varepsilon_{ki}^* \quad \varepsilon_{ij}^*\sigma_{ij} \quad \varepsilon_{ij}^*\sigma_{jk}\sigma_{ki} \quad \varepsilon_{ij}^*\varepsilon_{jk}^*\sigma_{ki} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Отметим, что из инвариантов трех последних строчек инварианты, стоящие в одной из трех строк, будут зависимыми от двух других.

2. Рассмотрим некоторые особенности и аспекты поведения функции нагружения (1.2), зависимой от комбинации инвариантов (1.3) на примере чистого сдвига, когда отличны от нуля только компоненты $\sigma_{12}, \sigma_{21}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{12}^*, \varepsilon_{21}^*$.

В дальнейшем для удобства индекс i будем опускать, а букву σ в обозначениях компонент касательного напряжения заменим на τ . Тогда процесс деформирования рассматриваемой среды будет полностью определяться тремя векторами

$$\sigma = \tau_i i + \tau_j j, \quad \varepsilon = \varepsilon_x i + \varepsilon_y j, \quad \varepsilon^* = \varepsilon_x^* i + \varepsilon_y^* j \quad (2.1)$$

(здесь i, j — единичные орты) и двумя любыми углами, определяющими взаимную ориентацию этих векторов (фиг. 1).

Строго говоря, соотношения теории для частных случаев должны быть получены из общих соотношений при соответствующих допущениях. В случае, когда соотношения теории для частных случаев формулируются непосредственно, эти соотношения могут не обладать свойствами инвариантности при преобразовании системы координат. Имея в виду проиллюстрировать качественные особенности поведения функции нагружения, ограничимся векторной интерпретацией соотношений (2.1)

Тогда в рассматриваемом частном случае функция нагружения (1.2) примет вид

$$f(\tau, \varepsilon_i, \varepsilon_i^*, \alpha, \beta) = 0, \quad f(\tau_i, \varepsilon_i, \varepsilon_i^*, \beta, \gamma) = 0, \quad f(\tau, \varepsilon_i, \varepsilon_i^*, \gamma, \alpha) = 0 \quad (2.2)$$

Здесь α, β, γ — углы взаимной ориентации определяющих векторов. И система инвариантов (1.3) в этом случае примет вид

$$\begin{array}{l|l|l} \tau_x^2 + \tau_y^2 & \tau_x \varepsilon_x + \tau_y \varepsilon_y & \left| \tau_x \varepsilon_y - \tau_y \varepsilon_x \right| \\ \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 & \tau_x \varepsilon_x^* + \tau_y \varepsilon_y^* & \left| \tau_x \varepsilon_y^* - \tau_y \varepsilon_x^* \right| \\ \varepsilon_x^{*2} + \varepsilon_y^{*2} & \varepsilon_x \varepsilon_x^* + \varepsilon_y \varepsilon_y^* & \left| \varepsilon_x \varepsilon_y^* - \varepsilon_y \varepsilon_x^* \right| \end{array} \quad (2.3)$$

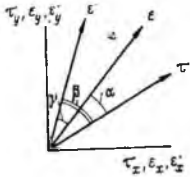
Теперь углы взаимной ориентации определяющих векторов могут быть выражены через комбинацию совместных инвариантов (2.3) в виде

$$\alpha = \arctg \frac{\tau_x \varepsilon_y - \tau_y \varepsilon_x}{\tau_x \varepsilon_x + \tau_y \varepsilon_y}, \quad \beta = \arctg \frac{\tau_x \varepsilon_y^* - \tau_y \varepsilon_x^*}{\tau_x \varepsilon_x^* + \tau_y \varepsilon_y^*}, \quad \gamma = \arctg \frac{\varepsilon_x \varepsilon_y^* - \varepsilon_y \varepsilon_x^*}{\varepsilon_x \varepsilon_x^* + \varepsilon_y \varepsilon_y^*} \quad (2.4)$$

В соотношениях (2.2) вместо эйлеровых углов α, β, γ можно взять парные комбинации смешанных инвариантов, входящих в соотношения (2.4), тогда можно получить восемь независимых функций нагружения в виде

$$\begin{aligned} f(\tau_x^2 + \tau_y^2, \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2, \varepsilon_x^{*2} + \varepsilon_y^{*2}, \tau_x \varepsilon_x + \tau_y \varepsilon_y, \left| \tau_x \varepsilon_y^* - \tau_y \varepsilon_x^* \right|) &= 0 \\ f(\tau_x^2 + \tau_y^2, \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2, \varepsilon_x^{*2} + \varepsilon_y^{*2}, \tau_x \varepsilon_x + \tau_y \varepsilon_y, \left| \varepsilon_x \varepsilon_y^* - \varepsilon_y \varepsilon_x^* \right|) &= 0 \\ f(\tau_x^2 + \tau_y^2, \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2, \varepsilon_x^{*2} + \varepsilon_y^{*2}, \tau_x \varepsilon_x + \tau_y \varepsilon_y, \tau_x \varepsilon_x^* + \tau_y \varepsilon_y^*) &= 0 \\ f(\tau_x^2 + \tau_y^2, \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2, \varepsilon_x^{*2} + \varepsilon_y^{*2}, \tau_x \varepsilon_x + \tau_y \varepsilon_y, \varepsilon_x \varepsilon_x^* + \varepsilon_y \varepsilon_y^*) &= 0 \\ f(\tau_x^2 + \tau_y^2, \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2, \varepsilon_x^{*2} + \varepsilon_y^{*2}, \tau_x \varepsilon_x^* + \tau_y \varepsilon_y^*, \left| \tau_x \varepsilon_y - \tau_y \varepsilon_x \right|) &= 0 \\ f(\tau_x^2 + \tau_y^2, \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2, \varepsilon_x^{*2} + \varepsilon_y^{*2}, \tau_x \varepsilon_x^* + \tau_y \varepsilon_y^*, \left| \tau_x \varepsilon_y^* - \tau_y \varepsilon_x^* \right|) &= 0 \\ f(\tau_x^2 + \tau_y^2, \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2, \varepsilon_x^{*2} + \varepsilon_y^{*2}, \varepsilon_x \varepsilon_x^* + \varepsilon_y \varepsilon_y^*, \left| \tau_x \varepsilon_y - \tau_y \varepsilon_x \right|) &= 0 \\ f(\tau_x^2 + \tau_y^2, \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2, \varepsilon_x^{*2} + \varepsilon_y^{*2}, \varepsilon_x \varepsilon_x^* + \varepsilon_y \varepsilon_y^*, \left| \tau_x \varepsilon_y^* - \tau_y \varepsilon_x^* \right|) &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

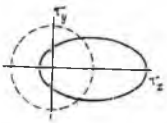
Рассмотрим поведение функций нагружения (2.5) при одноосном нагружении $\tau_x \neq 0, \tau_y = 0$. Полагая, что функции нагружения (2.5) симметричны относительно τ_x , будем иметь $\varepsilon_y = \varepsilon_y^* = 0$, и для одноосного нагружения они примут вид



Фиг. 1

$$\begin{aligned}
 f(\tau_x, \varepsilon_x, \varepsilon_x^*, \tau_x \varepsilon_x) &= 0 \\
 f(\tau_x, \varepsilon_x, \varepsilon_x^*, \tau_x \varepsilon_x) &= 0 \\
 f(\tau_x, \varepsilon_x, \varepsilon_x^*, \tau_x \varepsilon_x, \tau_x \varepsilon_x^*) &= 0 \\
 f(\tau_x, \varepsilon_x, \varepsilon_x^*, \tau_x \varepsilon_x, \varepsilon_x \varepsilon_x^*) &= 0 \\
 f(\tau_x, \varepsilon_x, \varepsilon_x^*, \tau_x \varepsilon_x^*) &= 0 \\
 f(\tau_x, \varepsilon_x, \varepsilon_x^*, \tau_x \varepsilon_x^*) &= 0 \\
 f(\tau_x, \varepsilon_x, \varepsilon_x^*, \varepsilon_x \varepsilon_x^*) &= 0 \\
 f(\tau_x, \varepsilon_x, \varepsilon_x^*, \varepsilon_x \varepsilon_x^*) &= 0
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Каждая из функций (2.6) определяет при данном $\tau_x = \tau_x(t)$ зависимость $\varepsilon_x = \varepsilon_x(t)$. Эта зависимость может быть определена для данного материала из одноосного эксперимента, и на этом основании можно установить ограничение на вид и поведение функции нагружения при произвольной траектории напряжений. Функции нагружения, соответствующие одноосному процессу нагружения, когда $\varepsilon_y = \varepsilon_y^* = 0$, согласно (2.5), будут определяться соотношениями

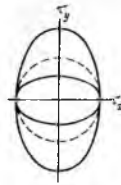


$$\begin{aligned}
 f(\tau_x^2 + \tau_y^2, \varepsilon_x, \varepsilon_x^*, \tau_x \varepsilon_x, |\tau_x \varepsilon_x|) &= 0 \\
 f(\tau_x^2 + \tau_y^2, \varepsilon_x, \varepsilon_x^*, \tau_x \varepsilon_x) &= 0 \\
 f(\tau_x^2 + \tau_y^2, \varepsilon_x, \varepsilon_x^*, \tau_x \varepsilon_x, \tau_x \varepsilon_x^*) &= 0 \\
 f(\tau_x^2 + \tau_y^2, \varepsilon_x, \varepsilon_x^*, \tau_x \varepsilon_x, \varepsilon_x \varepsilon_x^*) &= 0 \\
 f(\tau_x^2 + \tau_y^2, \varepsilon_x, \varepsilon_x^*, \tau_x \varepsilon_x^*, |\tau_x \varepsilon_x|) &= 0 \\
 f(\tau_x^2 + \tau_y^2, \varepsilon_x, \varepsilon_x^*, \tau_x \varepsilon_x^*) &= 0 \\
 f(\tau_x^2 + \tau_y^2, \varepsilon_x, \varepsilon_x^*, \varepsilon_x \varepsilon_x^*, |\tau_x \varepsilon_x|) &= 0 \\
 f(\tau_x^2 + \tau_y^2, \varepsilon_x, \varepsilon_x^*, \varepsilon_x \varepsilon_x^*, |\tau_x \varepsilon_x^*|) &= 0
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

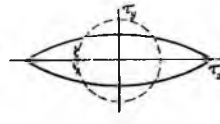
Все соотношения (2.5) и, следовательно, (2.7) определяют первоначальную кривую нагружения в виде окружности. При развитии пластического течения в случае одномерного нагружения все соотношения (2.6) могут определять одну и ту же зависимость $\varepsilon = \varepsilon(t)$ при $\tau = \tau(t)$, и наоборот.

Однако различные зависимости функций нагружения (2.5) от различных комбинаций инвариантов определяющих компонент могут давать отличие в поведении и особенности при сложном нагружении. Так, функция нагружения, определяемая зависимостью (2.7.1), вследствие компоненты $|\tau_x \varepsilon_x^*|$ может приобретать симметричное изменение формы

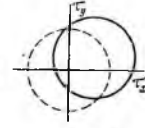
вдоль осей τ_x, τ_y , причем степень деформирования кривой нагружения вдоль оси τ_y зависит от скорости деформаций $\dot{\epsilon}_x$ (фиг. 2).



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Функция нагружения типа (2.7.1) может привести как к гладким, так и к сингулярным кривым нагружения.

Например, функция нагружения

$$\tau_x^2 + \tau_y^2 = k^2 \pm c^2 (\tau_x \dot{\epsilon}_y^* - \tau_y \dot{\epsilon}_x^*)^2 \quad (k, c = \text{const} > 0) \quad (2.8)$$

имеет для рассматриваемого случая, согласно (2.7.1), вид

$$\tau_x^2 + \tau_y^2 \left(1 \pm c^2 \dot{\epsilon}_x^{*2} \right) = k^2 \quad (2.9)$$

Это уравнение в плоскости τ_x, τ_y определяет уравнение эллипса с полуосями k и

$$\frac{k}{\sqrt{1 \pm c^2 \dot{\epsilon}_x^{*2}}}$$

На фиг. 3 показаны эллипсы, представляющие возможные кривые нагружения; пунктиром показана начальная кривая текучести. В данном случае течение происходит при фиксированном значении $\tau_x = k$. Упрочнение может быть учтено за счет членов $\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_x^*, \tau_x \dot{\epsilon}_y, \tau_x \dot{\epsilon}_y^*$ формуле (2.7.1).

Рассмотрим зависимость

$$\tau_x^2 + \tau_y^2 = k^2 (\dot{\epsilon}_x^2 + \dot{\epsilon}_y^2) \pm 2c (\tau_x \dot{\epsilon}_y^* - \tau_y \dot{\epsilon}_x^*) \quad (2.10)$$

В случае одноосного нагружения зависимость (2.10) примет вид

$$\tau_x^2 + (\tau_y^2 \pm c \dot{\epsilon}_x^*)^2 = k^2 + a \dot{\epsilon}_x^2 + (c \dot{\epsilon}_x^*)^2 \quad (2.11)$$

Такая функция нагружения проявляет способность в процессе нагружения приобретать угловую точку (фиг. 4). Причем, при $a = 0$ материал не упрочняется.

Аналогичным образом могут быть изучены другие зависимости (2.7). В случае (2.7.2) функция нагружения будет всегда гладкой и может испытывать изотропное упрочнение за счет $\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_x^*$ компонент и приобретать анизотропию за счет компонент $\tau_x \dot{\epsilon}_x$. В частном случае может иметь место трансляционная модель упрочняющегося тела (фиг. 5). В случае (2.7.3) имеет место подобная картина, что и в предыдущем случае, однако анизотропия может определяться и за счет скорости пластической деформации $\tau_x \dot{\epsilon}_y^*$.

Случай (2.7.4) по существу не дает ничего нового по сравнению с (2.7.2). В случае (2.7.5) будут иметь место скоростная анизотропия и симметричное изменение формы с появлением сингулярностей по мере пластического течения. Функции (2.7.6,7,8) представляют частные случаи рассмотренных функций нагружения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седо в Л. И. Введение в механику сплошной среды. Физматгиз, 1962.
2. Нахди П.М., Мерч С.А. О механическом поведении вязко-упруго-пластических тел. Прикл. механ., Тр. Амер. о-ва инж. механ., Сер. Е, 1963, № 3.
3. Быковцев Г. И., Дудукаленко В. В., Ивлев Д. Д. О функциях
4. нагружения анизотропно упрочняющегося пластического материала. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.

О СОПРОТИВЛЕНИИ НЕКОТОРЫХ ОПОР ЭКИПАЖА ПРИ ДВИЖЕНИИ ПО ПОВЕРХНОСТИ¹

И. А. БЕРЕЖНОЙ (Москва)

Рассматривается задача определения действующей на опору силы в зависимости от ориентации вектора скорости движения и вида функции нагружения, учитывающей анизотропию сопротивления.

Результаты получены в виде поляры на плоскости коэффициентов сопротивления. Рассмотрены конкретные примеры для лыжной опоры и колесной опоры с учетом и без учета явления бокового увода.

1. В механике движения экипажа по поверхности иногда необходимо знать связь между векторами сил и скорости на опорах.

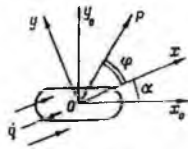
Сопротивление в опорах носит характер сухого трения, предельное сопротивление трения зависит от направления. Для решения задач механики движения экипажа с подобными опорами в некоторых случаях полезным оказалась введенная в общей теории пластичности функция нагружения [1]. В частности, посредством аналогичной функции нагружения были получены соотношения между векторами сил и скорости для некоторых опер при произвольной ориентации силы [2]. Ниже будут рассмотрены некоторые следствия применения функции нагружения для решения обратной задачи, когда опора движется с известной скоростью и требуется найти значение силы, действующей на нее.

Выберем координатную систему, связанную с опорой, как это показано на фиг. 1. Будем полагать, что рассматриваемая опора на плоскости $P_x P_y$ имеет анизотропию сопротивления, которая определяется функцией нагружения [2] в виде

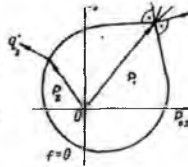
$$f(P_{0x}, P_{0y}, P_{0z}, k) = 0 \quad (1.1)$$

где $P_{0\alpha}$ — компоненты вектора силы в связанной с опорой системе координат; k — коэффициент, определяющий сопротивление. Функция нагружения (1.1) в плоскости $P_{0x} P_{0y}$ определяется замкнутой вокруг начала координат невогнутой фигурой (фиг. 2).

¹ МТТ АН СССР, №4, 1968 г.



Фиг. 1



Фиг. 2

Будем предполагать, что опора находится в движении, т. е. выполняется одно из условий

$$q_{0x}^* \neq 0, \quad \omega^* = 0, \quad f = 0, \quad \partial f \geq 0; \quad \omega^* = \frac{\omega_y p}{q_{0x}} \quad (1.2)$$

$$q_{0x}^* \neq 0, \quad \omega^* = 1, \quad f = 0, \quad \partial f > 0.$$

где q_{0i}^* — компоненты вектора скорости в связанной с опорой системе координат, ω^* — безразмерная угловая скорость для кинематически ортотропных опор (колеса, например). Связь между векторами скорости и силы на опоре может быть получена из ассоциированного с функцией нагружения закона движения [2], который может быть записан в виде

$$q^* = -\lambda \cdot \text{grad}(f) \quad (1.3)$$

где λ — неопределенный множитель. Соотношение (1.3) в компонентах вектора скорости можно переписать в виде

$$q_{0x}^* = -\lambda \frac{\partial f}{\partial P_{0x}}, \quad q_{0y}^* = -\lambda \frac{\partial f}{\partial P_{0y}} \quad (1.4)$$

Если функция нагружения содержит угловые точки, то вектор скорости движения может лежать в пределах веера, образованного внешними нормальными к функции нагружения в данной точке. Это указано на фиг. 2.

Угол ориентации вектора скорости q^* относительно связанной с опорой системой координат будем называть углом атаки и обозначим α (фиг. 1). Из (1.4) можно получить выражение, связывающее угол атаки с компонентами вектора силы, действующего на опору в виде

$$\text{tg} \alpha = \frac{q_{0y}^*}{q_{0x}^*} = \frac{\partial f / \partial P_{0y}}{\partial f / \partial P_{0x}} \quad (1.5)$$

Таким образом, соотношение (1.5) с учетом соотношения (1.1), приведенное к скоростной системе координат, определит в плоскости сил или коэффициентов сопротивления полярную составляющую сопротивления опоры, аналогичную полярной составляющей сопротивления аэродинамического профиля. Такое соотношение позволит, зная вектор скорости на опоре, определить ее силовую реакцию.

Полагая, что функция нагружения (1.1) однородна относительно kR_{0z} и вводя коэффициенты сопротивления

$$c_{0x} = \frac{P_{0x}}{kP_{0z}}, \quad c_{0y} = \frac{P_{0y}}{kP_{0z}}$$

тогда система соотношений (1.1), (1.5) может быть записана в виде

$$f(c_{0x}, c_{0y}) = 0, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{q_{0y}^*}{q_{0x}^*} = \frac{\partial f / \partial c_{0y}}{\partial f / \partial c_{0x}} \quad (1.6)$$

Откуда уравнение поляры в плоскости $c_x c_y$ определится из выражения (1.7) с учетом соотношений (1.6)

$$c_x = c_{0x} \cos \alpha + c_{0y} \sin \alpha, \quad c_y = -c_{0x} \sin \alpha + c_{0y} \cos \alpha \quad (1.7)$$

Отметим, что когда реализовано нагружение в угловой точке, то $c_{0x}, c_{0y} = \text{const}$ и соотношение (1.7) определяет элементы дуги окружности на поляре в плоскости $c_x c_y$.

2. Рассмотрим примеры. В работе [2] обсуждались некоторые функции нагружения, из которых в качестве примера удобнее взять регулярную эллиптическую функцию нагружения для лыжной опоры в виде

$$f = \left(\frac{P_{0x}}{akP_{0x}} \right)^2 + \left(\frac{P_{0y}}{bkP_{0x}} \right)^2 - 1 = 0 \quad (2.1)$$

Посредством введения коэффициентов сопротивления перейдем к безразмерным координатам, по-прежнему приписывая нулик связанной с опорой системе координат

$$f = \left(\frac{c_{0x}}{ac} \right)^2 + \left(\frac{c_{0y}}{b} \right)^2 - 1 = 0 \quad (2.2)$$

Из ассоциированного закона движения (1.3) с учетом функции нагружения (2.1) и соотношений (2.2) получим

$$\frac{q_{0x}^*}{q_{0y}^*} = \frac{b c_{0x}}{a c_{0y}} \quad (2.3)$$

Тогда угол атаки определится из соотношения

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a c_{0y}}{b c_{0x}} \quad (2.4)$$

Соотношение (2.4) с учетом функции нагружения (2.1) можно преобразовать к виду, определяющему связь между коэффициентом сопротивления c_{0y} и углом атаки опоры вектором скорости. Эти соотношения имеют вид

$$c_{0x} = a \cos(\alpha), \quad c_{0y} = b \sin(\alpha) \quad (2.5)$$

Преобразуем компоненты сопротивления опоры к скоростной системе координат посредством формул преобразования (1.7), которые с учетом (2.5) дадут соотношения

$$c_y = \frac{1}{2}(b-a)\sin(2\alpha), \quad c_x = a\sin^2 \alpha + b\cos^2 \alpha \quad (2.6)$$

Система соотношений (2.6) в плоскости c_x , интерпретируется окружностью радиуса $\frac{1}{2}(b-a)$ и координатами центра $\left[b + \frac{1}{2}(b-a), 0 \right]$ фиг. 3. В случае изотропной опоры, когда $a=b$ окружность вырождается в точку с абсциссой, определяемой коэффициентом трения. Из приведенной поляры легко видеть, что максимальная анизотропия опоры будет проявляться тогда, когда угол атаки опоры будет соответствовать максимальному значению угла $|\varphi|$ в плоскости коэффициентов сопротивления. Обозначим

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{c_y}{c_x} = K$$

тогда максимальное значение параметра K

$$K_{\max} = \frac{(b-a)}{2\sqrt{ab}}$$

Это соотношение справедливо, когда вектор c является касательной к поляре (точка P на фиг. 3). Таким образом, наиболее выгодный диапазон углов атаки для рассматриваемой ортогональной опоры должен лежать в пределах

$$\alpha = \pm \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{b-a}{2\sqrt{ab}} \right).$$

Рассмотрим сингулярную функцию нагружения для колеса без бокового увода [2]. Она определяется двумя уравнениями в виде

$$f_1 = P_{0x}^2 + P_{0y}^2 - k^2 P_{0z}^2 = 0, \quad f_2 = P_{0x} - \frac{\mu}{\rho} = 0 \quad (2.7)$$

или в коэффициентах сопротивления эти выражения можно переписать

$$f_1 = c_{0x}^2 + c_{0y}^2 - 1 = 0, \quad f_2 = c_{0x} \pm \eta = 0, \quad \eta = \frac{\mu}{\rho k P_{0z}} \quad (2.8)$$

В плоскости коэффициентов сопротивления эта функция интерпретируется комбинацией дуг и линейных элементов, как это показано на фиг. 4, а. Отметим, что рассматриваемая функция нагружения имеет четыре угловые точки. Предположим, что колесная опора нагружена и выполняются условия

$$f_1 = 0, \quad f_2 < 0 \quad (2.9)$$

Тогда соотношение ассоциированного закона движения примет вид

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{q_{0y}^*}{q_{0x}^*} = \frac{c_{0y}}{c_{0x}} \quad (2.10)$$

и с учетом первого соотношения (2.9) будем иметь $c_{0x} = \cos(\alpha)$, $c_{0y} = \sin(\alpha)$ и, переходя к

скоростной системе координат, получим

$$c_y = 0, \quad c_x = 1$$

Таким образом, поляра колеса в случае, когда реализуется соотношение (2.9) на плоскости $c_x c_y$, определяется точкой с координатами (1,0). Эта точка соответствует режиму юза, когда $\omega^* = 0$.

Рассмотрим случай нагружения, когда

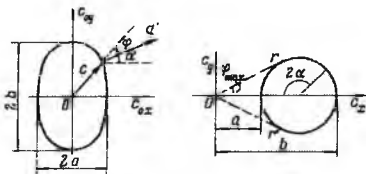
$$f_1 < 0, \quad f_2 = 0. \quad \text{Это соответствует нормальному}$$

режиму движения колеса, когда $\omega^* = 1$. Из ассоциированного закона движения будем иметь

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{q_{0y}^*}{q_{0x}^*} = \frac{0}{\eta}$$

Отсюда следует, что этот случай нагружения соответствует нулевому углу атаки. При этом значении угла атаки формулы перехода скоростной системы координат примут вид

$$c_y = c_{0y}, \quad c_x = c_{0x} \quad (2.11)$$



Фиг. 3

Значение c_{0x} определим из уравнения

$$f_2 = 0, c_{0x} = \eta$$

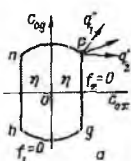
Коэффициент сопротивления c_{0y} может принимать любые произвольные значения в пределах линейного участка $f_2 = 0$, заключенного между угловыми точками. Решая совместно уравнения $f_1 = 0, f_2 = 0$, найдем координаты угловых точек

$$c_{0y} = \pm\sqrt{1-\eta^2}, c_{0x} = \pm\eta.$$

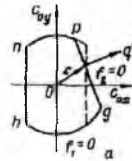
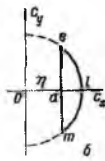
Отсюда с учетом формул перехода (2.11) окончательно получим уравнение рассматриваемого участка поляры в виде

$$c_x = \pm\eta, c_y = \pm\sqrt{1-\eta^2}.$$

Это соответствует отрезку em на фиг. 4, б; причем огибающая этих элементов определяет линейный участок в зависимости от параметра торможения η . Сама огибающая представляет собой дугу окружности единичного радиуса. Таким образом, участки функции нагружения pg и hn соответствуют участку em в плоскости $c_x c_y$.



Фиг. 4



Фиг. 5

Верх возможных скоростей движения в угловой точке функции нагружения соответствует участкам el и lm поляры, а участки дуг pn и hg соответствуют точке l , т. е. точка l определяет движение колеса юзом и его сопротивление не имеет анизотропии. Рассмотрим колесную опору, которая обладает боковым уводом. Функция нагружения $f_1 = 0$ сохраняет свое прежнее значение, $f_2 = 0$ примет вид [2]

$$f_1 = \left(P_{0x} - \frac{\mu}{\rho} \right) + \xi P_{0y} (P_{0y}^* - P_{0y}) = 0 \quad (2.12)$$

или в коэффициентах сопротивления

$$f_1 = (c_{0y} - \eta) + \xi c_{0y} (c_{0y}^* - c_{0y}) = 0$$

где ξ — коэффициент бокового увода.

Рассматриваемая функция нагружения приведена на фиг. 5, а. Из ассоциированного закона движения в данном случае будем иметь

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{q_{0y}^*}{q_{0x}^*} = \xi c_{0y} \quad (2.13)$$

Из соотношений (2.12) и (2.13) получим значения коэффициентов сопротивления в связанной системе координат

$$c_{0x} = \eta, c_{0y} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\xi}.$$

Переходя к скоростной системе координат с учетом этих соотношений получим аналитическое выражение поляры

$$c_x = \eta \cos(\alpha) + \frac{\xi \eta \alpha}{\xi} \sin(\alpha), \quad c_y = \left(\frac{1}{\xi} - \eta \right) \sin(\alpha) \quad (2.14)$$

Легко видеть, что соотношения (2.14) справедливы в пределах изменения угла атаки

$$\alpha = \arctg \left(\pm \xi \sqrt{1 - \eta^2} \right).$$

При других значениях угла атаки полярна определяется дугой единичного радиуса и точкой с координатами (1,0) в плоскости $c_x c_y$, фиг. 5, б. Линеаризировав соотношения (2.14) и исключая параметр α , получим уравнение поляры в виде

$$c_x = \eta + \frac{\xi c_y^2}{(1 - \xi \eta)^2} \quad (2.15)$$

Отметим, что из соотношений (2.14) и (2.15) как частный случай, следует полярна жесткого колеса без бокового увода.

ЛИТЕРАТУРА

- Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. Изд-во "Наука", 1966.
- Бережной И. А. О применении функции нагружения в некоторых задачах движения экипажа. Инж. ж., МГТ, 1967, № 5.

О НЕКОТОРОМ ИНВАРИАНТНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ СВЯЗИ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ СИЛЫ И СКОРОСТИ ДЛЯ ДВУМЕРНОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ¹

На основании определяющих соотношений теории идеальной пластичности [1] в работах [2,3] обсуждалось применение функции нагружения для получения соотношений между векторами силы и скорости на двумерных пластических моделях в приложении к задачам механики опор экипажа.

1. Скорость движения для такой модели определяется векторным полем, заданным на функции нагружения

$$f(c_{0x}, c_{0y}) = 0 \quad (1.1)$$

соотношением ассоциированного закона движения

$$q^* = \lambda \operatorname{grad} f \quad (1.2)$$

который устанавливает связь поля скоростей с полем радиус-векторов функции (1.1).

Эта связь следует из экстремального принципа, аналогичного принципу максимума Мизеса, принятому в теории пластических сред [1]. В данном случае этот принцип запишется в виде

$$(c_{0x} - c_{0x}^*) \dot{q}_{0x}^* + (c_{0y} - c_{0y}^*) \dot{q}_{0y}^* \geq 0 \quad (1.3)$$

¹ МГТ АН СССР, №5, 1968 г.

Здесь и везде далее c_{0i} — безразмерные компоненты силы в связанной с функцией нагружения системе координат, q_{0i}^* — компоненты скорости в этой же системе координат, звездочка приписана возможным компонентам силы, удовлетворяющим условию $f(c_{0x}^*, c_{0y}^*) \leq 0$.

Функция нагружения (1.1), определяющая пластические свойства модели, в плоскости c_{0i} интерпретируется замкнутой вокруг начала координат регулярной или сингулярной кривой, причем угловые точки сингулярной функции нагружения рассматриваются как предельный случай регулярного сопряжения смежных кусков функции $f_i=0$. Из принятого экстремального принципа следует невогнутость функции нагружения и градиентальность вектора скорости к $f=0$.

В работе [2] по аналогии с полярной сопротивлению аэродинамического профиля построены поляры для некоторых типов функций нагружения, определяющих анизотропию сопротивления колесной и лыжной опор. Поляра сопротивления опоры в общем случае определяется соотношением

$$\varphi(c_x, c_y) = 0 \quad (1.4)$$

где c_i — безразмерные компоненты силы в скоростной системе координат, которая ориентирована к связанной с функцией нагружения системе координат под углом α , который в дальнейшем будем называть углом атаки.

Компоненты соотношения (1.4) связаны с компонентами функции нагружения (1.1) по формулам

$$c_x = c_{0x} \cos \alpha + c_{0y} \sin \alpha, c_y = -c_{0x} \sin \alpha + c_{0y} \cos \alpha \quad (1.5)$$

Таким образом, если в соотношениях (1.5) компоненты будут удовлетворять функции нагружения (1.1), то эти соотношения будут являться параметрическим уравнением, определяющим функцию $\varphi(c_x, c_y) = 0$.

Иследуем некоторые общие свойства этой функции, следующие из соотношений (1.1), (1.2), (1.3). Из ассоциированного закона движения (1.2) будем иметь

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{q_{0y}^*}{q^*} = \frac{1}{R} \frac{\partial f}{\partial c_{0y}}, \cos \alpha = \frac{q_{0x}^*}{q^*} = \frac{1}{R} \frac{\partial f}{\partial c_{0x}} \\ R &= \frac{q^*}{\lambda} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial c_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c_{0y}}\right)^2} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Тогда соотношения (1.5) с учетом выражений (1.6) примут вид

$$\begin{aligned} c_x &= \frac{1}{R} \left(c_{0x} \frac{\partial f}{\partial c_{0x}} + c_{0y} \frac{\partial f}{\partial c_{0y}} \right) \\ c_y &= \frac{1}{R} \left(-c_{0x} \frac{\partial f}{\partial c_{0x}} + c_{0y} \frac{\partial f}{\partial c_{0y}} \right) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Экстремальный принцип (1.3) с учетом соотношения ассоциированного закона движения (1.2) запишется в виде

$$\left(c_{0x} - c_{0x}^* \right) \frac{\partial f}{\partial c_{0x}} + \left(c_{0y} - c_{0y}^* \right) \frac{\partial f}{\partial c_{0y}} \geq 0 \quad (1.8)$$

Предположим, что компоненты c_{0x}, c_{0y} удовлетворяют функции нагружения, а возможные компоненты c_{0x}^*, c_{0y}^* совпадают с началом координат, т. е. $c_{0x}^* = c_{0y}^* = 0$, тогда выражение (1.8) примет вид

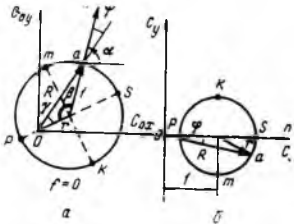
$$c_{0x} \frac{\partial f}{\partial c_{0x}} + c_{0y} \frac{\partial f}{\partial c_{0y}} \geq 0 \quad (1.9)$$

Заметим, что полученное выражение (1.9) соответствует правой части первого соотношения (1.7) с точностью до положительного множителя, откуда следует, что функция $\varphi(c_x, c_y) = 0$ целиком лежит в правой полуплоскости, причем начало координат не лежит внутри области, ограниченной $\varphi = 0$.

Положив второе соотношение (1.7) равным нулю, определим соответствие точек пересечения $\varphi = 0$ оси абсцисс с точками на функции $f = 0$.

Из условия на оси абсцисс $c_y = 0$ и полагая, что знаменатель больше нуля, будем иметь

$$c_{0x} \frac{\partial f}{\partial c_{0y}} = c_{0y} \frac{\partial f}{\partial c_{0x}} \quad \text{или} \quad \frac{c_{0x}}{c_{0y}} = \frac{c_{0x}}{c_{0y}} \frac{\partial f}{\partial c_{0y}} \quad (1.10)$$



Фиг. 1.

Из соотношения (1.10) следует, что точки пересечения функции $\varphi = 0$ с осью $c_y = 0$ соответствуют точкам на $f = 0$, в которых выполняется условие коллинеарности векторов e и q . Для случая, когда функция нагружения $f = 0$ будет анизотропной, таких точек пересечения функции $\varphi = 0$ с осью абсцисс в общем случае может быть четыре.

2. Рассмотрим пример. Предположим, что в плоскости сил c_{0i} функция нагружения задана окружностью, с координатами центра r_{0x}, r_{0y} . Уравнение функции нагружения в данном случае имеет вид

$$f = (c_{0x} - r_{0x})^2 + (c_{0y} - r_{0y})^2 - 1 = 0 \quad (2.1)$$

Уравнение (2.1) определит простейшую анизотропию функции нагружения (фиг. 1.а). Определив частные производные от функции нагружения

$$\frac{\partial f}{\partial c_{0x}} = 2(c_{0x} - r_{0x})$$

$$\frac{\partial f}{\partial c_{0y}} = 2(c_{0y} - r_{0y})$$

и внося их в соотношение (1.7), с учетом соотношения (2.1), получим

$$c_x = (c_{0x}^2 - c_{0x} r_{0x}) + (c_{0y}^2 - c_{0y} r_{0y}), \quad c_y = c_{0x} r_{0y} - c_{0y} r_{0x} \quad (2.2)$$

Первое соотношение (2.2) можно переписать в виде

$$c_x = (c_{0x}^2 - c_{0y}^2) - (c_{0x} r_{0x} + c_{0y} r_{0y}) \quad (2.3)$$

Из условия экстремума функции $\varphi(c_x, c_y) = 0$

$$\frac{\partial c_x}{\partial c_y} = \frac{r_{0y} - r_{0x} \frac{dc_{0y}}{dc_{0x}}}{c_{0x} + c_{0y} \frac{dc_{0y}}{dc_{0x}}} = 0$$

следует, что это условие удовлетворяется, если

$$r_{0y} - r_{0x} \frac{dc_{0y}}{dc_{0x}} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dc_{0y}}{dc_{0x}} = \frac{b}{a} = 0.$$

Этому условию соответствуют точки функции $f(c_{0x}, c_{0y}) = 0$, на которые опирается диаметр, ортогональный к диаметру с точками, где выполняется коллинеарность векторов e и q (точки m, k на фиг. 1, а).

Отметим, что соотношения (2.3) и второе соотношение (2.2), определяющее функцию $\varphi(c_x, c_y) = 0$, будут инвариантными относительно поворота координатной системы c_{11}, c_{0y} .

Свойства некоторых функций нагружения, построенных на основе соответствующих систем инвариантов, рассматриваются в работе [4]. Первая скобка соотношения (2.3) будет длиной радиуса-вектора функции нагружения $f = 0$, вторая скобка будет скалярным произведением радиус-векторов функции нагружения и ее центра. Второе соотношение (2.2) будет модулем векторного произведения радиус-вектора функции нагружения и ее центра. Таким образом, рассматриваемые соотношения можно записать по определению в виде

$$c_x = R^2 - Rr \cos \gamma, c_y = Rr \sin \gamma \quad (2.4)$$

где R, r — соответственно длины радиус-векторов функции нагружения и ее центра, γ — угол между векторами R и r .

Длину радиус-вектора функции нагружения можно выразить в виде $R^2 = r^2 + 1 - 2r \cos \beta$, где угол β указан на фиг. 1, а и связан с углом γ соотношением $\sin \beta = R \sin \gamma$.

Максимальное значение c_x будет иметь, когда угол $\gamma = 0$ (что соответствует $\beta = \pi$), при этом $c_x = 1 + r$. Минимальное значение c_x примет при $\gamma = \pi$ ($\beta = 0$). В этом случае $c_x = 1 - r$. Экстремальные значения c_y соответствуют точкам m и k (фиг. 1, а), определяемым углом $\beta = \pm \frac{\pi}{2}$, при котором из второго соотношения (2.4) с учетом значения R , получим $c_y = \pm r$. Таким образом, функция $\varphi(c_x, c_y) = 0$ будет определяться окружностью радиуса r , центр которой лежит на оси $c_y = 0$ с абсциссой, равной единице (фиг. 1, б). В случае изотропной функции нагружения $f = 0$, когда $r = 0$, функция $\varphi(c_x, c_y) = 0$ стягивается в точку с единичной абсциссой.

Соотношение (2.1), определяющее функцию нагружения для двумерных пластических моделей, может соответствовать различным классам сред в зависимости от природы механизма, внутренних микронапряжений. В рассматриваемой модели механизм внутренних микронапряжений задается вектором r , который определяет анизотропию функции нагружения в силовой плоскости. В теории пластичности изучаются среды как со стационар-

ными так и с зависящими от времени микронапряжениями. В первом случае функция нагружения испытывает в силовом пространстве трансляционный перенос, а во втором случае возникает анизотропия за счет временных эффектов, которая может меняться во времени. Примером могут служить среды с максвелловским механизмом внутренних микронапряжений. Такие среды в процессе нагружения приобретают анизотропию свойств, а затем, в процессе разгрузки или нейтрального нагружения с течением времени теряют приобретенную анизотропию.

Рассматриваемая двумерная пластическая модель может содержать один из указанных механизмов микронапряжений. Предположим, что модель определяет случай трансляционного упрочнения. Если положить, что начальное состояние соответствует нулевым микронапряжениям, то на плоскости s , это будет интерпретироваться точкой с единичной абсциссой и только после нагружения функция $\varphi = 0$ будет определяться окружностью радиуса r . Если же придать внутреннему механизму максвелловские свойства, то после разгрузки функция $\varphi = 0$ с течением времени стягивается в точку. Причем, скорость изменения анизотропии будет зависеть от постоянной времени максвелловского механизма.

ЛИТЕРАТУРА

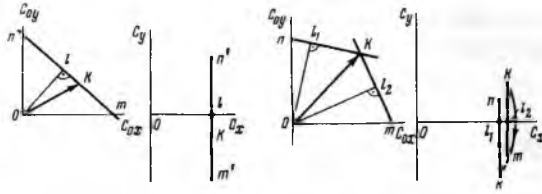
1. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. «Наука», 1966.
2. Бережной И. А. О применении функции нагружения в некоторых задачах движения экипажа. Инж. ж. МТТ, 1967, № 5.
3. Бережной И. А. О сопротивлении некоторых опор экипажа при движении по поверхности. Инж. ж. МТТ, 1968, № 4.
4. Бережной И. А. О функциях нагружения пластических сред, свойства которых зависят от времени. Инж. ж. МТТ, 1967, № 1.

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ НАГРУЖЕНИЯ ДЛЯ ДВУМЕРНОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ¹

И. А. БЕРЕЖНОЙ, В. В. ИГНАТЬЕВ

В ряде задач теории пластичности вычислительные трудности удается преодолеть линеаризацией нелинейных соотношений. В частности, значительное количество работ посвящено линеаризации функции нагружения системой огибающих гиперплоскостей в пространстве напряжений; причем, применяемые приемы линеаризации

¹ МТТ АН СССР, №5, 1969 г.



должны сохранять основные свойства изучаемой модели. К таким свойствам относятся, например, характеристики начальной или приобретаемой анизотропии.

1. На основе идей, развитых в теории пластичности в работе [1], обсуждалась возможность представления анизотропии двумерной пластической модели посредством функции

$$\varphi(c_x, c_y) = 0 \quad (1.1)$$

которая связана с функцией нагружения

$$f(c_{0x}, c_{0y}) = 0 \quad (1.2)$$

при условии удовлетворения принципу максимума Мизеса соотношением

$$\begin{aligned} c_x &= R^{-1} (c_{0y} \partial f / \partial c_{0x} + c_{0y} \partial f / \partial c_{0y}) \\ c_y &= R^{-1} (-c_{0x} \partial f / \partial c_{0y} + c_{0y} \partial f / \partial c_{0x}) \\ R &= \left[(\partial f / \partial c_{0x})^2 + (\partial f / \partial c_{0y})^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Угол, образованный вектором скорости в связанной с функцией нагружения системе координат (угол атаки), был определен соотношением

$$\alpha = \arccos R^{-1} \partial f / \partial c_{0x} \quad (1.4)$$

Рассмотрим некоторые свойства функции (1.1) в зависимости от характера функции (1.2). В общем случае функция нагружения, удовлетворяющая принципу максимума Мизеса, должна быть невогнута. Следовательно, функция нагружения может содержать элементы выпуклых кривых, линейные участки и выпуклые угловые точки. Рассмотрим линейный элемент функции нагружения, определенный уравнением

$$c_{0x} / a + c_{0y} / b - 1 = 0 \quad (1.5)$$

Преобразуем уравнение (1.5) посредством соотношений (1.3)

$$c_x = \frac{1}{R} \left(\frac{c_{0x}}{a} + \frac{c_{0y}}{b} \right), \quad c_y = \frac{1}{R} \left(-\frac{c_{0x}}{b} + \frac{c_{0y}}{a} \right), \quad R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab} \quad (1.6)$$

Из соотношений (1.6) с учетом (1.5) следует, что если конец вектора силы в плоскости c_0 , (фиг. 1) перемещается от точки $m(a, 0)$ к точке $n(0, b)$, то в плоскости c , конец вектора c движется по отрезку $m'n'$ от точки $m(1/R, -a/bR)$ к точке $n'(1/R, b/aR)$. Из условия коллинеарности векторов силы и скорости

$$\frac{c_{0x}}{c_{0y}} = \frac{\partial f / \partial c_{0x}}{\partial f / \partial c_{0y}} \quad (1.7)$$

получим координаты соответствующей точки $l'(1/R, 0)$. Из соотношения (1.4) следует, что вдоль прямой $m'n'$ угол атаки сохраняет фиксированное значение

$$\alpha = \arccos(b/R) \quad (1.8)$$

Рассмотрим точку (c_{0x}^o, c_{0y}^o) , принадлежащую прямой $f=0$; на $\varphi=0$ ей будет соответствовать точка с координатами

$$c_v^o = 1/R, \quad c_y^o = \frac{1}{R} \left(\frac{b}{a} c_{0x}^o a^2 + b^2 \right) \quad (1.9)$$

Образует пересечением двух линейных элементов (фиг. 2)

$$f_i = c_{0i} / a_i + c_{0v} / b_i - 1 = 0 \quad (i=1,2) \quad (1.10)$$

сингулярный элемент функции нагружения в виде выпуклой угловой точки.

Координаты угловой точки определяются выражениями

$$c_{0v}^o = a_1 a_2 (b_1 - b_2) / D, \quad c_{0y}^o = b_1 b_2 (a_2 - a_1) / D, \quad D = a_2 b_1 - a_1 b_2 \quad (1.11)$$

В этом случае функция $\varphi=0$ для линейных участков $f_i=0$ выразится соотношением

$$c_v = \frac{1}{R_i} \left(\frac{c_{0ix}}{a_i} + \frac{c_{0iy}}{b_i} \right), \quad c_y = \frac{1}{R_i} \left(-\frac{c_{0ix}}{b_i} + \frac{c_{0iy}}{a_i} \right) \quad (1.12)$$

$$R_i = \frac{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}{a_i b_i} \quad (i=1,2)$$

с учетом (1.10). Отметим, что преобразование (1.3) отображает любую прямую $f=0$ на плоскости c_{0i} в виде прямой $\varphi=0$, ортогональной к c_x . Следовательно, система соотношений (1.12) является уравнениями двух параллельных прямых, ортогональных к c_x .

Исследуем поведение функции $\varphi=0$, когда вектор силы c находится в угловой точке $c=c^o$. Предположим, что переход от $f_1=0$ к $f_2=0$ осуществляется поворотом прямой $f=0$, проходящей через точку (c_{0x}^o, c_{0y}^o) , когда точка $(a, 0)$ изменяет свое положение от $(a_1, 0)$ до $(a_2, 0)$. Уравнение такой прямой будет иметь вид $c_{0y} c_{0x}^o - c_{0y}^o a - c_{0x} c_{0y}^o + c_{0x}^o a = 0$. Отсюда уравнение участка $\varphi=0$, соответствующего угловой точке, определится

$$c_v = -\frac{c_{0y}^o a}{R}, \quad c_y = \frac{c_{0x}^o a - c^{o2}}{R} \quad (1.13)$$

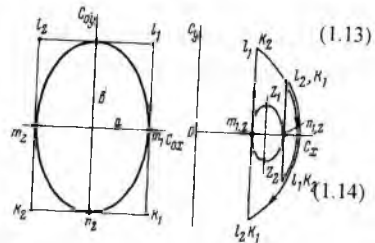
$$R = \left[c_{0y}^{o2} + (c_{0x}^o - a)^2 \right]^{1/2}$$

$$c^{o2} = c_{0x}^{o2} + c_{0y}^{o2}$$

или

$$\frac{c_y}{c_v} = -\frac{\left(\frac{c_{0x}^o}{c_{0y}^o} + \frac{c^{o2}}{c_{0y}^o a} \right)}{\left(\frac{c_{0x}^o}{c_{0y}^o} + \frac{c^{o2}}{c_{0y}^o a} \right)} \quad (1.14)$$

$$c_v^2 + c_y^2 = c^{o2}$$



Эти соотношения интерпретируются на плоскости c дугой фиксированного радиуса $c = (c_{0y}^{o2} + c_{0x}^{o2})^{1/2}$, а угол атаки в этом случае переменный и определяется выражением

$$\alpha = \arccos \left\{ -c_{0y}^o \left[c_{0y}^{o2} + (c_{0x}^o - a)^2 \right]^{-1/2} \right\}, \quad (a_1 \leq a \leq a_2) \quad (1.15)$$

2. Рассмотрим построение функции $\varphi=0$ по заданной функции $f=0$ на примере кусочно-ломаной линеаризации функции нагружения.

Любую выпуклую регулярную функцию нагружения можно представить конечным числом огибающих касательных, образующих замкнутый многоугольник. При такой системе линеаризации функция $f=0$ будет представлена системой пересекающихся прямых $f_i (i=1, 2, \dots, n)$ и содержать n угловых точек.

Из приведенных соотношений (1.3) следует, что функция $\varphi=0$ должна содержать линейные участки, ортогональные к оси c_x , и участки дуг окружности, причем количество тех и других элементов соответствует числу сторон аппроксимирующего многоугольника.

Рассмотрим пример линеаризации эллиптической функции нагружения. Предположим, что функция $f=0$ задана уравнением

$$(c_{0x}/a)^2 + (c_{0y}/b)^2 = 1 \quad (2.1)$$

Тогда соотношение (1.3), определяющее функцию $\varphi=0$, примет вид

$$\varphi = c_x^{-1} \sqrt{(b^2 - c_x^2)(c_x^2 - a^2)} - c_y = 0 \quad (2.2)$$

Соотношение (2.2) с учетом функции нагружения (2.1) в плоскости c , интерпретируется замкнутой фигурой с координатами характерных точек

$$m_{1,2}(a, 0), \quad n_{1,2}(b, 0), \quad r_1(\sqrt{ab}, b-a), \quad r_2(\sqrt{ab}, a-b)$$

Отметим, что рассмотренный в работе [2] пример с эллиптической функцией нагружения содержит неточный результат.

Аппроксимируем эллиптическую функцию нагружения огибающим прямоугольником со сторонами, совпадающими с направлениями полуосей эллипса.

В этом случае линеаризованная функция нагружения примет вид

$$c_{0x}/a \pm 1 = 0, \quad c_{0y}/b \pm 1 = 0 \quad (2.3)$$

Тогда функция $\varphi=0$ согласно (1.12), (1.13) с учетом (2.3) будет определяться в плоскости c кусочно-замкнутой кривой (фиг. 3) с координатами точек

$$\begin{aligned} m_{1,2}(a, 0), & \quad n_{1,2}(b, 0), \\ l_1, k_2(a, b), & \quad l_2, k_1(b, a), \\ l_1, k_2(b, -a), & \quad l_2, k_2(a, -b) \end{aligned}$$

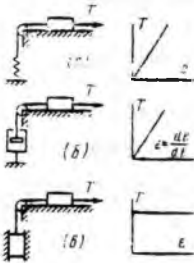
Из рассмотренного примера следует, что на некоторых участках линеаризованная функция $\varphi=0$ существенно отличается от исходной нелинейной функции $\varphi=0$. Достаточно близкое совпадение имеет место в окрестности точек касания аппроксимирующей прямой к функции нагружения, и максимальная разница отмечается в угловых точках.

О ДЕФОРМАЦИОННЫХ МОДЕЛЯХ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ И СЛОЖНЫХ СРЕД¹

И. А. Бережной, Д. Д. Ивлев, Е. В. Макаров

Рассматриваются модели различных сложных сред, основанные на введении центрального механизма трения. Подобные механизмы пластичности позволяют предложить обоснование деформационных теорий пластичности, отличное от известных [1-4]. Рассматривается также модель теории пластичности, обобщающая теорию идеальной пластичности, описывающая эффекты, характерные для теории анизотропного упрочнения, без введения «упругих микронапряжений».

1. При рассмотрении свойств различных сплошных сред, проявляемых при квазистатическом нагружении в ряде случаев полезно использовать механические аналогии, позволяющие наглядно иллюстрировать те или иные свойства сред. Обычно при моделировании свойств упругой среды рассматривают упругую пружину (фиг. 1, а), вязкой — поршень в вязкой жидкости (фиг. 1, б), пластической — тело на трущейся поверхности (фиг. 1, в). Инерционные свойства моделей не рассматриваются.

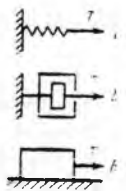


Фиг. 2

Указанные модели можно представить и в несколько другом виде, удобном для дальнейших обобщений.

Представим себе, что упругий элемент соединен посредством гибкой нерастяжимой нити, перекинутой через идеальный блок с элементом, расположенным на горизонтальной плоскости без трения, и к которому приложено усилие T (фиг. 2, а). Очевидно, по своим свойствам эта механическая модель не отличается от модели, изображенной на фиг. 1, а. Аналогично могут быть введены механические модели вязкости и трения (фиг. 2, б, в). Очевидно, что в моделях, изображенных на фиг. 2 помимо инерционных свойств не следует рассматривать собственный вес элементов. Например, вес поршня вязкого элемента или вес элемента трения на фиг. 2, б, в.

Схема с вертикально расположенными механизмами может быть использована для введения модели, элементом которой служит груз весом P (фиг. 3). В этом случае, очевидно, диаграмма сила-перемещение при нагружении имеет вид, аналогичный модели с трением (фиг. 2, в), но процессы нагрузки и разгрузки обратимы и по существу имеют место явления, характерные для нелинейно-упругих тел. Отметим, что использование элемента тяжести не вносит каких-либо принципиальных моментов для определения моделей упругих тел: пружины с нелинейными характеристиками и переменное поле тяжести (эквивалентное состояние достигается, например, изменением массы груза) приводят к моделям с одинаковыми механическими свойствами.

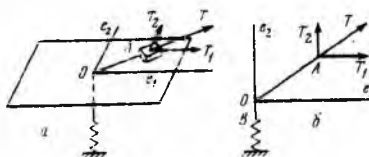


Фиг. 3

¹ Прикладная математика и механика, вып. 3, 1970 г.

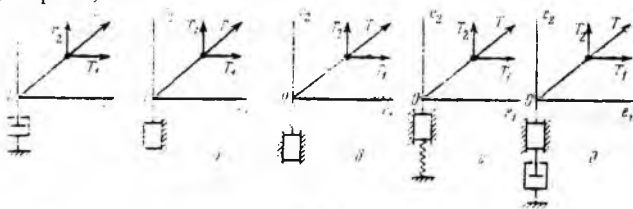
Схема с вертикально расположенными механизмами позволяет ввести двумерные модели пластических, упруго-пластических и других сложных сред, отличные от рассмотренных ранее и свойства которых могут быть положены в основу обоснования деформационных теорий сложных сред.

Представим двумерную модель упругого тела: на горизонтальной плоскости у гибкой, нерастяжимой нити в точке A приложено усилие T с составляющими T_1, T_2 . Приращение перемещения точки A обозначим через Δe с составляющими $\Delta e_1, \Delta e_2$.



Фиг. 4

Величину $e = \sqrt{e_1^2 + e_2^2}$ назовем интенсивностью перемещений. Нить AB проходит через отверстие в начале координат и соединяется в точке B с вертикально расположенной упругой пружиной (фиг. 4, а). На фиг. 4, б та же модель представлена в схематизированном виде. Аналогичные схемы двумерных моделей для вязкого, пластического, упруго-пластического, пластического, упрочняющегося и вязко-пластического тела представлены соответственно на фиг. 5, а—д.



Фиг. 5

Во всех двумерных моделях, показанных на фиг. 4, 5, элемент в горизонтальной плоскости идеально гладкий, всякие силы трения между ним и горизонтальной плоскостью отсутствуют.

Составим основные уравнения, определяющие поведение механических моделей, изображенных на фиг. 4, 5.

Для упругой модели (фиг. 4) будем иметь

$$\frac{e_1}{T_1} = \frac{e_2}{T_2}, \sqrt{T_1^2 + T_2^2} = c \sqrt{e_1^2 + e_2^2} \quad (1.1)$$

где c — коэффициент жесткости пружины.

Для последующих моделей (фиг. 5) независимо от природы механизмов будет также иметь место пропорциональность перемещений и усилий

$$\frac{e_1}{T_1} = \frac{e_2}{T_2} \quad (1.2)$$

Для модели вязкого тела (фиг. 5, а) имеет место

$$\sqrt{T_1^2 + T_2^2} = \mu \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}, \quad \varepsilon_i = \frac{de_i}{dt} \quad (1.3)$$

где μ — коэффициент вязкости.

Для модели пластического типа (фиг. 5, б) имеет место

$$T_1^2 + T_2^2 = k^2, \quad (k = \text{const}) \quad (1.4)$$

где k — предельное значение силы сухого трения.

Для модели упруго-пластического тела (фиг. 5, в) имеет место

$$T_1^2 + T_2^2 \leq k^2, \quad \sqrt{T_1^2 + T_2^2} = c \sqrt{e_1^2 + e_2^2} \quad (1.5)$$

Для модели пластического упрочняющегося тела (фиг. 5, з) имеет место

$$\sqrt{T_1^2 + T_2^2} = k + c \sqrt{e_1^2 + e_2^2} \quad (1.6)$$

Наконец, для модели вязко-пластического тела имеет место

$$\sqrt{T_1^2 + T_2^2} = k + \mu \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} \quad (1.7)$$

Аналогично могут быть рассмотрены двумерные модели для различных сложных сред.

2. Остановимся подробнее на модели пластического тела (фиг. 5, б). Основные соотношения, как уже установлено, имеют вид (1.2), (1.4). Перемещения e_1, e_2 не являются в общем случае остаточными. Мерой остаточной деформации служит величина интенсивности перемещений $e = \sqrt{e_1^2 + e_2^2}$.

Процесс нейтрального нагружения является полностью обратимым.

Рассмотрим нагружение, приводящее к перемещениям из точки A в точку A_1 (фиг. 6).

Перемещения $A A_1$ складываются из векторной суммы перемещения AC_1 ($\Delta e_1^n, \Delta e_2^n$), нормального к окружности AA' и касательного к ней AC ($\Delta e_1^r, \Delta e_2^r$).

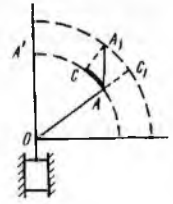
Очевидно, что перемещения элемента трения (пластичности) вызывают только приращения нормальных перемещений, в этом смысле справедлив закон пластического деформирования

$$\frac{\Delta e_1^n}{T_1} = \frac{\Delta e_2^n}{T_2}, \quad T_1^2 + T_2^2 = k^2 \quad (2.1)$$

где $\Delta e_1^n, \Delta e_2^n$ — нормальные приращения перемещений, вызывающие перемещения элемента пластичности.

Однако следует иметь в виду, что приращения нормальных перемещений, вызывая остаточное перемещение элемента трения на величину $\sqrt{(\Delta e_1^n)^2 + (\Delta e_2^n)^2}$, сами не будут остаточными: путем нейтрального нагружения они могут быть изменены обратимым образом.

Разгрузка может быть определена различным образом. Можно предположить, что гибкая нить в модели способна передавать усилия в обратном направлении. Тогда рассматриваемая модель ведет себя как жестко-пластическое тело. Разгрузка имеет место, когда



Фиг. 6

усилия обеспечивают приращение интенсивности перемещений Δe обратного знака, при этом выполняются соотношения (1.2), (1.4).

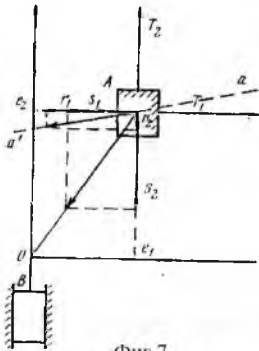
Предположим, что элемент получил перемещения интенсивности e , а затем нагрузки сняты. Элемент в горизонтальной плоскости без усилий может занять любое положение при постоянной интенсивности e (любое положение на окружности AA' , фиг.6).

До некоторой степени аналогом подобного поведения среды служит поведение идеальной жидкости, изолированный элемент которой может произвольно изменять форму.

Заметим, кстати, что двумерной моделью, иллюстрирующей свойства идеальной жидкости, может служить тело на гладкой горизонтальной плоскости.

Для несжимаемого упругого тела также существует деформирование без изменения потенциальной нагрузки при постоянной интенсивности напряжений.

3. Рассмотрим соотношения деформационной теории идеальной пластичности. При использовании динамических аналогий усилиям ставится в соответствие девиатор напряжений, перемещениям — девиатор деформаций. Зависимость между первыми инвариантами тензоров напряжений и деформаций формулируется независимо.



Фиг.7

Условию (1.4) поставим в соответствие условие пластичности

$$\sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = k^2, k = const \quad (3.1)$$

Здесь и далее штрих означает компоненты девиаторов. Условию (1.2) соответствуют соотношения

$$e'_{ij} = \lambda \sigma'_{ij}$$

Величина, λ определяется согласно (1.3), (1.4), откуда $\lambda = \frac{1}{k} \sqrt{e'_{ij} e'_{ij}}$. Мерой пластической деформации считается

$$e'_u = \sqrt{e'_{ij} e'_{ij}}$$

Пластическая деформация неизменна, если $e'_u = const, de'_u = 0$.

Соотношение деформационной теории упрочняющегося пластического тела будет полностью совпадать с соотношениями теории малых упруго-пластических деформаций

$$e'_u = \frac{e'_u}{\sigma'_u}, \sigma'_{ij}, \sigma'_u = \Phi(e'_u), \sigma'_u = \sqrt{\sigma'_{ij} \sigma'_{ij}} \quad (3.3)$$

При этой интерпретации пластическое деформирование связано с величиной de'_u .

При $de'_u = 0$ пластическое деформирование отсутствует.

Отметим, что совершенно аналогично могут быть записаны соотношения деформационной теории вязко-пластического тела и подобные модели, связанные с введенными моделями.

4. Остановимся на одной модели пластического тела. Рассмотрим следующую двумерную модель (фиг. 7). На горизонтальной плоскости расположен элемент сухого трения A , соединенный в свою очередь тягой AB с элементом сухого трения B . Под действием внешних усилий T_1, T_2 элемент смещается в направлении прямой aa' .

Реакция сухого трения элемента A имеет компоненты r_1, r_2 , результирующая их направлена против движения элемента, т. е. вдоль прямой aa' . Усилия, передаваемые элементом сухого трения, обозначены через s_1, s_2 . Очевидно, в предельном состоянии будем иметь

$$\begin{aligned} T_1 &= s_1 + r_1, T_2 = s_2 + r_2, s_1^2 + s_2^2 = k_1^2, r_1^2 + r_2^2 = k_2^2 \\ \frac{e_1}{s_1} &= \frac{e_2}{s_2}, \frac{de_1}{dr_1} = \frac{de_2}{dr_2} \quad (k_1, k_2 = const) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из (3.4) получим

$$T_1^2 + T_2^2 = k_1^2 + k_2^2 + 2(s_1 r_1 + s_2 r_2) \quad (3.5)$$

Отметим, что

$$s_i = \frac{k_i e_i}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}}, r_i = \frac{k_i de_i}{\sqrt{de_1^2 + de_2^2}} \quad (i=1,2) \quad (3.6)$$

Тогда соотношение (3.5) легко преобразовать к виду

$$T_1^2 + T_2^2 = k_1^2 + k_2^2 + 2k_1 k_2 \left(\frac{e_1 de_1 + e_2 de_2}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2} \sqrt{de_1^2 + de_2^2}} \right) \quad (3.7)$$

Из соотношения (3.4), (3.6) получим также

$$\frac{de_1}{T_1 - \frac{k_1 e_1}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}}} = \frac{de_2}{T_2 - \frac{k_2 e_2}{\sqrt{de_1^2 + de_2^2}}} \quad (3.8)$$

Обозначим $dD = T_1 de_1 + T_2 de_2$. Из (3.4) получим

$$dD = k_1 d \left(\sqrt{e_1^2 + e_2^2} \right) + k_2 \left(\sqrt{de_1^2 + de_2^2} \right) \quad (3.9)$$

Из соотношений (3.7), (3.8) следует, что максимальное внешнее усилие имеет место, когда направления e_i и de_i совпадают, в этом случае

$$T_1^2 + T_2^2 = k_1^2 + k_2^2 \quad (3.10)$$

Во всех других случаях внешнее усилие меньше величины (3.10). Из (3.9) следует, что, за исключением случая совпадения направлений e_i и de_i , направления e_i и T_i не совпадают, т. е. имеют место явления типа приобретенной анизотропии, описываемой, например, теорией трансляционного упрочнения. Однако в данном случае «упругих микронапряжений» нет, все механизмы, положенные в основу построения модели, необратимы.

Выпишем аналогичные соотношения теории пластичности. Условиям (3.4) будут соответствовать выражения

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}' &= s_{ij}' + r_{ij}', s_{ij}' s_{ij}' = k_1^2, f(r_{ij}') = k_2^2, k_1, k_2 = const \\ e_{ij}' &= \lambda s_{ij}', de_{ij}' = d\mu \frac{df}{r_{ij}'} \end{aligned} \quad (3.11)$$

В простейшем случае

$$f(r_{ij}') = r_{ij}' r_{ij}' = k_2^2$$

Тогда

$$\sigma_{ij}' \sigma_{ij}' = k_1^2 + k_2^2 + \frac{2k_1 k_2 e_{ij}' de_{ij}'}{\sqrt{e_{ij}' e_{ij}'} \sqrt{de_{ij}' de_{ij}'}} \quad (3.12)$$

$$de_{ij}' = d\mu \left[\sigma_{ij}' - \frac{k_1 e_{ij}'}{\sqrt{e_{ij}' e_{ij}'}} \right]$$

В предложенной теории максимальная величина $\sigma_{ij}' = k_1 + k_2$, вообще она зависит от косинуса угла между векторами e_{ij}' и de_{ij}' . Из соотношений (3.11) в частном случае имеют место соотношения классической теории идеальной пластичности при $k_1 = 0, k_2 \neq 0$ и деформационной теории идеальной пластичности при $k_1 \neq 0, k_2 = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивлев Д. Д. О деформационных теориях пластичности. В сб.: «Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды» (к 60-летию академика Л. И. Седова), М., «Наука», 1969.
2. Ильюшин А. А. Пластичность. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
3. Ключников В. Д. Новые представления в пластичности и деформационная теория. ПММ, т. 23, вып. 4.
4. Работнов Ю. Н. Модель, иллюстрирующая некоторые свойства упрочняющегося пластического тела. ПММ, 1959, т. 23, вып. 1.

ОБ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМ ИССЛЕДОВАНИИ КОЛЕСА С УПРУГОЙ ШИНОЙ ПРИ ДВИЖЕНИИ ПО ПОВЕРХНОСТИ С ТРЕНИЕМ¹

И. А. БЕРЕЖНОЙ, В. В. ИГНАТЬЕВ

1. В работе [1] обсуждалось применение функции нагружения для описания поведения некоторых двумерных пластических моделей, одной из которых является плоская безмоментная модель колеса движущегося по поверхности при кулоновом трении между ними. Показано, что анизотропия характеристики сопротивления в плоскости сил может быть представлена в виде замкнутой кривой, охватывающей начало координат, а скорость движения для такой модели определяется полем внешних нормалей к функции нагружения для соответствующих радиус-векторов сил.

Связь между компонентами безразмерных сил и компонентами скорости задается следующей системой соотношений:

¹ МТТ АН СССР, №1, 1970

$$f(c_{0i}) = 0, q_{0i}^{\square} = \lambda \text{grad}(f), c_{0i} = \frac{Q_{0i}}{kQ_{0z}} \quad (1.1)$$

$$(i = x, y)$$

Здесь c_{0i} — компоненты безразмерной силы (коэффициенты сопротивления), определяемые в долях силы кулонова трения с коэффициентом k в зоне контакта колеса под действием ортогональной к плоскости движения силы Q_{0z} , совпадающей со срединной плоскостью колеса; q_{0i}^{\square} — компоненты скорости; Q_{0i} — компоненты действующей силы.

Здесь и далее величинам, заданным в связанной с колесом системе координат, приписывается нулик снизу.

В работе [2] введена функция анизотропии, связывающая поле радиус-векторов функции нагружения с полем скоростей движения системой соотношений

$$\varphi(c_x, c_y) = 0, c_x = \frac{1}{R} \left(c_{0x} \frac{\partial f}{\partial c_{0x}} + c_{0y} \frac{\partial f}{\partial c_{0y}} \right) \quad (1.2)$$

Здесь c_x, c_y — компоненты безразмерной силы, заданные в связанной со скоростью системе координат.

Рассмотрим построение функции анизотропии на примере модели колеса с линейным механизмом «бокового увода». Для такой модели функция нагружения определяется сингулярной замкнутой кривой

$$f_1 \equiv c_{0x}^2 + c_{0y}^2 - 1 = 0, f_2 \equiv (c_{0x} \mp \eta) + \xi c_{0y}^* (c_{0y} - c_{0y}^*) = 0 \quad (1.3)$$

Здесь ξ — коэффициент бокового увода, η — параметр торможения, а градус приписан компоненте действующей силы.

Уравнение $f_2 = 0$ удовлетворяется подстановкой

$$c_{0x} = \eta, c_{0y} = c_{0y}^*$$

при этом соотношения (1.2) примут вид

$$c_x = \frac{\eta + \xi c_{0y}^*}{R}, c_y = c_{0y}^* \frac{(1 - \eta\xi)}{R}, R = \sqrt{1 + (\xi c_{0y}^*)^2} \quad (1.4)$$

причем из совместного решения уравнений (1.3) следует, что изменение c_{0y}^* определяется неравенством

$$-\sqrt{1 - \eta^2} \leq c_{0y}^* \leq \sqrt{1 - \eta^2}$$

Угол атаки α с учетом $f_2 = 0$ будет равен

$$\alpha = \text{arctg} \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial c_{0y}}}{\frac{\partial f}{\partial c_{0x}}} \right) = \text{arctg}(\xi c_{0y}^*) \quad (1.5)$$

Тогда уравнение функции анизотропии в параметрической форме запишется в следующем виде:

$$\frac{c_x}{c_y} = \frac{\xi\eta + \text{tg}^2\alpha}{(1 - \xi\eta)\text{tg}\alpha}, c_x^2 + c_y^2 = \eta^2 + \frac{\text{tg}^2\alpha}{\xi^2} \quad (1.6)$$

Из соотношений (1.5) следует, что уравнения (1.6) будут справедливы, если угол атаки удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{arctg}\left(-\xi\sqrt{1-\eta^2}\right) \leq \alpha \leq \operatorname{arctg}\left(\xi\sqrt{1-\eta^2}\right) \quad (1.7)$$

Исключая из уравнений (1.6) параметр α в предположении о малости углов атаки, уравнение поляры запишем в следующем виде:

$$c_y^2 - \xi\left(\frac{1}{\xi} - \eta\right)^2 (c_x - \eta) = 0 \quad (1.8)$$

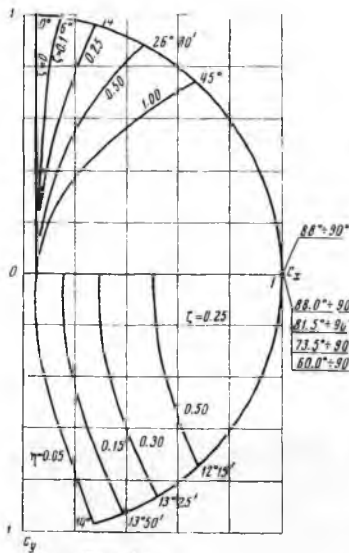
Угловой точкой на функции нагружения (1.3) будет соответствовать дуга окружности единичного радиуса, при этом угол атаки будет изменяться в пределах

$$\operatorname{arctg}\left(\xi\sqrt{1-\eta^2}\right) \leq \alpha \leq \operatorname{arccos}\eta \quad (1.9)$$

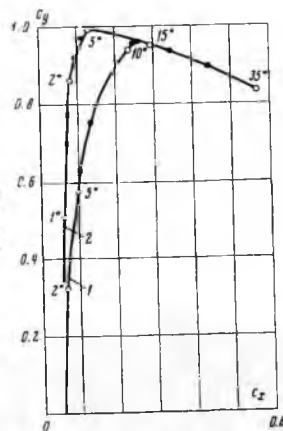
Участку функции нагружения, соответствующему движению «юзом» и определяемому уравнением $f_1 = 0$, на функции анизотропии соответствует точка с координатами (1,0), причем движение может происходить с любым углом атаки в диапазоне

$$\frac{1}{2}\pi - \operatorname{arccos}\eta \leq \alpha \leq \frac{1}{2}\pi + \operatorname{arccos}\eta \quad (1.10)$$

На фиг. 1 представлено семейство теоретических кривых, определяющих анизотропию сопротивления колеса в рамках рассматриваемой модели с линейным механизмом бокового увода, для различных значений параметра торможения η при $\xi = 0.25$ и коэффи-



Фиг. 1



Фиг. 2

циента бокового увода ξ при $\eta = 0.05$.

2. Экспериментальная проверка приведенных выше результатов проводилась на специально оборудованном стенде, за основу которого был взят автомобиль «Москвич» с

колесами размером 650×150 и внутренним давлением в пневматиках 2 атм. Шина имела нормальный профиль с универсальным протектором. Для обеспечения движения колеса под разными углами атаки в рулевой механизм автомобиля установлены тяги изменяемой длины, скорость изменения длины которых могла выбираться заранее и была постоянна по рабочему ходу. Управляемые тяги установлены таким образом, что передние колеса могли иметь любой угол установки, причем углы установки правого и левого колес были равны по величине и противоположны по знаку. В случае прямолинейного движения автомобиля углы установки колес совпадают по определению с углами атаки. Поэтому в дальнейшем везде рассматриваются результаты, полученные при прямолинейном движении, и угол атаки отсчитывается как угол установки колеса. Система управления тягами выполнена таким образом, что в процессе движения возможно непрерывно изменять углы атаки колес от нулевых до максимальных. На фиг. 3 показано положение колес при значении углов атаки, близких к максимальным (максимальный угол был ограничен конструктивными условиями и составлял $\pm 37^\circ$).

Каждое колесо установлено на динамометрическую подвеску для измерения всех компонент, действующих в процессе движения силы и момента. Кроме того, на каждом колесе установлен датчик угла атаки и угловой скорости вращения. Сигналы со всех датчиков осциллографировались.

Эксперимент проводился следующим образом. Автомобиль разогнался до заданной начальной скорости при нулевых углах атаки колес, а затем углы атаки колес изменялись, причем скорость движения могла сохраняться постоянной. Поверхность была выбрана недеформируемой: в первом случае ровный сухой бетон, а во втором — та же поверхность, но покрытая тонким равномерным слоем снега. Таким образом, полученные результаты соответствуют довольно широкому диапазону параметра ξ определяющего механизм бокового увода.

На фиг. 2 приведены результаты экспериментов в указанных условиях в широком диапазоне скоростей движения колеса и скоростей изменения угла атаки, приведенные экспериментальные результаты движения колеса по поверхности довольно близко совпадают с расчетными параметрами, полученными на рассматриваемой модели. Необходимо отметить, что рассмотренная модель не исчерпывает в полной мере всех режимов движения реального колеса. Так, движение колеса по деформируемой поверхности будет иметь более сложные закономерности, но и они, по-видимому, могут быть описаны с достаточной степенью точности, если в модель ввести механизм анизотропного упругения и т. п.



Фиг. 3

ЛИТЕРАТУРА

1. Бережной И. А. О применении функции нагружения в некоторых случаях движения экипажа. Инж. ж., МТТ, 1967, № 5.
2. Бережной И. А. О некотором инвариантном представлении связи между векторами силы и скорости для двумерной пластической модели. Инж. ж., МТТ, 1968, № 5.

О ПРИОБРЕТЕННОЙ АНИЗОТРОПИИ ПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ¹

И. А. Бережной, В. В. Дудукаленко, Д. Д. Ивлев

Приобретенная анизотропия пластических материалов связана с упрочнением. Упрочнение материала в процессе направленного пластического деформирования вызывает изменение механических свойств в различных направлениях — возникает приобретенная анизотропия наклепанного материала. Одним из проявлений приобретенной анизотропии является известный эффект Баушингера.

Свойства пластического материала могут быть описаны функцией нагружения и законом связи между приращениями пластических деформаций и напряжений. В основу построения теории пластичности может быть положен постулат Драккера [2], из которого следует ассоциированный закон течения

$$de_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (d\lambda \geq 0) \quad (1)$$

где f — функция нагружения, σ_{ij}, e_{ij}^p — соответственно компоненты тензоров напряжений и пластических деформаций, а также условие устойчивости

$$de_{ij}^p d\sigma_{ij} \geq 0 \quad (2)$$

Условие устойчивости накладывает ограничения на законы упрочнения, или, другими словами, на характер изменения функций нагружения при пластическом деформировании. Тем самым условие устойчивости (2) оказывается связанным с явлениями приобретенной анизотропии.

Для простоты предположим, что функция нагружения полностью определяется значением пластических деформаций

$$f(e_{ij}^p, \sigma_{ij}, k_i) = 0 \quad (k_i = const) \quad (3)$$

Частным случаем соотношения (3) являются функция нагружения теории линейного изотропного

$$\sum_2 k + cI_2 \quad (k, c = const), \quad (4)$$

где

$$\sum_2 = \sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}}, \quad I_2 = \sqrt{e_{ij}^p e_{ij}^p},$$

а также функция нагружения теории трансляционного упрочнения

¹ Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа, 1972 г.

$$(\sigma_{ij} - c e_{ij}^p)^2 = k^2 \quad (k, c = \text{const}) \quad (5)$$

В пространстве напряжений P функция нагружения (3) при фиксированном значении e_{ij}^p интерпретируется некоторой поверхностью нагружения (рис. 1а).

Можно ввести пространство пластических деформаций S , тогда при фиксированном значении σ функция нагружения (3) будет интерпретироваться некоторой поверхностью, которую по аналогии назовем поверхностью пластических деформаций. В исходный момент нагружения пластические деформации равны нулю ($e_{ij}^p = 0$), в этом случае поверхность пластических деформаций проходит через начало координат (рис. 1б).

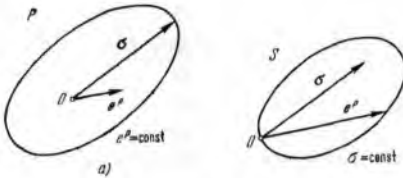


Рис. 1.

При одной и той же величине пластических деформаций e_{ij}^p при нейтральном нагружении различными значениями σ (рис. 2а) будут соответствовать различные поверхности пластических деформаций (рис. 2б). При изменении вектора напряжений σ происходит приращение пластических деформаций. Согласно ассоциированному закону течения для гладких функций нагружения при любых приращениях напряжений направление приращения пластической деформации вполне однозначно: оно направлено по нормали к поверхности нагружения. Следовательно, при данном деформированном состоянии поверхность пластических деформаций испытывает вполне определенное смещение в пространстве S .

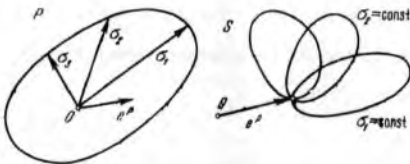


Рис. 2.

Таким образом, несмотря на то, что компоненты σ_{ij} и e_{ij}^p входят в функцию нагружения (3), по существу, симметрично и равноправно, ассоциированный закон течения определяет их неравноправное положение. Если вектор σ может фактически принимать любое значение внутри фиксированной поверхности нагружения, то вектор e^p подобной свободой перемещения внутри фиксированной поверхности пластических деформаций не располагает. Для функции нагружения определено понятие нейтрального нагружения, когда приращения напряжений могут быть любыми; для фиксированной поверхности пластических деформаций приращение пластической деформации всегда однозначно определено в каждой ее точке.

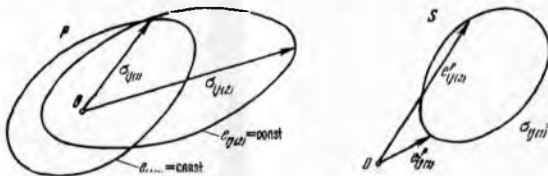


Рис. 3.

При данном деформированном состоянии вектор приращений пластических деформаций в зависимости от нагружения может получить любое направление; это обстоятельство интерпретируется тем, что для

сплошной линией. Тогда для точек полуокружности BAB' имеет место условие устойчивости (10): $\sigma e^p \geq 0$; для точек полуокружности BCB' (исключая точки B и B') имеет место $\sigma e^p < 0$, т. е. условие устойчивости $d\sigma de^p \geq 0$ не выполняется. Произведем нагружение в зоне неустойчивости, для определенности — сжатие в точке C . Тогда пластические деформации должны уменьшиться; вектор приращения пластической деформации, в точке C направлен в сторону, обратную вектору e^p , т. е. по направлению внешней нормали к поверхности нагружения в точке C , а вектор приращения напряжений согласно условию $d\sigma de^p < 0$ направлен внутрь поверхности нагружения, которая будет стремиться занять положение, показанное на рис. 4а пунктиром. Диаграмма одноосного растяжения — сжатия будет иметь вид, изображенный на рис. 4б.

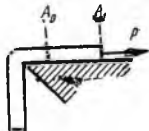


Рис. 5.

Таким образом, изотропно упрочняющийся материал не обладает свойствами устойчивости при разгрузке. Сказанное можно пояснить на механической модели (рис. 5). Предположим, что на горизонтальную шероховатую плоскость втягивается силой p абсолютно гибкая лента единичной ширины. Собственным весом ленты будем пренебрегать. Пусть суммарная сила трения возрастает пропорционально площади контакта ленты с плоскостью. Если вести отсчет перемещения от точки A_0 , то диаграмма «усилие — длина» $p-s$ будет совпадать с диаграммой $\sigma - e^p$ на рис. 4б. При изменении знака усилия p лента будет находиться в неустойчивом положении равновесия.

Рассмотрим анизотропно упрочняющийся материал в случае линейного упрочнения (4). Условие устойчивости (8) в этом случае принимает вид

$$c(\sigma_{ij} - ce_j^p)^2 \geq 0. \quad (11)$$

Согласно (5) условие (11) всегда имеет место при $c > 0$. Значит, при $c > 0$ закон трансляционного упрочнения приводит к выполнению условия устойчивости для всех путей деформирования.

Рассмотрим общий вид функции нагружения (3).

Условие устойчивости (2) предполагает, что в данной точке нагружения A (рис. 6) происходит упрочнение, в то время как на других участках поверхности нагружения возможно и разупрочнение. После некоторой догрузки в точке A напряженное состояние будет соответствовать точке A' , лежащей вне первоначальной поверхности нагружения

$$f(e_{ij}^p, \sigma_{ij}, k_i) = 0.$$

Пусть Δe_{ij}^p — приращения пластических деформаций в результате догрузки, тогда $f(\sigma_{ij} e_{ij}^p + \Delta e_{ij}^p, k_i) = 0$ — уравнение поверхности нагружения после догрузки.

Произведем разгрузку, а затем произведем повторное нагружение из точки нагружения B' , в которой приращение

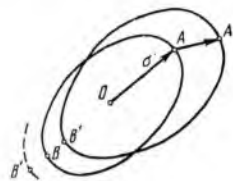


Рис. 6

пластических деформаций $\Delta e_{ij(B)}^p$ имеет направление, обратное $\Delta e_{ij(A)}^p$; для простоты можно положить, что $\Delta e_{ij(B)}^p = -\Delta e_{ij(A)}^p$.

Тогда при подобном деформировании поверхность нагружения будет стремиться занять первоначальное положение, имевшее место до догрузки из точки нагружения A , и точка B' будет стремиться занять положение B .

Если при догрузке в точке A точка B' вышла за пределы первоначальной зоны упругости, т. е. в этой точке произошло упрочнение материала (пунктир на рис. 6), то для нагружения из точки B' постулат устойчивости места иметь не будет: $d\sigma_{ij} de_{ij}^p < 0$.

Если при догрузке в точке A поверхность нагружения в окрестности точки B' смещается внутрь упругой области, постулат устойчивости $d\sigma_{ij} de_{ij}^p > 0$ будет выполнен.

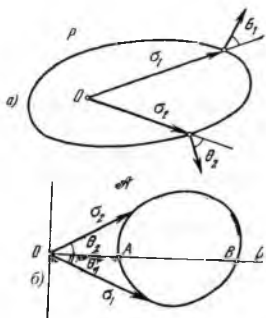


Рис. 7.

Значит, если при одноосном растяжении образца происходит наклеп, то для устойчивого материала предел упругости при сжатии увеличиться не может. Таким образом, наличие эффекта Баушингера связано с процессами устойчивого деформирования материала.

Для описания свойств анизотропии материала можно воспользоваться определением функции анизотропии [1]. Рассмотрим поверхность нагружения $f(\sigma_{ij}, e_{ij}^p, k_i) = 0$. В пространстве напряжений P каждой фиксированной поверхности нагружения может быть поставлена в соответствие функция анизотропии A , являющаяся годографом вектора напряжений, относительно нормали в соответствующей точке поверхности нагружения. Поясним сказанное на рис. 7.

Поверхности нагружения (рис. 7а) ставится в соответствие поверхность анизотропии A (рис. 7б); при построении поверхности анизотропии вектор σ откладывается от фиксированной оси OO_1 под углом, который он образует с нормалью в данной точке поверхности нагружения. Очевидно, что для сферической изотропной поверхности нагружения поверхность A стягивается в точку. Эффект Баушингера характеризуется отрезком AB на рис. 7б.

Для устойчивых материалов при нагружении отрезок AB (рис. 7б) будет увеличиваться, причем точки A и B' будут двигаться в противоположных направлениях; для неустойчивых материалов отрезок AB будет изменяться так, что точки A и B будут двигаться в одном направлении. Вообще для устойчивых материалов при нагружении поверхность анизотропии последующего состояния будет включать в себя поверхность анизотропии предыдущего состояния.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бережной И. А., о некотором инвариантном представлении связи между векторами силы и скорости для двумерной пластической модели.— Мех. тв. тела, 1968, № 5, 55—57.

2. Drucker D. C., A Definition of Stable Inelastic Material,— J. Appl. Mech., 1959» 26 : 1, 101—106 (русский перевод: Механика, 1960, № 2).
3. Дудукаленков В., Об условии единственности анизотропно упрочняющегося пластического материала.— Прикл. мех., 1968, 4: 9, 117—120.

ON CONSTRUCTING MODELS OF COHESIONLESS MEDIA BY SPECIFYING THE DISSIPATION FUNCTION¹

I. A. Berezhnoi, D. D. Ivlev and V. B. Tchadov (U.S.S.R.)

Constructing of models of plastic behaviour by prescribing the dissipation function was considered by several writers [1-4].

In [5] the dissipation function was considered for solids whose yield condition depends on the first invariant of the stress tensor, i.e. for plastic media whose properties depend on hydrostatic pressure. Similar relations were used in [6] to describe yielding of granular media and soils.

In this paper models of mechanical behaviour of cohesionless media will be developed starting with an appropriate form of the dissipation function.

In order to clearly set forth the basic ideas, let us consider first the plane strain case. The yielding condition is of the form

$$[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]^{1/2} + a(\sigma_x + \sigma_y) = 2k, a, k = \text{const.} \quad (1)$$

where $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ are the components of the stress tensor σ_{ij} .

The associated flow rule yields

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \lambda [(\Sigma)^{-1}(\sigma_x - \sigma_y) + a], & \varepsilon_y &= \lambda [(\Sigma)^{-1}(\sigma_y - \sigma_x) + a], \\ \varepsilon_{xy} &= 2\lambda(\Sigma)^{-1}\tau_{xy}, & \Sigma &= [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]^{1/2}, \end{aligned} \quad (2)$$

where $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ are the components of the strain rate tensor ε_{ij} .

The relationship (2) results in

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = 2\lambda a, \quad \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\varepsilon_{xy}}{\tau_{xy}} = 2\lambda(\Sigma)^{-1}, \quad (3)$$

hence we obtain

$$2\lambda = \frac{1}{a}(\varepsilon_x + \varepsilon_y), \quad 2\lambda = [(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + 4\varepsilon_{xy}^2]^{1/2} \quad (4)$$

Eqs. (4) provide the coupling between the shear strain rate and the rate of volume change

$$[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + 4\varepsilon_{xy}^2]^{1/2} - \frac{1}{a}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = 0, \quad (5)$$

¹ Foundations of Plasticity
Warsaw, August 30 – September 2, 1972
Edited by

which is a characteristic property of deformation of granular media. For incompressible media, $\alpha = 0$, we have $\varepsilon_x + \varepsilon_y = 0$. The relations given by the flow rule can eventually be expressed in the form

$$\left[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + 4\varepsilon_{xy}^2 \right]^{1/2} - \frac{1}{\alpha} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) = 0, \quad \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\varepsilon_{xy}}{\tau_{xy}} \quad (6)$$

Eqs. (1), (6) constitute a set of governing equations. The second equation (6) represents the isotropy condition for the medium.

Let us now consider the dissipation function

$$D = D(\varepsilon_{ij}) = \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + 2\tau_{xy} \varepsilon_{xy}, \quad (7)$$

Using (3) and (1) we arrive at the following relation

$$D(\varepsilon_{ij}) = 2k\lambda. \quad (8)$$

On account of (4) the dissipation function (8) has a twin analytical expression. It was shown in [5] that for cohesionless soils, $k = 0$, the dissipation $D = 0$.

We shall now consider the problem of constructing a model for cohesion-less medium by specifying the dissipation function. Eq. (5) will be used for this purpose. The dissipation function assumes two forms

$$D = \frac{k}{\alpha} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad \text{or} \quad D = k \left[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + 4\varepsilon_{xy}^2 \right]^{1/2} \quad (9)$$

In order to obtain (1) and (6) we shall use the associated loading rule $\sigma_{ij} = \frac{\partial D}{\partial \varepsilon_{ij}}$ and take Eq. (5)

into consideration. Let us assume the dissipation function as follows

$$D = \frac{k}{\alpha} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \nu \left\{ \left[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + 4\varepsilon_{xy}^2 \right]^{1/2} - \frac{1}{\alpha} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \right\} \quad (10)$$

where ν is the Lagrangian multiplier.

According to the associated loading rule, we obtain from (10)

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{k}{\alpha} + \nu \left[(J)^{-1} (\varepsilon_x - \varepsilon_y) - \frac{1}{\alpha} \right], \\ \sigma_y &= \frac{k}{\alpha} + \nu \left[(J)^{-1} (\varepsilon_y - \varepsilon_x) - \frac{1}{\alpha} \right], \\ \tau_{xy} &= 2\nu (J)^{-1} \varepsilon_{xy}, \quad J = \left[(\varepsilon_y - \varepsilon_x)^2 + 4\varepsilon_{xy}^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (11)$$

hence, eventually,

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{2}{\alpha} (k - \nu), \quad \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{\tau_{xy}}{\varepsilon_{xy}} = 2\nu (J)^{-1} \quad (12)$$

and therefore the Lagrangian multiplier assumes double form

$$2\nu = 2k - \alpha (\sigma_x + \sigma_y), \quad 2\nu = \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 \right]^{1/2} \quad (13)$$

Eqs. (13) immediately result in the corresponding yield condition.

The shear dilatation relationship is prescribed a priori as in (5), whereas the isotropy relations are determined by (12). It is seen that by prescribing a form of the dissipation function and accounting for the dilatation relationship we may eventually obtain the relations (1), (6) denning the behaviour of cohesionless media.

The expression

$$D = k \left[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + 4\varepsilon_{xy}^2 \right]^{1/2} + \nu \left\{ \left[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + 4\varepsilon_{xy}^2 \right]^{1/2} - \frac{1}{\alpha} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \right\} \quad (14)$$

can easily be seen to lead to the relations (1), (6) as well.

Let us now generalize the obtained results. Assume that the dissipation function is expressed by

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = D_1(\varepsilon) = D_2(\varepsilon'_{ij}), \quad (15)$$

where

$$\varepsilon = \frac{1}{3}\varepsilon_{ii}, \varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon.$$

The functions D_1, D_2 are homogeneous of the order one in their arguments. It is easily seen that in this case $D_1(\varepsilon) = A\varepsilon$, $A = \text{const}$. Let us assume the following form of the dissipation function considered as the primitive concept of the theory

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = D_1(\varepsilon) + \nu [D_1(\varepsilon) - D_2(\varepsilon'_{ij})], \quad (16)$$

where ν is the Lagrangian multiplier. The associated loading rule yields the components of the stress tensor

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial D_1}{\partial \varepsilon_{ij}} + \nu \left(\frac{\partial D_1}{\partial \varepsilon_{ij}} - \frac{\partial D_2}{\partial \varepsilon'_{ij}} \right) \quad (17)$$

or, in an explicit form,

$$\sigma_x = \frac{1}{3}A\delta_y + \nu \left[\frac{1}{3}A\delta_y - \frac{1}{3} \left(2 \frac{\partial D_2}{\partial \varepsilon'_x} - \frac{\partial D_2}{\partial \varepsilon'_y} - \frac{\partial D_2}{\partial \varepsilon'_z} \right) \right] \tau_{xy} = \nu \frac{\partial D_2}{\partial \varepsilon_{xy}} \quad (18)$$

The expressions not shown in (18) can be derived by the circular permutation of the indices. Eq. (18) yields

$$\sigma = \frac{1}{3}A(1 + \nu), \sigma'_x = -\frac{\nu}{3} \left(2 \frac{\partial D_2}{\partial \varepsilon'_x} - \frac{\partial D_2}{\partial \varepsilon'_y} - \frac{\partial D_2}{\partial \varepsilon'_z} \right) \tau_{xy} = \nu \frac{\partial D_2}{\partial \varepsilon_{xy}}, \quad (19)$$

where

$$\sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ii}, \sigma'_x = \sigma_x - \sigma_{xx}.$$

From (19) we find

$$\sigma'_x = \left(\frac{1}{3} - \frac{\sigma}{A} \right) \left(2 \frac{\partial D_2}{\partial \varepsilon'_x} - \frac{\partial D_2}{\partial \varepsilon'_y} - \frac{\partial D_2}{\partial \varepsilon'_z} \right) \tau_{xy} = \left(\frac{1}{3} - \frac{\sigma}{A} \right) \frac{\partial D_2}{\partial \varepsilon_{xy}} \quad (20)$$

The derivatives $\frac{\partial D}{\partial \varepsilon'_{ij}}$ are functions, homogeneous of the order zero in the components ε'_{ij} . There-

fore (19) gives the yield condition in terms of the stress tensor

$$f(\sigma, \sigma'_{ij}) = 0 \quad (21)$$

Let us now derive the flow rule associated with (21). Clearly

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0$$

Making use of (16) we conclude that

$$\varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} + \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \left[\frac{\partial D_1}{\partial \varepsilon_{ij}} + \nu \left(\frac{\partial D_1}{\partial \varepsilon_{ij}} - \frac{\partial D_2}{\partial \varepsilon'_{ij}} \right) \right] d\varepsilon_{ij} \quad (22)$$

From (22) and (17) it follows that

$$\varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} = 0 \quad (23)$$

and therefore (23) and (21) result in

$$\left(\mu \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} - \varepsilon_{ij} \right) d\sigma_{ij} = 0. \quad (24)$$

Since this must hold for any $d\sigma_y$ the associated flow rule follows as

$$\varepsilon_{ij} = \mu \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

As an example let the dissipation function $D = \sqrt{\varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ij}}$ be considered. It can readily be seen that

$$\frac{\partial D}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\varepsilon'_{ij}}{\sqrt{\varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ij}}}. \text{ Then, according to (20)}$$

$$\sigma'_{ij} = \left(\frac{1}{3} - \frac{\sigma}{A} \right) \frac{\varepsilon'_{ij}}{\sqrt{\varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ij}}}.$$

On squaring Eq. (26) and making some rearrangements, we arrive at the following condition of yielding

$$\sigma + A(\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}) = \frac{A}{3}. \quad (27)$$

This yield condition represents a cone in the space of principal stresses.

References

1. Ziegler, H., Some extremum principles in irreversible thermodynamics, Progress in Solid Mech. 4, 91-193, North-Holland, Amsterdam, 1963.
2. Ivlev, D. D., On the dissipation function in the theory of plastic solids (in Russian), Doklady AN SSSR, 176 (1967) No. 5.
3. Sedov, L. I., Mechanics of continuous media (in Russian), Nauka, Moscow, 1970.
4. Berezhnoi, I. A., D. D. Ivlev and E. V. Makarov, in Problems of mechanics of deformable solids (in Russian), Sudpromgiz, 1970.
5. Sawczuk, A. and P. Stutz, On formulation of stress-strain relations for solids at failure, ZAMP, 11 (1968) 770-778.
6. Sokolovskii, V. V., Statics of granular media (in Russian), Moscow, 1954.

О МОДЕЛИ МАКСВЕЛЛА С УПРАВЛЯЕМОЙ ВЯЗКОСТЬЮ¹

И.А.Бережной, Н.В.Герасимов

Широкий класс моделей сложных сред может быть построен на основе комбинации трех фундаментальных механизмов упругого, вязкого и пластического с фиксированными определяющими параметрами» т.е. с постоянными коэффициентами жесткости, вязкости и пластичности. Построению таких моделей посвящены работы [1],[2],[3] и др.

Рассмотрим поведение обобщенной модели максвелла при действии деформационной нагрузки $\varepsilon = \varepsilon_0 \sin(\omega t + \varphi)$, когда вязкость изменяется по закону $\mu = \mu_0(1 + \lambda \sin \omega t)$.

Связь между напряжением и деформацией в этом случае определяется уравнением

$$\dot{\sigma} + \frac{c}{\mu_0(1 + \lambda \sin \omega t)} \sigma = \varepsilon_0 c \omega \cos(\omega t + \varphi) \quad (1)$$

Из теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами известно [4], что неоднородное уравнение с T -периодическими коэффициентами име-

¹ Динамика сплошной среды, вып.13, 1973 г.

ет единственное T -периодическое решение, когда соответствующее ему однородное уравнение асимптотически устойчиво. Нетрудно показать, что условие асимптотической устойчивости тривиального решения однородного уравнения имеет вид

$$\frac{c}{\mu_0 \sqrt{1-\lambda^2}} > 0 \quad (2)$$

Отсюда видно, что для положительных $\mu(t)$ и c тривиальное решение однородного уравнения, полученного из (1), всегда асимптотически устойчиво. Следовательно, неоднородное уравнение (1) имеет единственное $T = \frac{2\pi}{\omega}$ -периодическое решение, которое согласно [4], можно получить в виде 1

$$\sigma(t) = \omega \varepsilon_0 c \frac{1}{1 - e^{\lambda(t)}} \int_0^t e^{-\lambda(t-V)} \cos(\tau - V + \varphi) dV \quad (3)$$

где

$$\chi(\tau) = -\frac{2c}{\mu_0 \sqrt{1-\lambda^2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} 0,5\omega t + \lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} - \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \right)$$

Однако, интеграл в (3) не поддается представлению в элементарных функциях. Поэтому, воспользовавшись приближенным методом решения нелинейных уравнений [5], найдем приближенное решение уравнения (5).

Введя безразмерное время $\tau = \omega t$, перепишем уравнение (1.) в виде

$$\sigma' + c_1 \sigma + \Phi(\tau) = \varepsilon_1 (1 + \lambda \sin \tau) \cos(\tau + \varphi) \quad (4)$$

где

$$\Phi(\tau) = \lambda \sin \tau, c_1 = \frac{c}{\omega \mu_0}, \varepsilon_1 = \varepsilon_0 c.$$

Отбросив член $\Phi(\tau)$ и выполнив прямое преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях, получим нулевое приближение изображающего уравнения

$$\sum(s) = \frac{\varepsilon_1 (s \cos \varphi - \sin \varphi)}{(s^2 + 1)(s + c_1)} + \frac{\lambda \varepsilon_1 \cos \varphi}{2(s^2 + 4)(s + c_1)} + \frac{s \lambda \varepsilon_1 \sin \varphi}{2(s^2 + 4)(s + c_1)} - \frac{\lambda \varepsilon_1 \sin \varphi}{2s(s + c_1)} \quad (5)$$

В пространстве оригиналов ему соответствует приближенное решение

$$\sigma_0(\tau) = A_1 \sin \tau + A_2 \cos \tau + A_3 \sin 2\tau + A_4 \cos 2\tau + D_1 e^{-c_1 \tau} - \frac{\lambda \varepsilon_1 \sin \varphi}{2c_1} \quad (6)$$

$$A_1 = -\frac{\varepsilon_1 (\cos \varphi + c_1 \sin \varphi)}{c_1^2 + 1}, A_2 = \frac{\varepsilon_1 (c_1 \cos \varphi + \sin \varphi)}{c_1^2 + 1}$$

$$A_3 = \frac{\lambda \varepsilon_1 (c_1 \cos \varphi - 4 \sin \varphi)}{2(c_1^2 + 4)}, A_4 = \frac{\lambda \varepsilon_1 (c_1 \cos \varphi - \sin \varphi)}{c_1^2 + 4}$$

D_1 - некоторая постоянная; член $D_1 e^{-c_1 \tau}$ стремится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$.

Подставив нулевое приближение функции $\Phi_0(\tau)$ в уравнение (4), находим 2π -периодическое решение в первом приближении

$$\sigma_1(\tau) = \langle \sigma \rangle + B_1 \sin \tau + B_2 \cos \tau + B_3 \sin 2\tau + B_4 \cos 2\tau + B_5 \sin 3\tau + B_6 \cos 3\tau \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
B_1 &= A_1 + \frac{\lambda(A_1 - c_1 A_1)}{c_1^2 + 1}, B_2 = A_2 + \frac{\lambda(A_2 - c_1 A_1)}{c_1^2 + 1} \\
B_3 &= A_3 + \frac{\lambda(2A_2 - c_1 A_1)}{2(c_1^2 + 4)}, B_4 = A_4 + \frac{\lambda(2A_1 - c_1 A_2)}{2(c_1^2 + 4)} \\
B_5 &= -\frac{3\lambda A_3}{c_1^2 + 9}, B_6 = -\frac{\lambda c_1 A_3}{c_1^2 + 9}
\end{aligned}$$

Постоянная составляющая напряжения определяется формулой

$$\langle \sigma \rangle = -\frac{\lambda \varepsilon_0 c \omega \mu_0}{2(c^2 + \omega^2 \mu_0^2)} (c \sin \varphi - \omega \mu_0 \cos \varphi) \quad (8)$$

Следовательно, в отличие от модели Максвелла, обобщенная модель Максвелла при периодической деформационной нагрузке и периодическом изменении вязкости приобретает постоянную составляющую $\langle \sigma \rangle$.

Исследуем влияние параметров $\varphi, c, \omega \mu_0$ и λ на величину $\langle \sigma \rangle$. Из (8) следует, что $\langle \sigma \rangle$ равна нулю, когда

$$\varphi = \arctg \frac{\mu_0 \omega}{c} \quad (9)$$

Экстремальных значений постоянная составляющая напряжения достигает при

$$\langle \sigma \rangle_{\varphi} = \begin{cases} \langle \sigma \rangle_{\max} & \text{при } \varphi = \varphi_3 + 2k\pi \\ \langle \sigma \rangle_{\min} & \text{при } \varphi = \varphi_3 + (1 + 2k)\pi \end{cases}$$

где $\varphi_3 = \arctg \left(-\frac{c}{\mu_0 \omega} \right)$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, при этом

$$\langle \sigma \rangle_{\min} = -\langle \sigma \rangle_{\max} = \frac{\lambda \varepsilon_0 c \omega \mu_0}{2\sqrt{c^2 + \omega^2 \mu_0^2}} \quad (11)$$

Таким образом, при изменении сдвига фазы φ постоянная составляющая напряжения меняется в диапазоне $\langle \sigma \rangle_{\min} \leq \langle \sigma \rangle \leq \langle \sigma \rangle_{\max}$.

Величина $\langle \sigma \rangle_{\max}$ пропорциональна амплитуде нагрузки ε_0 коэффициенту λ . С увеличением коэффициентов c или $\omega \mu_0$ максимум абсолютного значения $|\langle \sigma \rangle|_{\max}$ монотонно растет и стремится к некоторому пределу $\lim_{c \rightarrow \infty} |\langle \sigma \rangle|_{\max} = 0,5 \lambda \varepsilon_0 \omega \mu_0$ и $\lim_{c \rightarrow \infty} |\langle \sigma \rangle|_{\min} = 0,5 \lambda \varepsilon_0 c$.

Отметим, [6], что при периодическом силовом нагружении и периодическом изменении вязкости модель Максвелла деформируется с некоторой постоянной составляющей скорости $\langle \dot{\varepsilon} \rangle$. При этом величина и знак $\langle \dot{\varepsilon} \rangle$ зависят от сдвига фазы между законом изменения нагрузки и вязкости, это свойство можно использовать для создания регулируемого течения электровязких и магнито-вязких жидкостей [7].

Эффект появления постоянной составляющей напряжения при деформационном нагружении и постоянной составляющей скорости деформации при силовом нагружении наблюдался экспериментально на магнито-вязкой жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивлев Д.Д. К теории сложных сред. ДАН СССР, 1963, т. 148, №1.
2. Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И. Теория упрочняющегося пластического тела. М., "Наука", 1971. [5] Рейнер И. Реология. М., "Наука", 1965.
3. Якубович В.Д., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М., "Наука", 1972.
4. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразование. М., "Наука", 1971.
5. Бережной И.А., Герасимов Н.В. О некоторых моделях сложных сред с управляемыми параметрами. Труды Куйб. авиац. ин-та, 1973. вып.66.
6. Бережной И.А., Герасимов Н.В., Ивлев Д.Д. Насос. Авторское свидет. 111480125, с приоритетом от 30.09.1970.

О ПОСТРОЕНИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ НАГРУЖЕНИЯ СЛОЖНЫХ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ¹

И.А. БЕРЕЖНОЙ, В.И. ЦЕЙЛЕР

Определяющие соотношения теории пластического течения, построенных на основе представлений о функции нагружения и ассоциированном с ней законе пластического течения [1], по-видимому, имеют фундаментальное значение и выходят далеко за рамки механики твердого деформируемого тела. В этой связи представляется интересным изучать возможности построения определяющих соотношений теории пластического течения или квазипластического движения для сложных моделей, построенных из элементов, для которых функции нагружения имеют простой вид.

1. В работе [2] рассмотрено упруго-пластическое состояние композиции отдельных субструктур, наделенных простыми свойствами упругости и идеальной пластичности и дан метод построения предельных поверхностей текучести сложных структур, а также исследовано их упруго-пластическое поведение.

В этой работе отмечены два крайних случая: пространство обобщенного вектора силы композиции является суммой непересекающихся пространств обобщенных векторов Q_r ($r = 1, 2, \dots, m$) составляющих субструктур; композиция субструктур является совмещением исходных субструктур. В работе [3] на основе геометрических свойств выпуклых множеств указан метод построения результирующих поверхностей текучести двумерных жестко-пластических моделей по исходным простейшим жестко-пластическим моделям,

В данной работе обобщаются результаты работы [3] на произвольные идеально жестко-пластические структуры. Получаемая при этом система соотношений для построения предельных поверхностей эквивалентна соотношению [2]. Анализируется применение полученных соотношений для построения моделей пластических тел, построения предельных

¹ Труды НИИ математики ВГУ, вып. 10, 1973 г.

поверхностей для квазипластических моделей экипажа, а также поверхностей текучести (разрушения) конструкций и др.

Предположим, что идеально жестко-пластическая структура S_r характеризуется в n -мерном евклидовом пространстве E^n обобщенным вектором \underline{Q}_r . Поведение структуры S_r задается посредством предельных функций текучести и ассоциированных с ней законов пластического течения

$$f_r(\underline{Q}_r) = 0, \quad (r = 1, 2, \dots, m) \quad (1.1)$$

$$\bar{q}_r = \lambda, \text{grad } f_r(\underline{Q}_r) = 0, \quad (r = 1, 2, \dots, m) \quad (1.2)$$

Предположим, что результирующая структура (композиция) характеризуется в том же n -мерном пространстве обобщенным вектором

$$\bar{Q} = t_1 \bar{Q}_1 + t_2 \bar{Q}_2 + \dots + t_m \bar{Q}_m, t_i = \text{const} > 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (1.3)$$

Соотношение (1.3) весьма часто получается при рассмотрении конкретных задач вследствие использования принципа суперпозиции сил (напряжений).

Предположим также, что все структуры S_r между собой связаны, таким образом, что деформация композиции возможна лишь при

$$\bar{q}_1 = \bar{q}_2 = \bar{q}_3 = \dots = \bar{q}_m \quad (1.4)$$

Предельные функции (1.1) в пространстве E^n определяют выпуклые поверхности текучести, а условие

$$f_r(\bar{Q}) \leq 0 \quad (1.5)$$

выпуклое множество (тело) A , точек \bar{Q}_r в пространстве E^n . При этом под выпуклым множеством будем понимать [4] множество A_r , которое наряду со своими двумя произвольными точками $\bar{Q}'_r \in A_r, \bar{Q}''_r \in A_r$ содержит и все точки

$$\bar{Q}_r = (1 - \rho)\bar{Q}'_r + \rho\bar{Q}''_r, \quad (0 \leq \rho \leq 1) \quad (1.6)$$

В этом случае линейное соотношение (1.3) при условии (1.5) определяет в пространстве E^n результирующее выпуклое множество A , определяемое некоторой функцией

$$f(\bar{Q}) \leq 0 \quad (1.7)$$

Справедлива следующая теорема: Дискретное множество m точек \underline{Q}_r ($r = 1, 2, \dots, m$) в E^n образует посредством (1.3) при условии (1.5) граничную точку результирующего множества A в том, и только в том случае, если эти точки удовлетворяют условиям

$$f_r(\bar{Q}_r) = 0, \quad (r = 1, 2, \dots, m) \quad (1.8)$$

и опорные плоскости множеств A_r в соответствующих точках \underline{Q}_r ($r = 1, 2, \dots, m$) параллельны и одинаково направлены. Опорная плоскость выпуклого тела есть плоскость, разделяющая пространство E^n на два полупространства, проходящая через граничную точку тела таким образом, что все тело заключено в одном из полупространств. При этом направление опорной плоскости будем характеризовать единичным вектором, ортогональным к опорной плоскости и направленным в полупространство, не содержащее рассматриваемое тело. Доказательство изложенной теоремы для $m = 2$ и $n = 2$ можно найти в [5], ко-

торое можно распространить на произвольные конечные m и n . Из доказательства изложенной теоремы следует также [5], что опорная плоскость результирующего выпуклого тела в точке \bar{Q} параллельна опорным плоскостям исходных выпуклых тел A_r в соответствующих точках \bar{Q}_r и одинаково направлена с ними. Термин «в соответствующих точках» означает, что граничные точки \bar{Q}_r ($r = 1, 2, \dots, m$) и граничная точка \bar{Q} связаны соотношением (1.3).

В случае регулярных поверхностей текучести соотношение (1.2) задает поле внешних нормалей на поверхности $f_r(\bar{Q}_r) = 0$, а опорные плоскости совпадают с касательными плоскостями. Тогда из изложенного непосредственно следует справедливость (1.4) и

$$\bar{q}_r = \lambda_r \text{grad } f(\bar{Q}) = \bar{q}_r, \quad (r = 1, 2, \dots, m) \quad (1.9)$$

Если условия текучести исходных субструктур определяют сингулярные поверхности текучести, то ассоциированный закон пластического течения можно записать

$$\bar{q}_r^{(k)} = \sum_k \lambda_r^{(k)} \text{grad } f_r^{(k)}(\bar{Q}_r), \quad (r = 1, 2, \dots, m) \quad (1.2)$$

В этом случае (1.3) будет также определять выпуклое множество A , определяемое неравенствами

$$f^{(k)}(\bar{Q}) \leq 0, \quad (k = 1, 2, \dots, l) \quad (1.7)$$

а соотношение, аналогичное (1.9), запишется

$$\bar{q}_k = \sum_k \lambda^{(k)} \text{grad } f^{(k)}(\bar{Q}) \quad (1.9)$$

Предположим, $m = 2, t_1 = t_2 = 1$. Из (1.2), (1.4) следует

$$\frac{\partial f_1}{\partial Q_1} = p \frac{\partial f_2}{\partial Q_2}, \quad p = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \quad (1.10)$$

Из (1.1) и (1.3) получим

$$f_1(Q - Q_2) = 0, \quad f_2(Q_2) = 0 \quad (1.11)$$

Соотношения (1.10), (1.11) совпадают с соотношениями (14), (15) в работе [2] и определяют предельную поверхность текучести композиции субструктур S_1 и S_2 . Правило построения результирующей поверхности текучести при некоторых m и n определяется следующей системой соотношений

$$\begin{aligned} f_r(\bar{Q}_r) = 0, \quad \bar{Q} = \sum_{r=1}^m t_r \bar{Q}_r \quad (r = 1, 2, \dots, m) \\ \lambda_1 \text{grad } f_1(\bar{Q}_1) = \lambda_2 \text{grad } f_2(\bar{Q}_2) \\ \dots \dots \dots \\ \lambda_{m-1} \text{grad } f_{m-1}(\bar{Q}_{m-1}) = \lambda_m \text{grad } f_m(\bar{Q}_m) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Последние $(m-1)+1 = m$ векторных соотношений в (1.12) представляют собой m векторных (или $m \cdot n$ скалярных) уравнений относительно m векторов ($m \cdot n$ компонент векторов) \bar{Q}_r , которые можно выразить через вектор (компоненты вектора) \bar{Q} и $(m-1)$ скалярных множителей типа $p_r = \frac{\lambda_{r+1}}{\lambda_r}$.

Подставляя полученные выражения \bar{Q}_r (компонент \bar{Q}_r) через \bar{Q} (компоненты \bar{Q}) и множители p_r ($v = 1, 2, 3, \dots, m-1$) в первые m соотношений (1.12), получим систему

$$f_r(\bar{Q}, \lambda_r) = 0, \quad (r = 1, 2, \dots, m; v = 1, 2, \dots, m-1)$$

из которой определяются скалярные множители p_r и результирующая функция текучести $f(\bar{Q}) = 0$. Закон течения для композиции субструктур при этом выражается согласно (1.9).

В случае сингулярных поверхностей текучести $f_r^{(k_r)}(\bar{Q}_r) = 0$ ($k_r = 1, 2, \dots, l_r$) процедура нахождения результирующей поверхности текучести повторяется для различных комбинаций r функций текучести $f_r^{(k_r)}(\bar{Q}_r) = 0$, причем решение будет иметь место лишь для тех комбинаций функций, для которых имеются точки, в которых выполняется (1.4). Результирующий закон течения при этом берется согласно (1.9).

В некоторых случаях процедуру решения, можно упростить, представив (1.3) как

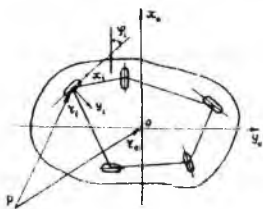
$$\bar{Q}^{(1)} = t_1 \bar{Q}_1 + t_2 \bar{Q}_2, \quad \bar{Q}^{(2)} = \bar{Q}^{(1)} + t_3 \bar{Q}_3, \dots, \bar{Q} = \bar{Q}^{(m-1)} + t_m \bar{Q}_m$$

и решая задачу последовательно. Соотношения (1.12) позволяют в некоторых случаях для $n \leq 3$ непосредственно геометрически построить результирующую поверхность текучести.

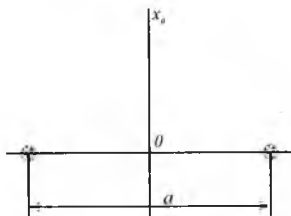
2. Следуя работе [6], рассмотрим плоскую задачу установившегося движения экипажа, содержащего систему из n опор и находящегося под действием внешних сил и моментов, а также сил и моментов реакций связей на опорах \bar{Q}_i, \bar{M}_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Допустим, что взаимная ориентация всех опор экипажа жестко фиксирована. Выберем некоторую систему координат $Ox_0y_0z_0$ (фиг. 1), связанную с экипажем.

Приводя систему реакций связей к точке O выбранной системы координат, получим

$$\bar{Q} = \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 + \dots + \bar{Q}_n, \quad \bar{M} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n \quad (2.1)$$



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Полагая экипаж движущимся, из условия кинематики следует, что скорости опор должны удовлетворять системе уравнений

$$\bar{q}_i - \bar{q}_0 = \bar{\omega} \times \bar{r}_i \quad (2.2)$$

где: \bar{q}_i, \bar{q}_0 - скорости i -ой опоры и точки экипажа, совпадающей с началом координат системы $Ox_0y_0z_0$.

$\bar{\omega}(0, 0, \omega_z)$ - угловая скорость движения экипажа.

Предположим фиксированным в процессе движения некоторое распределение вертикальных компонент реакций связей Q_{iz} , причем такое распределение, что компоненты

M_{x_0}, M_{y_0} момента M равны нулю. Плоскость X_0OY_0 предполагается совпадающей с плоскостью движения.

Перепишем соотношения (2.1) в безразмерном виде

$$C_{x_0} = \sum t_i C_{ix_0}, \quad C_{y_0} = \sum t_i C_{iy_0}, \quad m_{z_0} = \sum t_i m_{iz_0}, \quad \sum t_i = 1 \quad (2.3)$$

где приняты следующие обозначения

$$C_{ix_0} = \frac{Q_{ix_0}}{kQ_{iz_0}}, \quad C_{iy_0} = \frac{Q_{iy_0}}{kQ_{iz_0}}, \quad t_i = \frac{Q_{iz_0}}{Q_{z_0}}, \quad C_{x_0} = \frac{Q_{x_0}}{kQ_{z_0}},$$

$$C_{y_0} = \frac{Q_{y_0}}{kQ_{z_0}}, \quad m_{z_0} = \frac{M_{z_0}}{kQ_{z_0} \cdot a}, \quad m_{iz_0} = \frac{M_{iz_0}}{kQ_{iz_0} \cdot a},$$

a - некоторая характерная длина; k' - коэффициент трения в точках контакта опор с плоскостью движения, одинаковый для всех опор. Согласно [5], каждая опора экипажа характеризуется в пространстве обобщенных сил некоторой предельной поверхностью нагружения, которой соответствует функция нагружения

$$f_i(\bar{C}_i, \eta_i) = 0 \quad (2.4)$$

Свойства функции нагружения (2.4) аналогичны свойствам функций нагружения в общей теории пластичности [6]. Справедлив также ассоциированный закон квазипластического движения опоры

$$\bar{q}_i = \lambda \text{grad } f(\bar{C}_i, \eta_i) \quad (2.5)$$

В состоянии движения экипажа (системы опор) выполняется одно из трех условий:

$$(\bar{q}_0 = 0, \omega_{z_0} \neq 0), \quad (\bar{q}_0 = 0, \omega_{z_0} = 0), \quad (\bar{q}_0 \neq 0, \omega_{z_0} = 0) \quad (2.6)$$

Условия (2.6) можно записать кратко

$$\bar{q}_0 \neq 0 \quad (2.7)$$

если принять, что обобщенный вектор скорости экипажа \bar{q}_0 в трехмерном пространстве скоростей имеет компоненты $\dot{q}_{x_0}, \dot{q}_{y_0}, \omega_{z_0}$. Соответствующий обобщенный вектор силы в трехмерном пространстве сил $C_{x_0}, C_{y_0}, m_{z_0}$ будем в дальнейшем обозначать \bar{C}_0 . Под скоростью i -ой опоры \bar{q}_i , с компонентами $\dot{q}_{ix_0}, \dot{q}_{iy_0}, \omega_{iz_0}$ будем подразумевать скорость некоторого элемента i -ой опоры, центр которого совпадает с началом координат системы $OX_0Y_0Z_0$ и полученного мысленным продолжением этой опоры. Тогда соотношения (2.2) будут эквивалентны условиям (1.4).

Таким образом, соотношения (2.3) при условиях (2.4) и (2.5) согласно п.1 определяют некоторую результирующую поверхность нагружения экипажа и ассоциированный закон квазипластического движения.

В качестве примера рассмотрим построение результирующей поверхности нагружения экипажа с двумя опорами (фиг. 2), каждая из которых описывается обобщенной моделью элемента сухого трения

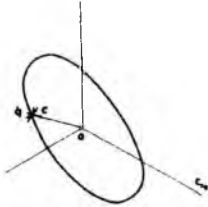
$$f_i = \begin{cases} f_i^{(1)} = C_{ix_0}^2 + C_{iy_0}^2 - 1 = 0 \\ f_i^{(2)} = \left(m_{iz_0} - C_{ix_0} \frac{y_{0i}}{a} \right) \text{sign } \omega_{iz_0} \end{cases} \quad (2.8)$$

где: y_{oi} - координата i -ой опоры;

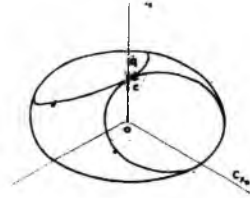
a - расстояние между опорами.

Для $i=2$ поверхность нагружения $f_2=0$ показана на фиг. 3.

Эта поверхность образована пересечением цилиндрической поверхности $f_2^{(1)} = 0$ и двумя совмещенными плоскостями $f_2^{(2)} = 0$. Из ассоциированного закона движения следует



Фиг. 3.



Фиг. 4.

$$\begin{aligned} \dot{q}_{ix_0}^{(1)} &= \lambda_7^{(1)} 2C_{ix_0}, \quad \dot{q}_{iy_0}^{(1)} = \lambda_7^{(1)} 2C_{iy_0}, \quad \omega_{iz_0}^{(1)} = 0 \\ \dot{q}_{ix_0}^{(2)} &= \lambda_7^{(2)} \frac{y_{oi}}{a} \text{sign } \omega_{iz_0}, \quad \dot{q}_{iy_0}^{(2)} = 0, \quad \omega_{iz_0}^{(2)} = \lambda_7^{(2)} \text{sign } \omega_{iz_0} \end{aligned} \quad (2.9)$$

На фиг.4 показана результирующая поверхность нагружения $f(\bar{C}) = 0$ построенная согласно следующей системе соотношений

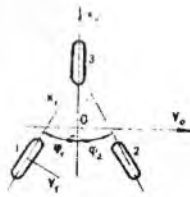
$$\begin{aligned} \bar{C} &= t_1 \bar{C}_1 + t_2 \bar{C}_2, \quad t_1 + t_2 = 1, \quad t_1 = \frac{1}{2} \\ f_i(\bar{C}_i) &= 0, \quad \bar{q}_i = \lambda_i \text{grad } f_i \quad (i=1,2) \\ f(C) &= 0, \quad \bar{q} = \lambda \text{grad } f, \quad \bar{q}_i = \bar{q}_2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Эта поверхность представляет собой поверхность эллипсоида вращения с осью Om_{z_0} , усеченного двумя парами плоскостей, параллельных оси OC_{y_0} . На фиг. 4 показана только часть поверхности нагружения, соответствующая $m_{z_0} < 0$.

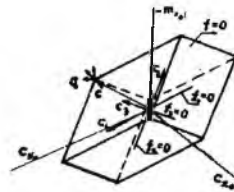
На фиг. 6 показано построение поверхности нагружения для экипажа (фиг. 5) с тремя незаторможенными колесами, каждое из которых характеризуется следующей функцией нагружения

$$f_i = \begin{cases} f_i^{(1)} = C_{ix_0}^2 + C_{iy_0}^2 - 1 = 0, \quad (i=1,2,3) \\ f_i^{(2)} = (C_{ix_0} \cos \varphi_i + C_{iy_0} \sin \varphi_i) \text{sign } \omega_{yi} \\ f_i^{(3)} = \left(m_{iz_0} - C_{ix_0} \frac{y_{oi}}{a} + C_{iy_0} \frac{x_{oi}}{a} \right) \text{sign } \omega_{iz_0} \end{cases} \quad (2.11)$$

где: ω_{yi} - угловая скорость вращения i -ого колеса вокруг своей оси; φ_i - угол между плоскостью i -ого колеса и плоскостью $X_{ii}OY_0$ (фиг. 5); a - некоторая длина.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

3. Рассмотрим сплошное тело, состоящее из изотропного материала (связующего) с внедренной в него упорядоченной пространственной сетью одномерных нитей. Предположим, что материалы нитей и связующего являются жестко-пластическими и идеальными, а пределы пластичности в общем случае различны для различных нитей и связующего. Число нитей достаточно велико, так что весь материал можно считать квазиоднородным. Промаскивание между связующим и нитями отсутствует. Локальными эффектами вблизи нитей будем пренебрегать. Предположим, что нить, внедренная в связующий материал, способна выдерживать как растягивающую, так и сжимающую силу. Тогда в общем случае напряжение в сплошном теле можно представить как некоторую линейную комбинацию напряжений в связующем и нитях

$$\sigma_{ij} = t_0 \sigma_{ij}^0 + \sum_k t_k \sigma_{ij}^{(k)} \quad (3.1)$$

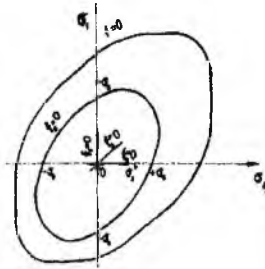
где t_0, t_k - положительные постоянные параметры, зависящие от процентного содержания нитей в материале. Если принять фиксированной некоторую систему координат в материале, то

$$\sigma_{ij}^{(k)} = \sigma_k l_{ik} l_{jk}$$

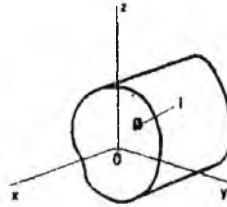
где: l_{ik} - направляющие косинусы для k -ой нити; σ_k - напряжение в k -ой нити.

В пространстве напряжений условие пластичности для нити, внедренной в связующее, можно представить отрезком прямой, проходящим через начало координат. Принимая некоторое условие пластичности, например, условие Мизеса, для материала связующего, в соответствии с правилом (3.1) можно построить условие пластичности для рассматриваемого структурного тела. Согласно п.1, поверхность тела в пространстве напряжений, построенного на основании (3.1), будет выпуклой, и имеет место ассоциированный с результирующей поверхностью нагружения закон пластического течения, если этот закон справедлив для исходных поверхностей текучести связующего и нитей. Предположим, что оси координат совпадают с главными направлениями тензора σ_{ij} . Тогда для фиксированных направляющих косинусов l_{ik} и случая плоского напряженного состояния, при условии пластичности Мизеса для связующего материала, и трех ориентации нитей на фиг. 7 показан пример построения результирующей поверхности текучести. Для удобства построения масштаб исходных поверхностей текучести связующего и нитей и результирующей поверхности текучести принят различным. В частности, аналогичным построением можно получить предельную поверхность нагружения для материала типа фанеры, у которого волокна (нити) расположены взаимно ортогонально, а материал связующего подчиняется не-

которому условию, например, Мизеса. Пример на фиг. 7 качественно совпадает с результатами работы [7], где рассматривалось условие пластичности армированного слоя с учетом аналогичных предположений.



Фиг. 7



Фиг. 8

В заключение укажем на возможность построения предельных поверхностей текучести для сечений макротел, следуя процедуре п. 1, например, сечения идеальной жестко-пластической балки (фиг. 8). Силовую реакцию в сечении можно представить как сумму силовой реакции отдельных площадок, на которые можно разбить сечение.

Тогда соответствующие результирующие усилия и моменты запишутся (все площадки имеют единичную площадь)

$$\begin{aligned} N_x &= \sum_i \sigma_{xx}^{(i)}, \quad N_y = \sum_i \sigma_{yy}^{(i)}, \quad N_z = \sum_i \sigma_{zz}^{(i)} \\ M_x &= \sum_i (\sigma_{yy}^{(i)} y_i - \sigma_{yy}^{(i)} z_i), \quad M_y = \sum_i \sigma_{xx}^{(i)} z_i, \quad M_z = \sum_i \sigma_{xx}^{(i)} y_i \end{aligned} \quad (3.2)$$

В безразмерном виде соотношения (3.2) можно записать

$$\begin{aligned} C_x &= \sum_i t_i C_x^{(i)}, \quad C_y = \sum_i t_i C_y^{(i)}, \quad C_z = \sum_i t_i C_z^{(i)}, \\ m_x &= \sum_i t_i m_x^{(i)}, \quad m_y = \sum_i t_i m_y^{(i)}, \quad m_z = \sum_i t_i m_z^{(i)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

где t_i - постоянные, возникшие вследствие того, что при переходе к безразмерным величинам компоненты обобщенных векторов $\bar{C}(C_x, C_y, C_z, m_x, m_y, m_z)$ и $\bar{C}^{(i)}(C_x^{(i)}, C_y^{(i)}, C_z^{(i)}, m_x^{(i)}, m_y^{(i)}, m_z^{(i)})$ шестимерного пространства обобщенных сил могут быть отнесены к различным константам.

Если существует поверхность текучести $f_i(C_x^{(i)}, C_y^{(i)}, C_z^{(i)}) = 0$ в трехмерном пространстве сил (C_x, C_y, C_z) , то это условие в шестимерном пространстве обобщенных сил с учетом (3.2) можно записать

$$f_i = \begin{cases} f_i^{(1)}(C_x^{(i)}, C_y^{(i)}, C_z^{(i)}) = 0, & f_i^{(2)} = m_x^{(i)} - a_i C_z^{(i)} + b_i C_y^{(i)} = 0 \\ f_i^{(3)} = m_y^{(i)} - d_i C_x^{(i)} = 0, & f_i^{(4)} = m_z^{(i)} - k_i C_x^{(i)} = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

где a, b, d, k - постоянные величины.

Соотношения (3.3) при условии (3.4) и условии, аналогичном (1.4), определяют предельную поверхность пластичности для сечения идеальной жестко-пластической балки

$$f(C_x, C_y, C_z, m_x, m_y, m_z) = 0$$

Авторы выражают глубокую благодарность профессору Д.Д. Ивлеву за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И. Теория упрочняющегося пластического тела. "Наука", 1971.
2. Работнов Ю.Н. Уруго-пластическое состояние композитной структуры. Сб. "Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды". К 60-летию акад. Л.И. Седова, "Наука", 1969.
3. Бережной И.А., Дейлер В.И. О построении функций нагружения для квази-пластической модели группы колес и результаты некоторых опытов. ИАН СССР МТТ, (в печати), 1973.
4. Райков Д.А. Векторные пространства. Физматгиз, 1962.
5. Бляшке В. Круг и шар. "Наука", 1967.
6. Бережной И.А. Некоторые общие вопросы теории пластичности и ее приложение в квазипластических задачах движения колеса по поверхности с трением. Диссертация д.ф.-м.н., Киев, 1970.
7. Немировский Ю.В. Об условии пластичности (прочности) для армированного слоя. ПМТФ, №5, 1969.

О ФУНКЦИИ НАГРУЖЕНИЯ ДЛЯ ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ¹

Бережной И. А., Ивлев Д. Д., Цейлер В. И.

(Куйбышев, Авиационный институт;

Москва, Всесоюзный заочный политехнический институт)

Вводится модель идеально пластического тела, функция текучести которого получается как характеристика семейства мгновенных поверхностей нагружения. Модель иллюстрируется примером.

§ 1. Модель идеально пластического тела

В теории упрочняющегося пластического тела [1] вводится понятие функции нагружения $f(\sigma_{ij}, e_{ij}^p, \chi_i, k_i) = 0$, которая зависит, в частности, от системы параметров упрочнения χ_i , относительно которых предполагается, что они зависят от истории нагружения, данных значений напряжений и пластических деформаций, но не зависят от скорости из-

¹ Избранные проблемы прикладной механики. 1974 г.

менения напряжений σ_{ij} . При этом приращения параметров χ_k не зависят от приращений напряжений и записываются, например, в виде

$$d\chi_k = A_{ij}^{(k)} de_{ij}^p.$$

Рассмотрим для идеально пластического тела класс функций нагружения, сопоставляющих с пластическим потенциалом, соответствующие поверхности нагружения которых не фиксированы в пространстве напряжений и зависят от действующего значения вектора напряжений. Предположим, что состояние идеально пластического тела определяется в пространстве напряжений вектором напряжений $\vec{\sigma}$ и системой параметров m_k . Относительно параметров m_k будем предполагать, что они зависят от компонент σ_{ij} и не зависят от тензора пластических деформаций e_{ij}^p , т. е.

$$m_k = m_k(\sigma_{ij}), dm_k = \frac{\partial m_k}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}. \quad (1.1)$$

Предельное состояние тела будем характеризовать функцией нагружения

$$f(\sigma_{ij}, m_k) = 0, \quad (1.2)$$

С учетом (1.1) выражение (1.2) можно было бы записать в виде некоторой функции лишь компонент тензора σ_{ij} , но такая запись не отражала бы принципиально различного влияния, которое оказывают изменения σ_{ij} и m_k на состояние пластического тела. Тензор σ_{ij} характеризует напряженное состояние в локальной точке тела, а его приращение $d\sigma_{ij}$ может совершать работу на пластических деформациях. Параметры m_k могут отражать некоторую внутреннюю структуру или физические свойства среды, которые зависят от напряженного состояния, а приращения dm_k непосредственно не могут совершать работу на пластических деформациях. Параметры m_k в общем случае могут быть скалярами или тензорами.

Следуя работе [2], определим мгновенный путь нагружения, как путь в девятимерном пространстве напряжений, при котором параметры m_k в (1.2) остаются неизменными, т. е.

$$dm_k = 0. \quad (1.3)$$

Определим также мгновенную поверхность нагружения: если в некоторый момент времени параметры состояния принимают значение $\sigma_{ij}^{(a)}, m_k^{(a)}$ такие, что $f(\sigma_{ij}^{(a)}, m_k^{(a)}) < 0$, то идеально пластическая среда находится в упругом (жестком) состоянии и $f(\sigma_{ij}^{(a)}, m_k^{(a)}) = 0$ будет называться мгновенной поверхностью нагружения, соответствующей значениям $m_k^{(a)} = const$. Термины «мгновенный путь нагружения» в «мгновенная поверхность нагружения», учитывая соотношения (1.1), не обязательно связаны с понятием времени и отражают лишь требование неизменности параметров m_k . В более общем случае зависимости параметров m_k от вязко-упругих и других временных эффектов эти термины совпадают с введенными в работе [2] понятиями.

Предполагая, что в результате некоторого мгновенного пути нагружения среда переходит из состояния $A(\sigma_y^{(c)}, m_k^{(c)})$ в состояние $C(\sigma_y^{(c)}, m_k^{(c)})$, при котором возникло пластическое течение. Тогда функция

$$f(\sigma_y, m_k^{(c)}) = 0 \quad (1.4)$$

будет представлять полное семейство мгновенных поверхностей нагружения, зависящее от $m_k^{(c)}$. Выражение (1.4) с учетом (1.1) можно еще записать

$$f[\sigma_y, m_k^{(c)}(\sigma_y^{(c)})] = f_1(\sigma_y, \sigma_y^{(c)}) = 0 \quad (1.5)$$

где $\sigma_y^{(c)}$ — параметры.

В дальнейшем вместо $f_1(\sigma_y, \sigma_y^{(c)})$ будем писать $f(\sigma_y, \sigma_y^{(c)})$. Полагая в (1.5) $\sigma_y = \sigma_y^{(c)}$, получим некоторую фиксированную в пространстве напряжений поверхность, выражающую условие текучести идеального пластического тела

$$f(\sigma_y, \sigma_y^{(c)})|_{\sigma_y = \sigma_y^{(c)}} = \varphi(\sigma_y^{(c)}) = 0. \quad (1.6)$$

Поверхность (1.6) будем в дальнейшем называть характеристикой семейства мгновенных поверхностей нагружения (1.4). Следуя [1], для мгновенной функции нагружения (1.4) запишем условия разгрузки, нейтрального и активного нагружения:

$$de_y^p = 0, dm_k = 0, df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} d\sigma_y < 0, \quad (1.7)$$

$$de_y^p = 0, dm_k = 0, f = 0, df = 0, d'f = 0, \quad (1.8)$$

$$de_y^p = 0, dm_k \neq 0, f = 0, df = 0, d'f > 0, \quad (1.9)$$

где

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} d\sigma_y + \frac{\partial f}{\partial m_k} dm_k.$$

Условия разгрузки, нейтрального нагружения и активного нагружения можно сформулировать, используя характеристику $\varphi(\sigma_y) = 0$:

$$de_y^p = 0, \varphi(\sigma_y) = 0, d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_y} d\sigma_y < 0, \quad (1.7)$$

$$de_y^p = 0, \varphi = 0, d\varphi = 0, \quad (1.8)$$

$$de_y^p = 0, \varphi = 0, d\varphi > 0. \quad (1.9)$$

Условия (1.7)—(1.9) и условия (1.7)—(1.9) очевидно не эквивалентны. Например, условие нейтрального нагружения (1.8) требует неизменности некоторой внутренней структуры или физических свойств, выражаемых условием $dm_k = 0$, тогда как условие (1.8') требует, чтобы приращения напряжений и деформаций при нейтральном нагружении были связаны законом Гука (в случае упруго-пластического тела), а параметры m_k могут изменяться некоторым образом.

Принцип максимума Мизеса [1] эквивалентен нахождению экстремума величины

$$D = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^p - \lambda f(\sigma_{ij}, m_k^{(c)}), \quad (1.10)$$

где при варьировании компонент σ_{ij} параметры $m_k^{(c)}$ должны быть фиксированы. Из (1.10) и условия

$$\left. \frac{\partial D}{\partial \sigma_{ij}} \right|_{m_k^{(c)} = \text{const}} = 0$$

следует ассоциированный закон пластического течения

$$\varepsilon_{ij}^p = \lambda \left. \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right|_{m_k^{(c)} = \text{const}}$$

С учетом того, что пластическое течение наступает при условии (1.6), ассоциированный закон пластического течения может быть переписан в следующей форме

$$\varepsilon_{ij}^p = \lambda \text{grad} f(\sigma, \sigma^{(c)}) \Big|_{\sigma = \sigma^{(c)}} \quad (1.11)$$

Из принципа максимума следует также выпуклость мгновенной поверхности нагружения $f(\sigma, \sigma^{(c)}) = 0$. Векторное поле (1.11), заданное на поверхности текучести (характеристике) $\varphi(\sigma) = 0$, в общем случае не ортогонально этой поверхности.

Отметим, что в качестве функции нагружения при данной характеристике $\varphi(\sigma) = 0$ может быть взята

$$f(\sigma_{ij}, \sigma_{ij}^{(c)}) = \varphi(\sigma_{ij}) + F(\sigma_{ij}^{(c)})(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(c)}) = 0, \quad (1.12)$$

где $F(\sigma_{ij}^{(c)})$ — некоторая заданная функция.

Тогда определяющее соотношение (1.11) будет иметь вид

$$\varepsilon_{ij}^p = \lambda \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} + F(\sigma_{ij}^{(c)}) \right] \Big|_{\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(c)}}$$

Функция нагружения (1.12) является обобщением функции нагружения для двумерной квазипластической модели, введенной в работе [3].

§ 2. Пример

Рассмотрим условие текучести

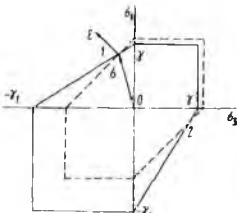
$$|\sigma_1 - \sigma_2| = k - k_1 \sigma, \sigma_2 \equiv 0, \quad (2.1)$$

где $\sigma_i (i = 1, 2, 3)$ — главные напряжения; σ — среднее давление; k, k_1 — постоянные материала.

Предположим $\varepsilon_{ij}^p = 0$, т. е. материал пластически несжимаем. Тогда семейство мгновенных поверхностей нагружения будет определяться выражением

$$|\sigma_1 - \sigma_3| - k + k_1 \sigma^{(c)} = 0, \quad (2.2)$$

где $\sigma^{(c)}$ — среднее давление.



Фиг. 1

На фиг. 1 пунктиром показана мгновенная поверхность нагружения для некоторого $\sigma^{(c)} = const$, а сплошной линией условие текучести (характеристика) (2.1). При этом приняты следующие обозначения $\gamma = \frac{3k}{3+k_1}$, $\gamma_1 = \frac{3k}{3-k_1}$. Действительное напряженное состояние на пределе текучести при заданном $\sigma^{(c)} = const$ соответствует двум точкам 1 и 2 на фиг. 1, в которых вектор скорости пластических деформаций ортогонален мгновенной поверхности нагружения (2.2).

Рассмотренный пример предполагает зависимость условия текучести идеально пластического материала от первого инварианта тензора напряжений, а также отсутствие «ассоциированной» сжимаемости [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И. Теория упрочняющегося пластического тела. М^н «Наука», 1971.
2. Naghdi P. M., Murc h S. A. On the mechanical behavior of visco-elastic-plastic solids. Trans. ASME, 1963, vol. E30, № 3, pp. 3—11.
3. Бережной И. А. О применении функции нагружения в некоторых задачах движения экипажа. Инженерный ж. Мех. тверд. тела, 1967, № 5, стр. 47—49.

О ФУНКЦИИ АНИЗОТРОПИИ ДВУМЕРНЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ¹

И.А.Бережной, В.И.Цейлер

Общие свойства функции анизотропии, ее связь с функцией нагружения, а также приложение ее к механике неголономных опор экипажей даны в работах [1,5], [6], [7]. В данной работе рассматриваются некоторые дополнительные свойства функции анизотропии, в частности, для квазипластической модели колеса с упругой шиной, движущегося по поверхности с трением. Сохраняя аэродинамическую аналогии и следуя работе [5] функции анизотропии для колеса будем называть полярной.

Для колеса с упругой шиной функция нагружения может быть записана [4] в следующем виде

$$f(c_{x_0}, c_{y_0}) = \begin{cases} f^{(1)} = c_{x_0}^2 + c_{y_0}^2 - 1 = 0, \\ f^{(2)} = c_{x_0}^2 + \eta \sin \omega_{y_0} + tg(\xi c_{y_0}^*) (c_{y_0} - c_{y_0}^*) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где c_{x_0}, c_{y_0} - компоненты безразмерного вектора силы в связанной с колесом системе координат Ox_0y_0 (фиг.1);

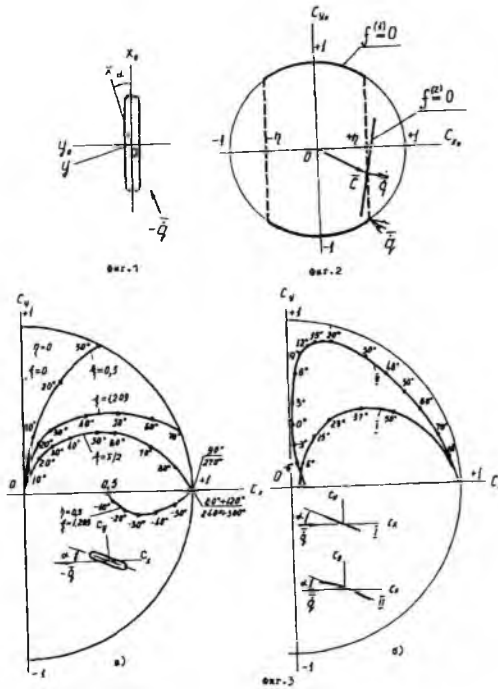
$\eta = const$ - параметр торможения, пропорциональный тормозному моменту на оси колеса;

ω - угловая скорость вращения колеса;

¹ Сибирское отделение АН СССР. Институт гидродинамики. ДИНАМИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ, вып.15, 1975 г.

ω_{y_0} - коэффициент бокового увода;

c_{y_0} - координата точки выхода нагрузки на поверхность нагружения



На фиг.2 показан вид поверхности нагружения (1). Для двумерной модели функции $\varphi(\bar{c})=0$ получается из функции нагружения $f(\bar{c})=0$ посредством следующего преобразования

$$\begin{aligned} c_x &= c_{y_0} \cos \alpha + c_{x_0} \sin \alpha, \\ c_y &= -c_{y_0} \sin \alpha + c_{x_0} \cos \alpha, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{q_{y_0}}{q_{x_0}},$$

где c_x, c_y - компоненты вектора силы \bar{c} в скоростной системе координат Oxy , повернутой на угол атаки « относительно системы Ox_0y_0 ;

q_{x_0}, q_{y_0} - компоненты вектора скорости колеса \bar{q}_{x_0} .

Согласно [3] уравнение поляра для функции $f^{(1)}=0$ записывается в виде

$$c_x = 1, c_y = 0,$$

т.е. круговые участки функции нагружения $f(\bar{c}) = 0$ соответствуют точке поляры с координатами (1;0).

Рассмотрим участок поверхности нагружения $f^{(2)} = 0$ соответствующий $c_{x_0} > 0$, для которого из ассоциированного закона движения и условия (1) следует

$$\begin{aligned} q_{x_0}^{(2)} &= \lambda^{(2)}, q_{y_0}^{(2)} = \lambda^{(2)} \operatorname{tg}(\xi c_{y_0}^*), \\ \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{tg}(\xi c_{y_0}^*), \alpha = \xi c_{y_0} \end{aligned}$$

Принимая в (1) $c_{y_0} = c_{y_0}^*$, получим $c_{x_0} = 0$. Поляру колеса в параметрической форме в соответствии с (2) и с учетом полученных выражений можно записать

$$c_x = \eta \cos \alpha + \frac{\alpha}{\xi} \sin \alpha, c_y = -\eta \sin \alpha + \frac{\alpha}{\xi} \cos \alpha. \quad (3)$$

Для участка поверхности нагружения $f^{(2)} = 0$, соответствующего $c_{x_0} < 0$, с точностью до π поляра совпадает с (5). Наконец, для угловых точек, координаты которых $c_{x_0} = \pm \eta$, $c_{y_0} = \pm \sqrt{1 - \eta^2}$ нетрудно показать, что поляра описывается участком окружности

$$c_{x_0}^2 + c_{y_0}^2 - 1 = 0. \quad (4)$$

На фиг.3а показаны поляры колеса с упругой шиной для различных значений параметров η, ξ . На фиг.3б для сравнения показана аэродинамическая поляра плоской пластины, обтекаемой набегающим потоком газа [2].

Если в угловой точке поверхности нагружения колеса выполняется условие

$$\operatorname{tg}(\xi c_{y_0}^*) = \frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{\eta},$$

то круговой участок поляры (4) исчезает. Для $\eta = 0$, что соответствует незаторможенному колесу, в соотношениях (5) можно исключить параметр α . Уравнение поляры в этом случае записывается

$$c_{x_0}^2 + c_{y_0}^2 = \frac{1}{\xi^2} \operatorname{arctg}^2 \left(\frac{c_x}{c_y} \right)$$

Если принять, что $\xi \ll 1$ и, следовательно, α малы, то уравнения (3) упрощаются

$$c_x - \eta = \frac{\xi c_y^2}{(1 - \eta \xi)^2}.$$

Это уравнение совпадает с уравнением поляры для колеса с упругой шиной, полученной в работе [5], где было принято допущение о малости углов бокового увода.

Замечим, что функция $c_x = c_x(\alpha)$ совпадает с определением опорной функции двуконной выпуклой фигуры относительно точки внутри этой фигуры [5]. Опорная функция в теории выпуклых тел характеризует меру симметрии выпуклого тела. Из рассмотрения свойств функции анизотропии (поляры), изложенных в работах [5],[6],[7], можно заключить, что функция анизотропии зависит от степени симметрии поверхности нагружения, которая в свою очередь зависит от симметрии физических свойств изучаемой системы.

В работе [6] была построена поверхность нагружения для экипажа, содержащего две колесные опоры, путем суммирования поверхностей нагружения для отдельных опор. Для результирующей поверхности нагружения, которая имеет вид ромба справедливым является ассоциированный закон квазипластического движения. Используя линейную комбинацию произвольного конечного числа поверхностей нагружения можно получить модели пластических тел, а также квазипластические модели экипажей, содержащих конечное число опор (колес, лыж и т.д.), при этом на основе простых теорем о линейной комбинации выпуклых тел [9] нетрудно показать выпуклость результирующей поверхности нагружения и справедливость ассоциированного закона пластического течения или квазипластического движения.

Докажем, что полярная линия комбинации поверхностей нагружения есть линейная комбинация полярных исходных поверхностей нагружения.

Ограничимся линейной комбинацией двух поверхностей нагружения

$$\begin{aligned} f_1(c_{x_0}^{(1)}, c_{y_0}^{(1)}) = 0, f_2(c_{x_0}^{(2)}, c_{y_0}^{(2)}) = 0, \\ c_{x_i} = t_1 c_{x_0}^{(1)} + t_2 c_{x_0}^{(2)}, c_{y_i} = t_1 c_{y_0}^{(1)} + t_2 c_{y_0}^{(2)}, \\ t_1 + t_2 = 1, t_1 = const, t_2 = const. \end{aligned} \quad (5)$$

Из теории выпуклых тел [3] известно, что линейная комбинация граничных точек $\bar{c}_1 \in k_1$ и $\bar{c}_2 \in k_2$ есть граничная точка в том случае, если опорные плоскости тел k_1 и k_2 в соответствующих точках \bar{c}_1, \bar{c}_2 параллельны и одинаково направлены. Другими словами нормали к опорным плоскостям тел k_1 и k_2 в соответствующих граничных точках \bar{c}_1 и \bar{c}_2 имеют одинаковое направление. Принимая, что поверхности $f_1=0$ и $f_2=0$ есть граничные поверхности выпуклых тел k_1 и k_2 , и учитывая выражение для ассоциированного закона

$$\bar{q}_i = \lambda \text{grad } f_i, \quad (i = 1, 2)$$

получим с точностью до постоянного множителя

$$\bar{q}_1 = \bar{q}_2 = \bar{q} \quad (6)$$

Из условия (6) и определения угла α в (2) для $0 \leq \alpha \leq \pi$ следует

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha. \quad (7)$$

Подставляя (5) в (2) и преобразуя с учетом (7), получим

$$\begin{aligned} c_{x_i} = t_1 c_{x_0}^{(1)} + t_2 c_{x_0}^{(2)}, \\ c_{y_i} = t_1 c_{y_0}^{(1)} + t_2 const, \end{aligned} \quad (8)$$

где $c_x^{(i)}, c_y^{(i)}$ - компоненты вектора \bar{c}_i ($i = 1, 2$) в скоростной системе координат, удовлетворяющие условию

$$\varphi_i(c_x^{(i)}, c_y^{(i)}) = 0, \quad (i = 1, 2)$$

Соотношения (8) позволяют относительно просто построить полярную линию комбинации функций нагружения.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И. Теория упрочняющегося пластического тела. М., "Наука", 1971.

2. Жуковский Н.Е. Полное собрание сочинений. М., Т.1.ОНТИ НКТП СССР, 1937.
3. Бляшке В. Круг и шар. М., "Наука", 1967.
4. Бережной И.А. О применении функций нагружения в некоторых задачах движения экипажа. Изв.АН СССР, МТТ, 1967, №5
5. Бережной И.А. О некотором инвариантном представлении связи для двумерной модели. Изв.АН СССР, 1968, №5.
6. Бережной И.А. Некоторые общие вопросы теорий пластичности и ее приложение в квазиэластических задачах движения колеса по поверхности с трением. Диссертация на соискание ученой степени д.ф.-м.н. Киев, 1970.
7. Бережной И.А., Игнатьев В.В. О некоторых особенностях преобразования сингулярных функций нагружения. Изв.АН СССР, МТТ, 1969, №5.

О ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ С УПРАВЛЯЕМОЙ ВЯЗКОСТЬЮ¹

И. А. БЕРЕЖНОЙ, Н. В. ГЕРАСИМОВ, Д. Д. ИВЛЕВ, В. И. ЦЕЙЛЕР

Изучение взаимодействия поля с веществом позволяет рассматривать более широкий класс сплошных сред, например, взаимодействие поля со сплошной средой дает возможность рассматривать сплошную среду с управляемыми параметрами. К таким средам можно отнести магнитовязкие жидкости, изучение которых было начато группой Розенвайга⁽¹⁾, электровязкие жидкости⁽²⁾ и т. п.

В настоящей работе обсуждается поведение жидкостей с управляемой вязкостью, находящихся в переменном силовом поле касательных напряжений и переменном магнитном или электрическом поле.

Рассмотрим одномерное течение, например, феррожидкости, представляющей собой мелкодисперсную суспензию ферромагнетиков в жидкой среде. При небольшой концентрации мелкодисперсной металлической фазы течение феррожидкости можно считать ньютоновским⁽³⁾. Не рассматривая магнитного взаимодействия и термодинамических соотношений, полагаем, что напряжения σ в ней пропорциональны скорости деформации

$\dot{\varepsilon}$:

$$\sigma = \mu(H)\dot{\varepsilon}, \quad (1)$$

где вязкость μ является функцией напряженности магнитного поля H .

Пусть действует периодическое силовое поле касательных напряжений

$$\sigma = \sigma_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

когда феррожидкость находится в однородном магнитном поле, напряженность H которого меняется с частотой изменения напряжений силового

$$H = H_0(1 + \lambda \sin \omega t), \quad \lambda \in [0,1] \quad (3)$$

Полагая зависимость вязкости от напряженности линейной и пренебрегая временем релаксации намагниченности жидкости, получим

¹ Доклады Академии наук СССР. МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ, 1975. Том 223, № 3.

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\sigma_0 \sin(\omega t + \varphi)}{\mu_0(1 + \lambda \sin \omega t)} \quad (4)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\varepsilon = \varepsilon(0) + \frac{\sin \varphi}{\lambda} \ln(1 + \lambda \sin \omega t) + \frac{\cos \varphi}{\lambda} \left[\omega t - \frac{2}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \left(\arctg \frac{\operatorname{tg} 0,5 \omega t}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \right) + \arctg \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \right] \quad (5)$$

Фазовые траектории на рис. 1 иллюстрируют поведение феррожидкости, находящейся в переменном магнитном поле (3) при периодическом силовом нагружении (2). Эти фазовые траектории свидетельствуют о наличии постоянной составляющей скорости деформации, величину которой легко определить из (4):

$$\langle \dot{\varepsilon} \rangle = \frac{\sigma_0 \cos \varphi}{\mu_0 \lambda} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \right) \quad (6)$$

Поведение более сложных моделей сплошных сред с переменными определяющими параметрами рассмотрено в работе (4).

Средой с переменной вязкостью в нашем эксперименте служила мелко-дисперсная суспензия ферромагнетиков в керосине с добавлением олеиновой кислоты.

Если такую среду (феррожидкость) поместить в плоскую кювету (см. рис. 2), находящуюся между полюсами электромагнита, и внутри этой

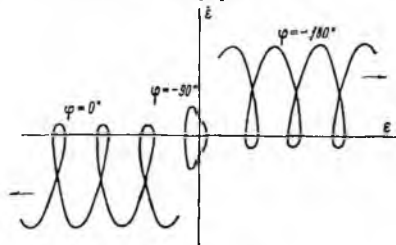


Рис. 1

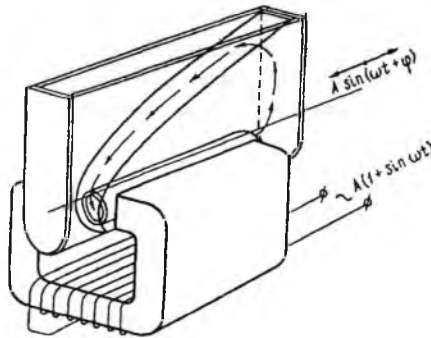


Рис. 2

кюветы установить трубку, совершающую осевое возвратно-поступательное движение, то появление постоянной составляющей скорости (6) можно наблюдать экспериментально.

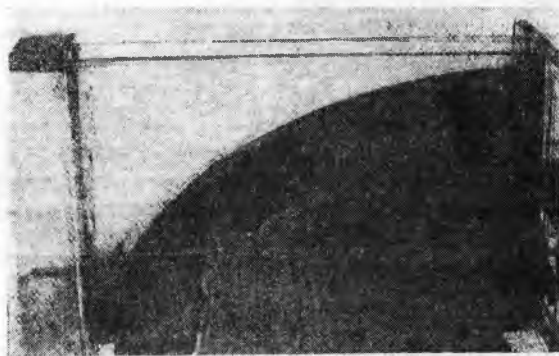


Рис. 5

Наблюдения показали, что при сдвиге фазы $\varphi = 0$ первоначально горизонтальный уровень феррожидкости стал параболическим с вершиной, обращенной влево (см. рис. 3). Изменение уровня вызвано созданием скоростного напора на выходе трубки. Траектория движения феррожидкости показана на рис. 2 стрелками. Фазовому углу $\varphi = 90^\circ$ соответствует горизонтальный уровень жидкости; при установке фазового угла $\varphi = 180^\circ$ наклон уровня меняется на противоположный и соответствует параболе с вершиной, обращенной вправо, аналогично рис. 3.

Качественно экспериментальный результат вполне согласуется с теоретическим. Как следует из (6) при $\varphi = 0$ постоянная составляющая скорости деформации имеет максимальное значение и экспериментальный результат дает максимальный наклон уровня феррожидкости. При $\varphi = 90^\circ$, $\cos \varphi = 0$ постоянная составляющая отсутствует. В эксперименте этому случаю соответствует горизонтальный уровень жидкости. При фазовом сдвиге $\varphi = 180^\circ$ происходит смена знака постоянной составляющей скорости деформации и эксперимент дает смену угла наклона жидкости, причем угол наклона опять максимальный.

Эти эффекты могут быть положены в основу ряда полезных технических приложений, так, например, можно предложить насос для создания управляемого течения магнитно-и электровязких жидкостей (²).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. L. Neitrlnger, L. E. Rosensueig, Phys. Fluids, v. 7, № 12 (1964).
2. D. L. Klass, T. W. Wartinek, J. Appl. Phys., v. 38, № 1 (1967).
3. Ё. Н. Мозговой, 9. Я. Блум, А. О. Цеберс, Магнитная гидродинамика, М 1, 61 (1.973).
4. И. А. Бережной, Н. В. Герасимов, Д. Д. Целее, Мех. Тверд. Тела., № 1, 36 (1974).
5. П. А. Бережной, Л. В. Герасимов, Д. Д. Ивлев, Авт. свид. № 384183 (1973).

О НЕКОТОРЫХ ЭКСПЕРИМЕНТАХ СО СХОДЯЩИМИСЯ КОЛЬЦЕВЫМИ ВОЛНАМИ НА ПОВЕРХНОСТИ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ¹

И. А. БЕРЕЖНОЙ, Д. Д. ИВЛЕВ, Р. Н. ЛОГВИНОВА

В работе (¹) в одном из примеров рассматриваются эффекты, связанные с движением поверхностных кольцевых волн в жидкости к центру. Отмечается трудность аналитического описания этого явления. В связи с этим может оказаться полезным изучение этого процесса на физической модели, позволяющей осуществлять изменение определяющих параметров в довольно широких пределах.

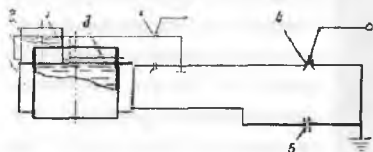


Рис. 1. Принципиальная схема установки для характеристической глубины, наблюдения сходящихся кольцевых волн: 1-соленоид, 2-цилиндрическая кювета,

Устройство для моделирования этого явления представляет собой цилиндрический соленоид, в магнитном поле которого располагается круглая кювета, заполненная проводящей жидкостью. Если на соленоид подать импульс напряжения, то соленоид станет источником аксиального нестационарного магнитного поля, проникновение которого в проводник ограничивается некоторой характеристической глубиной, называемой скин-слоем. Величина скин-слоя зависит от проводимости жидкости.

частоты изменения магнитного поля, магнитной проницаемости проводника и для жидкостей с проводимостью, близкой к проводимости алюминия, меди, при частотах изменения магнитного поля порядка 10^2 — 10^3 Гц составляет 10^{-2} — 10^{-3} м. Диаметр кюветы выбирается таким, чтобы величина скин-слоя была мала по сравнению с ним.

Под действием переменного магнитного поля в скин-слое по закону Фарадея возникает электродвижущая сила и текут азимутальные токи. Взаимодействие этих токов с магнитным полем создает радиальное магнитное давление, сжимающее жидкость. Импульс этого давления будет источником сходящихся волн на поверхности жидкости.

Величиной импульса давления можно влиять на характеристики волнового процесса. Кроме того, обеспечивая длительность электрических процессов на один — два порядка меньше длительности механических процессов в жидкости, можно считать, что движение в жидкости определяется только инерционными, вязкими, гравитационными и капиллярными силами.

Устройство, на котором получены приводимые ниже результаты, состоит из круговой цилиндрической кюветы, помещенной в поле короткого цилиндрического соленоида (рис. 1). Кювета, выполненная из диэлектрика, заполнена жидким металлом, в качестве которого использован эвтектический сплав галлий—индий—олово с температурой плавления $10,5^\circ\text{C}$,

¹ Доклады Академии наук СССР, ГИДРОМЕХАНИКА, 1975. Том 223. № 4



проводимостью $3,4 \cdot 10^6 \text{ ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$, плотностью $6,41 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$ и кинематической вязкостью $0,27 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 \cdot \text{сек}^{-1}$.

Для создания импульсного магнитного поля использовали разряд конденсатора ИМ-140-5 через соленоид с помощью управляемого разрядника. Характеристики электрической цепи подобраны таким образом, чтобы обеспечить колебательный затухающий процесс с частотой порядка $2 \cdot 10^3$ Гц, что обеспечивает длительность электрического процесса не более $1,5 \cdot 10^{-3}$ сек. Индуктивность соленоида со-

ставляет $4 \cdot 10^{-5}$ гн, емкость конденсатора 140 мкф. Конденсатор заряжается от высоковольтного источника (в схеме не показан) в пределах от 100 В до 1000 В, что соответствует запасенной энергии от 0,7 дж до 70 дж.

В процессе эксперимента напряженность магнитного поля меняли от $1 \cdot 10^4$ до $1 \cdot 10^5 \text{ а} \cdot \text{м}^{-1}$, что соответствовало изменению давления радиального сжатия жидкости от $8 \cdot 10$ до $8 \cdot 10^5 \text{ н} \cdot \text{м}^{-2}$. Процесс распространения возмущения на поверхности регистрировали с помощью скоростной кинокамеры "Киев-16У". Обработка кинограмм процесса показала, что длительность распространения возмущения от периферии к центру для различных импульсов давления колеблется от $1 \cdot 10^{-1}$ сек. до $1,5 \cdot 10^{-2}$ сек., что значительно превышает длительность существования магнитного поля в соленоиде. Замечено, что скорость распространения сходящихся волн растет с увеличением импульса давления.

Первоначально круговая волна возмущения принимает многоугольную форму, что аналогично гидромагнитной неустойчивости Рэлея — Тейлора для сходящихся цилиндрических оболочек (²). На рис. 2 приведена фотография, где зафиксировано распространение возмущения на поверхности жидкости при магнитном давлении $7 \cdot 10^2 \text{ н} \cdot \text{м}^{-2}$. Сходящиеся волны имеют ярко выраженную пятиугольную форму (рис. 2, см. вкл. к стр. 842).

Перед гребнем волны просматривается серия более мелких концентрических волн такой же формы. Высота волн при приближении к центру нарастает и дает всплеск по высоте, в несколько раз превышающей начальную высоту волны. При давлении магнитного поля $5 \cdot 10^3 \text{ н} \cdot \text{м}^{-2}$ максимальная высота всплеска составляет $13 \cdot 10^{-2} \text{ м}$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Лаврентьев, В. Б. Шабат, Проблемы гидродинамики и их математические модели, М., 1973.
2. Г. Кнопфель, Сверхсильные импульсные магнитные поля, М., 1972.

ОБ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ НЕРАВЕНСТВАХ В ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ¹

И. А. БЕРЕЖНОЙ, Д. Д. ИВЛЕВ

При определении связи между напряжениями и деформациями в теории пластичности обычно используются те или иные постулаты, касающиеся поведения материала. Подобные постулаты не являются следствием общих законов термодинамики и представляют собой, по существу, средство классификации свойств среды. К таким постулатам относятся "постулат устойчивости" ⁽¹⁾, "постулат пластичности" ⁽²⁾ и др.

В настоящей работе рассматриваются взаимосвязь и следствия различных интегральных соотношений в пространствах напряжений и деформаций, лежащих в основе определяющих постулатов теории пластичности.

Предположим, что деформация $e(e_{ij})$ является упругопластической:

$$e = e^e + e^p. \quad (1)$$

Для упругой части деформации справедлив линейный закон Гука

$$\sigma = Ae^e, \quad e^e = B\sigma, \quad B = A^{-1}, \quad (2)$$

где $\sigma(\sigma_{ij})$ — напряжение.

Будем считать, что упругие свойства материала не зависят от пластических, другими словами, матрицы упругих коэффициентов A и B сохраняют свой вид независимо от величины пластических деформаций.

Будем предполагать, что определена функция нагружения

$$f(\sigma_{ij}, e_{ij}^p, \chi_i) = 0, \quad (3)$$

где χ_i — скалярные параметры, зависящие от пути нагружения.

Соотношения связи $\sigma(e^p)$ в теории пластичности формулируются обычно на основе неравенства Мизеса:

$$(\sigma - \sigma^0)de^p \geq 0, \quad (4)$$

где σ — действительное напряженное состояние, а σ^0 — любое возможное, допускаемое данной функцией нагружения $f(\sigma_{ij}, e_{ij}^p, \chi_i) = 0$, параметры e_{ij}^p, χ_i фиксированы.

Из принципа максимума Мизеса следует ассоциированный закон течения — закон градиентальности приращения пластической деформации к поверхности нагружения

$$de_{ij}^p = d\mu \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad d\mu \geq 0. \quad (5)$$

Отмеченные выше постулаты в теории пластичности имеют следствием неравенство (4), а отсюда — соотношение (5).

В пространстве напряжений рассмотрим замкнутый цикл нагружения $BA A_1 A_2 B$ (рис.

1). Интеграл по замкнутому циклу нагружения $BA A_1 A_2 B$ будем обозначать \oint

¹ ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК СССР 1976 (ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)
Доклады Академии наук СССР 1976. Том 227, Л. 4 ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В результате нагружения поверхность f_1 займет положение f_2 , пластические деформации приобретаются на участке нагружения AA_1 , на участках BA , A_1A_2B имеет место упругое деформирование.

Обозначим пластическую деформацию, приобретенную на отрезке AA_1 через Δe^p , очевидно, что величина деформации Δe^p зависит от вида конкретной модели пластического тела, от характера пути, соединяющего точки A и AA_1 .

Продолжим деформирование на отрезке A_1A_2C таким образом, чтобы исходная геометрия тела осталась неизменной, другими словами, сообщим телу упругую деформацию Δe^e , компенсирующую приобретенную пластическую деформацию Δe^p :

$$\Delta e^p + \Delta e^e = 0. \quad (6)$$

Без ограничения общности можно считать, что отрезок A_2C проходит через точку B (рис. 1). Интеграл по замкнутому циклу деформирования BA_1A_2BC будем обозначать \oint .

Очевидно, при принятых предположениях

$$\oint = \oint + \int_B^C. \quad (7)$$

Упругие деформации Δe^e приобретаются на отрезке участка BC . Рассмотрим сумму интегралов

$$J_1 = \oint_{\sigma} \sigma de + \oint_{\sigma} e d\sigma. \quad (8)$$

Согласно (7), выражение (8) примет вид

$$J_1 = \oint_{\sigma} d(\sigma e) + \int_B^C e d\sigma. \quad (9)$$

Предположим, что в точке B деформация является упругой; если в точке B деформация является упругопластической $e_B = e_B^e + e_B^p$, то сместим начало отсчета деформаций на величину пластической деформации e_B^p и соответствующие величины работ напряжений на участке BC будем подсчитывать только на величинах упругих деформаций. Тогда выражение (9) примет вид

$$J_1 = \sigma_B \Delta e^p + (\sigma_B + \frac{1}{2} \Delta \sigma) \Delta e^e, \quad \Delta \sigma = \sigma_C - \sigma_B; \quad (10)$$

откуда, учитывая (6), получим

$$J_1 = \oint_{\sigma} \sigma de + \oint_{\sigma} e d\sigma = \frac{1}{2} \Delta \sigma \Delta e^e. \quad (11)$$

В дальнейшем обозначим $\Delta W = \frac{1}{2} \Delta \sigma \Delta e^e$. Аналогично (11) получим

$$J_2 = \oint_{\sigma} e d\sigma + \oint_{\sigma} \sigma de = \Delta W. \quad (12)$$

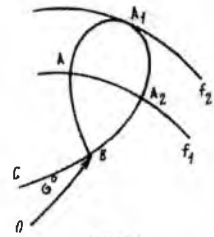


Рис. 1

Обозначим $\sigma^p = \sigma^0$, $e^p = e^0$. Тогда

$$\oint_{\sigma} \sigma^0 de + \oint_{e} e^0 d\sigma = 0. \quad (13)$$

В самом деле,

$$\oint_{\sigma} \sigma^0 de = \sigma^0 \Delta e^p = -\sigma^0 \Delta e^e, \quad \oint_{e} e^0 d\sigma = e^0 \Delta \sigma = \sigma^0 \Delta e^e \quad (14)$$

Вычитая из (11) выражение (13), найдем

$$\oint_{\sigma} (\sigma - \sigma^0) de + \oint_{e} (e - e^0) d\sigma = \Delta W. \quad (15)$$

По определению получим

$$\oint_{\sigma} e^0 d\sigma + \oint_{e} \sigma^0 de = 0. \quad (16)$$

Вычитая из (12) выражение (16), будем иметь

$$J_4 = \oint_{\sigma} (e - e^0) de + \oint_{e} (\sigma - \sigma^0) d\sigma = \Delta W. \quad (17)$$

Из (11), (12), (15), (17) получим

$$J_1 = J_2 = J_3 = J_4 = \Delta W. \quad (18)$$

Содержание постулатов Драккера ⁽¹⁾, А. А. Ильющина ⁽²⁾, Хилла ⁽³⁾ составляют соответственно утверждения

$$\oint_{\sigma} (\sigma - \sigma^0) de \geq 0, \quad \oint_{e} \sigma de \geq 0, \quad \oint_{\sigma} e d\sigma \geq 0. \quad (19)$$

Постулаты А. А. Ильющина и Хилла связаны соотношением (12).

Сформулируем постулат, определяющий свойства среды:

$$\oint_{e} (e - e^0) d\sigma \leq 0, \quad \oint_{\sigma} (e - e^0) d\sigma \leq 0. \quad (20)$$

Постулат Драккера и постулат (20) связаны соотношением (15).

Отметим, что постулатам А. А. Ильющина и Хилла может быть придана более общая форма

$$\oint_{e} (\sigma - \sigma^0) de \geq 0, \quad \oint_{\sigma} (e - e^0) d\sigma \leq 0. \quad (21)$$

Два последних соотношения (19) следуют из (21) при $\sigma^p = e^p = 0$.

Если отрезок AA_1 достаточно мал, то Δe^p — малая первого порядка, ΔW — малая второго порядка и с точностью до малых первого порядка соотношения (18) принимают вид

$$\begin{aligned} \oint_{\sigma} \sigma de + \oint_{e} e d\sigma = 0, \quad \oint_{e} e d\sigma + \oint_{\sigma} \sigma de = 0, \\ \oint_{\sigma} (\sigma - \sigma^0) de + \oint_{e} (e - e^0) d\sigma = 0, \quad \oint_{\sigma} (e - e^0) d\sigma + \oint_{e} (\sigma - \sigma^0) de = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Из соотношений (19), (20), (21) следует неравенство Мизеса и как следствие ассоциированный закон пластического течения.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Drucker, *Quart. Appl. Math.*, v. 7, 411 (1950).
2. А. А. Ильющин, *ПММ*, т. 25, 503 (1961).
3. D. Hill, *J. Mech. and Phys. Solids*, v. 16, 315 (1968).
4. В. Д. Ключников, *Лекции по теории пластичности*, ч. 1, М., Изд-во МГУ, 1972.

«ГЛИССАДА» — ЛАЗЕРНАЯ СИСТЕМА ПОСАДКИ САМОЛЕТОВ¹

У нас в стране уделяется очень большое внимание вопросам обеспечения безопасности полетов. Исследования в этой области определены «Основными направлениями развития народного хозяйства СССР на 1976—1980 годы». Одну из таких работ — по применению лазеров для взлета и посадки самолетов — отметил в своем выступлении на XXV съезде КПСС президент Академии наук СССР А. П. Александров. В ходе этой работы, которая проводится под научным руководством Н. Г. Басова, развитие фундаментальных основ лазерной техники в сочетании с ранее известными навигационными принципами позволило создать качественно новую — лазерную взлетно-посадочную систему. Прежде чем излагать детали устройства этой системы, обратимся к некоторым историческим фактам.

Как только человек начал летать, он сразу же столкнулся с проблемой безопасности полетов. За всю историю развития техники летательных аппаратов была проделана огромная работа, в результате которой безопасность полетов на современном самолете доведена до более высокого уровня, чем, например, безопасность загородной поездки на автомобиле.

Но это не значит, что дальнейшие исследования по повышению безопасности теряют смысл. Следует подчеркнуть, что труд пилота, от которого зависит жизнь десятков и сотен людей, относится к числу наиболее тяжелых с точки зрения расходования нервной и физической энергии. Поэтому всякая разработка, облегчающая пилотирование самолета, безусловно, повышает безопасность полетов, и, следовательно, ее эффективность несомненна.

Одной из основных составляющих технологии полета является навигация, которую можно определить как систему правил и средств измерения текущих координат транспортного средства в пространстве перемещений. Пока известно два фундаментальных принципа, на которых основаны практически все навигационные системы: навигация по ориентирам — электромагнитным (в частности, визуальным), магнитным, гравитационным, континуальным (например, ориентация по изменению концентрации какого-либо вещества в воде, запаха в воздухе и т. п.) и навигация инерциальная. Последняя определяет координаты

¹ «ПРИРОДА», №11, 1977 г.

объекта с помощью уравнений теоретической механики, используя лишь знание его координат в определенный момент времени (начальные условия) и действующих на объект сил.

Инерциальная навигация развивается сравнительно недавно; она берет свое начало от физических законов, сформулированных Ньютоном более 300 лет назад. Но за этот малый исторический срок инерциальная навигация заняла одно из ведущих мест в навигационной практике.

Навигация по ориентирам насчитывает более чем трехтысячелетнюю историю, которая восходит к сохранившимся чертежам золотых рудников Древнего Египта. Усложнение навигационных задач, вставших перед человеком с развитием мореплавания, стимулировало расширение наших знаний законов природы. Развитие астрономии дало возможность осуществлять навигацию по астроориентирам. С открытием земного магнетизма и изобретением компаса человек от визуальной навигации по земным ориентирам перешел к навигации по магнитным.

Бурное развитие новых средств навигации началось с появлением радио.

Открытие новых явлений природы часто позволяет вернуться к ранее известным технологическим принципам и в сочетании с вновь полученными фундаментальными знаниями достичь качественно новых результатов. Так и открытие лазерных принципов генерации электромагнитной энергии вызвало новый поток идей в области навигации.

Выход летательного аппарата, в частности самолета, на аэродром посадки обеспечивается целой иерархией навигационных систем: дальней и ближней навигации, радио- и светотехническими системами посадки. С точки зрения места в технологической цепи навигации систему посадки можно отнести к локальной навигации. На последнем этапе полета летчик должен обязательно установить визуальный контакт с землей. Пилотирование самолета визуально — это пилотирование по земным ориентирам.

Летчик, наблюдая земные ориентиры, в силу закономерностей нашего зрительного восприятия осуществляет так называемое аффинное (точечное взаимно однозначное отображение пространства на себя, при котором прямые переходят в прямые) на отображение трехмерного пространства, в котором земные ориентиры образуют систему инвариантных относительно положения самолета подпространств. По взаимному расположению ориентиров летчик корректирует траекторию движения самолета. Траектория самолета при посадке определяется пересечением двух плоскостей — курсовой, проходящей через ось взлетно-посадочной полосы (ВПП) перпендикулярно земле, и глиссадной (от французского глиссада — скольжение.), проходящей через торец ВПП перпендикулярно курсовой. Угол наклона глиссадной плоскости относительно земли определяется скоростью самолета. Пилот сравнительно легко (в условиях достаточной видимости, разумеется) определяет курсовую плоскость — по огням ВПП ночью или ее разметке днем. Глиссадная плоскость, т. е. высота самолета над землей в разные моменты времени, определяется «на глаз», с чрезвычайно большими ошибками, в особенности в непривычных условиях, например надводной поверхностью. В истории парашютотизма известно немало случаев, когда при прыжках в море парашотист отстегивает стропы за несколько десятков метров от воды: ему кажется, что волны уже касаются его ног.

Таким образом, основной задачей системы «Глиссада» было создание таких линейных ориентиров, которые позволяли бы летчику «видеть» глиссадную траекторию. Оказа-

лось, что при этом может быть решен и ряд дополнительных задач, еще более облегчающих пилотирование при взлете и посадке.

Надо отметить, что понимание законов отображения окружающего нас пространства, точнее предметов, которые находятся в нем, также имеют длительную историю развития. Эпоха Возрождения дала человечеству прикладное понимание аффинной геометрии. Например, Леонардо да Винчи, чье 525-летие со дня рождения отмечалось в этом году, в своей фреске «Тайная вечеря» (роспись в трапезной монастыря Санта-Мария делле Грацие в Милане) практически использовал идеи аффинной геометрии, развитие Альберти в трактате о живописи, написанном в 30-х годах XV столетия. Фундаментальное понятие аффинной геометрии возникло существенно позже и связывается с Эрлангенской программой Клейна, сформированной в конце XIX в. Отображение и восприятие пространства ориентиров, определенное законами аффинной геометрии, относится к преобразованиям, в современном понимании составляющим теорию групп Ли.

Создание лазеров — мощных источников узконаправленного электромагнитного излучения — позволило с новых позиций взглянуть на возможность использования аффинной геометрии в навигационных системах, в основе которых лежат принципы навигации по ориентирам. Как известно, лазерный луч обладает очень малым углом расходимости и вследствие атмосферного рассеяния выглядит в воздухе «светящейся нитью», которая представляет собой хороший линейный ориентир, воспринимаемый визуально.

Эффекты рассеянного лазерного излучения могут быть положены в основу создания целого семейства лазерных визуальных систем посадки, состоящих из линейных ориентиров, воспринимаемых нашим естественным зрительным анализатором (системой глаз — мозг). В этом случае особое значение в исследованиях и разработке лазерных систем посадки имеют медико-биологические проблемы воздействия лазерного излучения на глаз человека.

Глаз как адаптивный фотоприемник работает в огромном диапазоне принимаемых мощностей излучения: он может фиксировать поток энергии от нескольких квантов в секунду до предельного значения потока энергии, примерно равного потоку прямого солнечного излучения. Но в естественных условиях эволюция фоторецепторов человека и животных происходила при воздействии некогерентного излучения. Поэтому медикам и инженерам пришлось провести комплекс исследований, которые позволили установить безопасные для глаза уровни когерентного лазерного излучения. Чтобы исключить фотобиологическое воздействие на молекулярном уровне, в системе «Глиссуда» применены источники лазерного излучения, работающие только в красной области спектра, которая с этой точки зрения полностью безопасна.

Если определенным образом в пространстве расположить систему линейных ориентиров, ограничив ими некоторое подпространство, в котором должен находиться летательный аппарат, то взаимное положение этих линейных ориентиров, воспринимаемое летчиком, является аффинным преобразованием границ выделенного подпространства; оно связано с текущими координатами наблюдателя и, следовательно, самого летательного аппарата. Необходимо только расположить в пространстве ориентиры таким образом, чтобы их отображение, воспринимаемое летчиком, имело простую и понятную конфигурацию. Изменения нормальной конфигурации при отклонениях самолета от заданной траектории

должно соответствовать психофизиологическим особенностям нашего пространственного восприятия.

Комбинация лазерных линейных ориентиров, геодезически привязанная к взлетно-посадочной полосе, и их аффинные - преобразования составляют основу лазерной взлетно-посадочной системы «Глиссада». Система предназначена для пилотирования самолета при заходе на посадку и выполнения посадки самолета, а также для взлета в сумерках и ночью. В простых метеоусловиях летчик может наблюдать посадочный символ системы с расстояния свыше 30 км от посадочной полосы. Можно также выполнить посадку при метеовидимости, соответствующей III категории ICAO (категории систем, обеспечивающих информацию для управления полетом при посадке, утверждены Международной организацией гражданской ассоциации – ICAO) при использовании радиосредств самолета и аэродрома I категории ICAO. Предельно система дает 6-кратное увеличение дальности обнаружения лазерных ориентиров по отношению к стандартному определению метеорологической дальности видимости, т. е. к оптической толще (произведение толщины слоя на коэффициент поглощения), равной 3,912.

Система задает летчику следующие локальные навигационные параметры: курс посадки (курсовую плоскость), глиссаду снижения (глиссадную плоскость), положение естественного горизонта, боковые границы взлетно-посадочной полосы, положение фиксированных точек на посадочной траектории (удаление от ВПП), сигнал разрешения или запрета посадки, а также производные этих навигационных параметров по времени. Взлет самолета осуществляется по лучам, ограничивающим боковые границы ВПП или ее ось. «Глиссада» не нуждается в дополнительном оборудовании самолета. Из пилотажно-навигационной информации внутрикабинного приборного оборудования летчику надо контролировать только скорость полета. Наши психофизиологические способности к восприятию взаимного углового положения линейных ориентиров позволяют иметь разрешающую способность в этой системе по курсу и глиссаде порядка $\pm 0,5$ м.

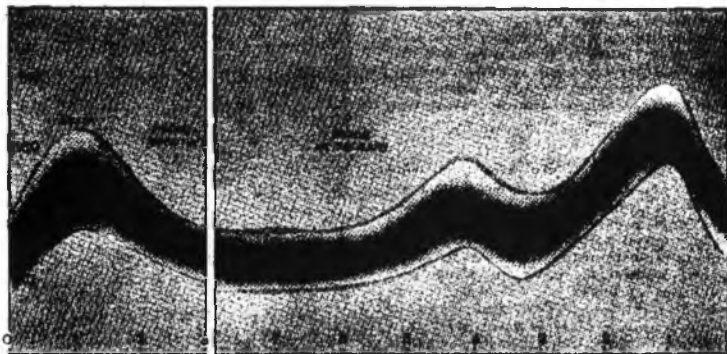
Простота и наглядность расположения лазерных ориентиров такова, что при наблюдении из кабины пилота даже неспециалист ясно определяет траекторию снижения и правильность движения по ней самолета. Практически это означает, что использование системы «Глиссада» не требует предварительного обучения летного персонала. Все эти факторы приводят к значительному снижению психофизиологического напряжения летчика при посадке.

Система «Глиссада» полностью совместима с любым радиотехническим оборудованием и может работать без светотехнических средств аэродрома. Это делает ее весьма полезной для мобильных аэродромов. Стоимость системы, затраты на ее установку и эксплуатацию (при более высокой ее точности) в несколько раз ниже стоимости радиотехнических систем автоматической посадки и светотехнического оборудования. Особо следует отметить существенно меньшее (в десятки раз) энергопотребление системы «Глиссада» по сравнению со светотехническим оборудованием современного аэродрома. Высокая точность и разрешающая способность «Глиссады» делает ее весьма полезной при юстировке (настройке) и контроле радиотехнических систем посадки всех категорий.

Идея создания лазерной взлетно-посадочной системы, использующей закономерности аффинной геометрии, возникла в 1970 г., а летом 1971 г. начались летные исследования. Первыми летчиками-исследователями были заслуженный летчик-испытатель СССР В.

А. Калинин и летчики-испытатели В. Г. Рыбкин, Г. И. Арбузов. Система «Глиссада» прошла всестороннюю проверку на различных аэродромах страны с суммарной продолжительностью полетов свыше 40 тыс. «критических минут».

Созданная в СССР лазерная взлетно-посадочная система «Глиссада» — результат напряженной работы многих коллективов ученых, инженеров, медиков, рабочих, летчиков-испытателей: это характерный пример того, как фундаментальная наука позволила сделать еще один практический шаг в совершенствовании весьма трудного авиационного дела.



В широком смысле полет летательного аппарата — это сложный технологический процесс, в котором этапы взлета и посадки занимают особое место, так как они характеризуются существенно большим потоком информации, перерабатываемой летчиком, а следовательно, и более высоким эмоциональным напряжением. Из авиационной статистики следует, что около 80% всех средств по дальнейшему повышению безопасности полета необходимо вкладывать в те системы, которые обеспечивают взлетно-посадочные этапы полета. Одной из иностранных авиакомпаний эти этапы образно определены как «11 критических минут» — 3 мин после начала взлета и 8 мин до окончания посадки. На рисунке показано изменение частоты сердечных сокращений у летчика в течение «11 критических минут» (в % к норме). Повышенное эмоциональное напряжение наступает в процессе разбега и отрыва самолета, а затем на посадке, перед контактом с взлетно-посадочной полосой, причем здесь



эмоциональное напряжение максимально — даже у тренированных летчиков оно достигает 140% к исходному состоянию.

Область видимости лазерного луча в воздухе за счет атмосферного рассеяния света [расстояния даны в относительных единицах]. Если задаться некоторым минимальным пороговым значением плотности мощности на входе в глаз наблюдателя, то лазерный луч как линейный ориентир можно наблюдать «замкнутой» области, приведенной на рисунке. Эта область нормирована относительно предельной оптической толщи, через которую еще можно различить луч. Граница области может быть названа интегральной индикатрисой контрастной видимости луча.



В системе «Глиссада» в качестве дополнительного контроля может быть использовано определение пролета какой-либо фиксированной точки на глиссадной траектории. Например, пролет над приводным радиомаяком, находящимся перед ВПП, должен проходить на фиксированной высоте, равной 60 м. В этом случае ВПП направляют два лазерных луча так, чтобы они пересекались в указанной точке (третий луч, курсовой, в данном случае является дополнительным). Из-за особенностей зрительного восприятия таких почти параллельных лучей возникает оптический парадокс: перед точкой пересечения лучи воспринимаются действительно сходящимися, в момент пролета самой точки (точнее, на несколько метров выше нее, чтобы луч не слепил глаза) лучи кажутся параллельными, а далее — расходящимися!

Система позволяет также определить крен самолета и положение его относительно ВПП при посадке и взлете. Направление лазерных лучей в системе «Глиссада», задающее летчику траекторию снижения самолета — глиссаду. Летчик воспринимает эти лучи как светящиеся нити, ограничивающие в воздухе своеобразный коридор, которого необходимо придерживаться, чтобы вывести самолет на посадочную полосу.

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ТЕОРИИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА¹

И. А. Березной, Д. Д. Ивлев

Определяются интегральные неравенства, приводящие к принципу максимума скорости диссипации Онзагера. Приводятся ограничения, налагаемые интегральными неравенствами на механическое поведение материала.

Связь между интегральными неравенствами теории пластичности, приводящими к принципу Мизеса, рассматривалась в работе [1]. Ниже показана эквивалентность неравенств Друккера [2] и Хилла [3], а также неравенства А. А. Ильюшина [4] и неравенства, полученного в [1].

Вопросы построения теории пластичности на основании принципа максимума скорости диссипации Онзагера рассматривались, например, в работах [5, 6].

1. Рассмотрим упрочняющееся упругопластическое тело. Обозначим через σ , e тензоры действительных напряжений и деформаций. Предположим, что

$$e = e^e + e^p \quad (1.1)$$

где e^e — упругая, e^p — пластическая составляющие деформации. Допустим, что упругие свойства материала не зависят от пластических.

Рассмотрим циклы нагружения, замкнутые по напряжениям и по деформациям. Пусть VAA_1AB (фиг. 1) — замкнутый цикл по напряжениям. Пусть VAB проходит в области упругих деформаций, в точке A материал достигает предела пластичности, вектор o выходит на поверхность нагружения. Пластические деформации приобретаются на отрезке нагружения AA_1 . Приращение напряжений на отрезке AA_1 обозначим $\delta\sigma$, соответствующее приращение пластических деформаций — $\delta\sigma^p$.

В пространстве напряжений циклу, замкнутому по действительным деформациям, соответствует незамкнутый цикл VAA_1AC (фиг. 2). В точках B и C полные деформации совпадают по определению. Обозначим нижними индексами e и σ интегралы по замкнутому циклу по деформациям и напряжениям соответственно. По определению,

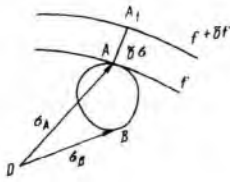
$$\oint_C C de = 0, \quad C = \text{const} \quad (1.2)$$

Так как на отрезке AA_1 (фиг. 2) имеет место приращение действительных деформаций δe^p , то, согласно (1.2), на отрезке BC должно иметь место приращение упругих деформаций Δe^e , компенсирующее приращение Δe^p , компенсирующее приращение δe^p , т. е.

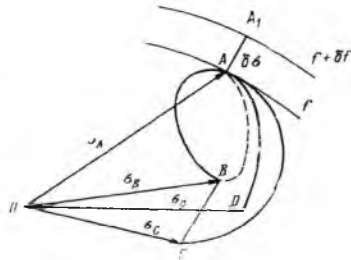
$$\delta e^p + \Delta e^e = 0, \quad \Delta e^e = -\delta e^p$$

Приращению Δe^e соответствует приращение напряжений $\Delta\sigma = \sigma_{C-B}$ (фиг. 2). Очевидно, что, вообще говоря, $\delta\sigma \neq \Delta\sigma$.

¹ ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА, том 44, вып.3, 1980 г.



Фиг. 1



Фиг. 2

Постулаты [1-4], приводящие к принципу Мизеса, имеют вид

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} (\sigma - \sigma_B) de &\geq 0 \\ \int_{e} \sigma de &\geq 0 \\ \int_{\sigma} ed\sigma &\leq 0 \\ \int_{e} (e - e_B)^e d\sigma &\leq 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Первое неравенство (1.3) предложено в работе [2], второе — в работе [3], третье — в работе [4], четвертое — в работе [1]. Покажем, что существуют соотношения

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} (\sigma - \sigma_B) de + \int_{e} ed\sigma &\equiv 0 \\ \int_{e} \sigma de + \int_{e} (e - e_B^e) d\sigma &\equiv 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Покажем справедливость первого из них. Имеем

$$\int_{e} ed\sigma = \int_{\sigma} d(\sigma e) - \int_{\sigma} \sigma de \quad (1.5)$$

Очевидно,

$$\int_{\sigma} d(\sigma e) = \sigma_B \delta e^p = \int_{\sigma} \sigma_B de \quad (1.6)$$

Из (1.5) и (1.6) получим

$$\int_{e} ed\sigma = - \int_{\sigma} (\sigma - \sigma_B) d\sigma$$

Таким образом, постулаты Друккера и Хилла (первое и третье неравенства (1.3)) эквивалентны. Покажем справедливость второго соотношения (1.4). Имеем

$$\int_{e} (e - e_B^e) d\sigma = \int_{e} d(\sigma e) - \int_{e} \sigma de - e_B^e \int_{e} d\sigma$$

Принимая во внимание, что $e_C = e_B$, получим

$$\int_{e} d(\sigma e) = \sigma_C e_C - \sigma_B e_B^e = e_B^e \Delta \sigma = e_B^e \int_{e} d\sigma \quad (1.7)$$

Отсюда следует

$$\int_{e} (e - e_B^e) d\sigma = - \int_{e} \sigma de$$

Таким образом, постулаты А. А. Ильюшина и постулат, определенный в работе [2] (второе и четвертое неравенства (1.3)), эквивалентны. Следовательно, можно сказать, что имеют место два независимых постулата:

Друккера и А. А. Ильюшина. Постулат Хилла и постулат, сформулированный в [1] — другая форма записи соответственно постулатов Друккера и А. А. Ильюшина.

2. Рассмотрим интегральные неравенства, приводящие к принципу максимума Онзагера. Предположим, что существует диссипативная функция

$$\sigma e^p = D(\dot{\varepsilon}^p, e, \chi) \quad (2.1)$$

где $\dot{\varepsilon} = \frac{de}{dt} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p$ — скорость деформации, χ — некоторые параметры упрочнения.

Предположим, что диссипативная функция (2.1) является однородной первого порядка относительно компонент $\dot{\varepsilon}^p$.

Введем принцип максимума диссипации Онзагера в форме, предложенной Циглером [4]

$$(\dot{\varepsilon}^p - \dot{\varepsilon}^{*p})\sigma \geq 0 \quad (2.2)$$

где $\dot{\varepsilon}^{*p}$ — возможная скорость пластического деформирования, допускаемая данной диссипативной функцией

$$D(\dot{\varepsilon}^p, e, \chi) \geq D(\dot{\varepsilon}^{*p}, e, \chi) \quad (2.3)$$

Из (2.1) — (2.3) следует ассоциированный закон нагружения

$$\sigma = \frac{\partial D}{\partial \dot{\varepsilon}^p} \quad (2.4)$$

Соотношения (2.1), (2.4) полностью определяют свойства пластического тела. Известно [6], что из (2.1), (2.4) следует существование функции нагружения и ассоциированного закона течения

$$f(\sigma, \varepsilon^p, \chi) = 0, \dot{\varepsilon}^p = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right), \lambda \geq 0 \quad (2.5)$$

В дальнейшем для простоты ограничимся случаем гладких функций нагружения; распространение результатов на кусочно-гладкие функции нагружения не представляет принципиальных трудностей.

Рассмотрим в точке А (фиг. 1) любое возможное приращение δe^{*p} . Так как диссипативная функция однородная относительно $\dot{\varepsilon}^p$, то неравенство (2.3) можно переписать в виде

$$D(\delta \dot{\varepsilon}^p, e, \chi) \geq D(\dot{\varepsilon}^{*p}, e, \chi) \quad (2.6)$$

На фиг. 3 показан некоторый уровень диссипативной функции $D(\delta \dot{\varepsilon}^p, e, \chi) = const$, соответствующий действительному приращению пластических деформаций δe^p и возможные приращения пластических деформаций δe^{*p} .

Предположим, что отрезок AA_1 (фиг. 1) достаточно мал, и ограничимся малыми первого порядка малости. Имеем

$$\int \sigma de = \sigma \delta e^p \quad (2.7)$$

В самом деле, работа напряжений на упругих деформациях по замкнутому циклу напряжений равна нулю, а приращение пластической деформации отлично от нуля только в точке A .

По определению,

$$e^* = e^e + e^{*p}, de^* = de^e + de^{*p} \quad (2.8)$$

где упругая часть деформации связана с напряжениями σ по закону Гука. Приращение δe^{*p} принимает любое значение в рамках ограничения (2.6). Для рассматриваемого пути нагружения (фиг. 1) вполне аналогично (2.7) получим

$$\int_{\sigma} \sigma de^* = \sigma_A \delta e^{*p} \quad (2.9)$$

Вычитая из (2.7) выражение (2.9), найдем

$$\int_{\sigma} \sigma (de - de^*) = \sigma_A (\delta e^p - \delta e^{*p}) \quad (2.10)$$

Постулируя неравенство

$$\int_{\sigma} \sigma (de - de^*) \geq 0 \quad (2.11)$$

согласно (2.10), с точностью до обозначений как следствие имеем принцип Онзагера (2.2).

Согласно (1.5), (1.6), (2.7), получим

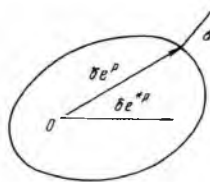
$$\int_{\sigma} e d\sigma = (\sigma_B - \sigma_A) \delta e^p \quad (2.12)$$

Составляющая e^{*p} складывается по мере движения по циклу напряжений из любых приращений δe^{*p} , удовлетворяющих ограничению (2.6). Вполне-аналогично (2.12) найдем

$$\int_{\sigma} e^* d\sigma = (\sigma_B - \sigma_A) \delta e^{*p} \quad (2.13)$$

Вычитая из (2.12) выражение (2.13), получим

$$\int_{\sigma} (e - e^*) d\sigma = (\sigma_B - \sigma_A) (\delta e^p - \delta e^{*p}) \quad (2.14)$$



Фиг. 3

Если положить $\sigma_B=0$, т. е. вести нагружение не от какого-либо начального напряженного состояния внутри поверхности нагружения, а от нулевого напряженного состояния, то из (2.13) найдем

$$\int_{\sigma} (e - e^*) d\sigma = -\sigma_A (\delta e^p - \delta e^{*p}) \quad (2.15)$$

Постулируя неравенство

$$\oint_{\sigma} (e - e^*) d\sigma \leq 0 \quad (2.16)$$

и имея в виду, что цикл нагружения начинается и заканчивается исходным ненапряженным состоянием, как следствие будем иметь принцип Онзагера.

Рассмотрим циклы, замкнутые по деформациям. Наряду с циклом, замкнутым по действительным деформациям, рассмотрим цикл, замкнутый по возможным деформациям e^* . На фиг. 2 изображен подобный цикл BA_1ABD . В самом деле, на отрезке BA пластические деформации не возникают и характер этого отрезка произволен. Нагружению на отрезке AA_1 соответствует некоторое возможное приращение пластических деформаций δe^{*p} , а далее необходимо сместиться в точку D , такую, в которой приращение упругих деформаций компенсирует приращение Δe^{*p} . Обозначим соответствующее приращение упругих деформаций через Δe^e , которое, очевидно, соответствует приращению напряжений $\Delta \sigma_1 = \sigma_D - \sigma_B$.

Итак,

$$\delta e^{*p} + \Delta e^e = 0, \Delta e^e = -\delta e^{*p} \quad (2.17)$$

Интегрирование по замкнутому циклу по возможным деформациям будем обозначать индексом e^* . Так как внутри поверхности нагружения приращения пластических деформаций не происходит, то без ограничения общности можно положить, что пути AC и AD проходят через точку B . Тогда

$$\oint_{e^*} = \oint_{\sigma} + \int_B^C, \oint_{e^*} = \oint_{\sigma} + \int_B^D. \quad (2.18)$$

Рассмотрим интеграл

$$\oint_{e^*} \sigma de = \oint_{\sigma} \sigma de + \int_B^C \sigma de. \quad (2.19)$$

На участке BC происходит упругое деформирование. Пусть величины $\delta e^p = -\Delta e^e$ достаточно малы, тогда с точностью до малых первого порядка имеем

$$\int_B^C \sigma de = \sigma_B \Delta e^e = -\sigma_B \delta e^p. \quad (2.20)$$

Согласно (2.7), (2.20), из (2.19) получим

$$\oint_{e^*} \sigma de = (\sigma_1 - \sigma_B) \delta e^{*p}. \quad (2.21)$$

Вполне аналогично найдем

$$\oint_{e^*} \sigma de^* = (\sigma_1 - \sigma_B) \delta e^{*p}. \quad (2.22)$$

Вычитая из (2.21) соотношение (2.22), имеем

$$\oint_{e^*} \sigma de - \oint_{e^*} \sigma de^* = (\sigma_1 - \sigma_B) (\delta e^p - \delta e^{*p}). \quad (2.23)$$

Если $\sigma_B = 0$, то, согласно (2.23), неравенство

$$\oint_{e^*} \sigma de - \oint_{e^*} \sigma de^* \geq 0 \quad (2.24)$$

приведет к принципу Онзагера (2.2).

Итак, если цикл нагружения начинается от исходного ненапряженного состояния, то из интегрального неравенства (2.24) как следствие имеем принцип Онзагера.

Рассмотрим далее интеграл

$$\int_{\sigma} ed\sigma = \int_{\sigma} d(\sigma e) - \int_{\sigma} ed\sigma. \quad (2.25)$$

Согласно (1.7), используя теорему взаимности, получим

$$\int_{\sigma} d(\sigma e) = e_{\beta}^{\alpha} \Delta\sigma = \sigma_{\beta} \Delta e^{\alpha} = -\sigma_{\beta} \delta e^{\beta}. \quad (2.26)$$

Согласно (2.26), (2.21), преобразуем (2.25) к виду

$$\int_{\sigma} ed\sigma = -\sigma_{\beta} \delta e^{\beta}. \quad (2.27)$$

Совершенно аналогично получим

$$\int_{\sigma} e^{\alpha} d\sigma = -\sigma_{\beta} \delta e^{\beta}. \quad (2.28)$$

Вычитая из (2.27) соотношение (2.28), найдем

$$\int_{\sigma} ed\sigma - \int_{\sigma} e^{\alpha} d\sigma = -\sigma_{\beta} (\delta e^{\beta} - \delta e^{\beta}). \quad (2.29)$$

Постулируя неравенство

$$\int_{\sigma} ed\sigma - \int_{\sigma} e^{\alpha} d\sigma \leq 0 \quad (2.30)$$

получим как следствие принцип Онзагера при любых циклах нагружения, замкнутых по деформациям.

Покажем, что соотношение (2.16)—частный случай (2.11), а (2.24) — частный случай (2.30). В самом деле

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \sigma d(e - e^{\ast}) + \int_{\sigma} (e - e^{\ast}) d\sigma &= \int_{\sigma} d(\sigma e) - \int_{\sigma} d(\sigma e^{\ast}) \\ \int_{\sigma} \sigma de - \int_{\sigma} \sigma de^{\ast} + \int_{\sigma} ed\sigma - \int_{\sigma} e^{\ast} d\sigma &= \int_{\sigma} d(\sigma e) - \int_{\sigma} d(\sigma e^{\ast}) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Так как неравенства (2.16), (2.24) приводят к принципу Онзагера только при циклах нагружения от исходного ненапряженного состояния, то именно подобный цикл следует рассматривать в соотношениях (2.31). В этом случае циклы по нагружению и деформациям тоже заканчиваются в нуле и соотношения (2.31) тождественно равны нулю.

Таким образом, неравенства (2.16) и (2.24) — другая форма записи постулатов (2.11), (2.30) при циклах нагружения от исходного ненапряженного состояния. Независимыми являются два постулата (2.11), (2.30), приводящие к принципу Онзагера при циклах нагружения от произвольного напряженного состояния внутри поверхности нагружения. Приведем симметричную сводку результатов. К принципу Мизеса $(\sigma - \sigma_{\beta}) \varepsilon^{\beta} \geq 0$ приводят постулаты

$$\int_{\sigma} (\sigma - \sigma_{\beta}) d\varepsilon \geq 0, \int_{\sigma} (e - e_{\beta}^{\ast}) d\sigma \leq 0.$$

К принципу Онзагера

$$(\varepsilon^{\beta} - \varepsilon^{\ast\beta}) \sigma \geq 0$$

приводят постулаты

$$\int_{\sigma} \sigma d(e - e^*) \geq 0, \int_{e} e d\sigma - \int_{e^*} e^* d\sigma \leq 0.$$

Отметим, что в приведенном анализе используются только напряжения σ и деформации e . Подынтегральные выражения имеют вид $\sigma de, e d\sigma$, интегрирование ведется по замкнутым циклам напряжений и деформаций и в приведенном анализе исследованы все четыре возможные комбинации интегралов и подынтегральных выражений. Механизм пластичности и упругости не конкретизируется. Необходимо лишь, что e^* — обратимая, e^p — остаточная составляющие деформации. Не используется конкретное определение напряжений и деформаций, необходимо, чтобы наряду с (1.1) имело место условие (2.1).

3. Рассмотрим основные неравенства теории пластичности с точностью до малых второго порядка.

Неравенство Друккера (первое неравенство в (1.3)), очевидно, будет иметь вид

$$\int_{\sigma} (\sigma - \sigma_B) de = \left(\sigma_A - \sigma_B + \frac{1}{2} \delta\sigma \right) \delta e^p \geq 0. \quad (3.1)$$

Рассмотрим неравенство А. А. Ильюшина (второе неравенство в (1.3))

$$\begin{aligned} \int_{e} \sigma de &= \int_{e^*} \sigma de + \int_B \sigma de = \left(\sigma_A + \frac{1}{2} \delta\sigma \right) \delta e^p + \left(\sigma_B + \frac{1}{2} \Delta\sigma \right) \Delta e^e = \\ &= (\sigma_A - \sigma_B) \delta e^p + \frac{1}{2} (\delta\sigma \delta e^p + \Delta\sigma \Delta e^e) \geq 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

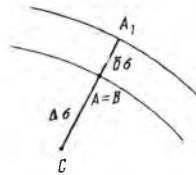
Если $A = B$ (фиг. 4), то (3.1) и (3.2) соответственно сведутся к неравенствам

$$\delta\sigma \delta e^p \geq 0, \quad (3.3)$$

$$\delta\sigma \delta e^p + \Delta\sigma \Delta e^e \geq 0, \delta e^p + \Delta e^e = 0. \quad (3.4)$$

Очевидно, что к (3.3) сведется неравенство Хилла (третье неравенство в (1.3)), а к (3.4) — четвертое неравенство в (1.3).

Материал, удовлетворяющий условию (3.3), принято называть устойчивым. На фиг. 5 дана зависимость $\sigma - e$ при одноосном растяжении, точка А соответствует пределу пластичности.



Фиг. 4

При одноосном растяжении $\delta e^p \geq 0$, следовательно, согласно (3.3), $\delta\sigma \geq 0$. График $\sigma - e$ в этом случае будет представлять монотонно возрастающую кривую (AB на фиг. 5).

Запишем зависимость $\delta\sigma - \delta e^p$ в виде

$$\delta\sigma = E_s \delta e^p \quad (3.5)$$

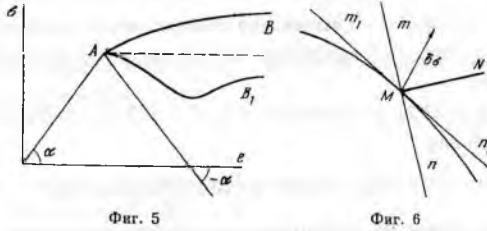
где E_s — модуль пластичности или касательный модуль.

Условие (3.4) для одноосного растяжения имеет вид

$$\delta\sigma \geq \Delta\sigma = E\Delta e^e = -E_s \delta e^p \quad (3.6)$$

где E — модуль упругости при одноосном растяжении.

Из (3.5), (3.6) найдем $E_s \geq E$. Следовательно, график σ — e этом случае может иметь участок монотонно убывающей кривой (AB_1 на фиг. 5), т. е. поведение материала может быть неустойчивым. Если обозначим $E = tg\alpha$, то согласно (3.6), участок неустойчивого поведения материала не может иметь касательные, угол наклона которых был бы меньше угла $-\alpha$ (фиг. 5).



Фиг. 5

Фиг. 6

Очевидно, что условие (3.4) включает в себя условие (3.3) и таким образом определяет более широкий класс материалов. Например, поведение материала в пластической области может характеризоваться кривой AB_2 на фиг. 5. Тем не менее для этого более широкого класса материалов справедлив принцип Мизеса и, следовательно, ассоциированный закон пластического течения.

Рассмотрим следствия неравенств (3.3), (3.4) в общем случае напряженного состояния. Отметим, что непосредственно из (3.3) не вытекает ни невогнутость, поверхности нагружения, ни ассоциированный закон течения. Можно представить модель пластического тела, свойства которой иллюстрируются на фиг.6. Приращение пластической деформации направлено неортогонально к поверхности нагружения по отрезку MN . Прямая m_1n_1 ортогональна к MN , прямая m_1 касается поверхности нагружения в точке M . Согласно (3.3), приращение пластической деформации происходит, если направление вектора $\delta\sigma$, исходящего из точки M , лежит в пределах секторов mMN , nMN . В пределах секторов mMm_1 приращение напряжения не вызывает приращения пластических деформаций, но перемещение поверхности нагружения в окрестности точки M происходит: нагружение вызывает лишь изменение предела пластичности. В пределах сектора nMn_1 приращению $\delta\sigma$ соответствует неустойчивое пластическое деформирование. Поверхность нагружения в окрестности точки M смещается внутрь предшествующего состояния поверхности нагружения.

Подобная модель вполне допустима, если исходить только из неравенства (3.3). Правомочность подобной модели исключается следствиями принципа Мизеса.

Ассоциированный закон течения может быть получен из (3.3), если предположить, что приращение $\delta\sigma$, вызывающее пластическое деформирование, не может быть направлено внутрь поверхности нагружения. Это равносильно предположению, что материал устойчив.

Условие (3.3) действительно служит условием устойчивости материала, если для материала справедлив постулат Мизеса (или постулат Онзагера), следствие которого — невогнутость поверхности нагружения и ассоциированный закон течения. Условие (3.3), как и (3.4), определяет возможные направления приращения $\delta\sigma$, вызывающие приращения

пластических деформаций. Условие (3.4) допускает приращение пластических деформаций при движении внутрь поверхности нагружения.

Сформулируем обобщенное неравенство

$$(1-a) \int_{\sigma} (\sigma - \sigma_B) d\epsilon - a \int_{\epsilon} (e - e_B^e) d\sigma \geq 0, a = const \quad (3.7)$$

Эквивалентное неравенство

$$a \int_{\epsilon} \sigma d\epsilon - (1-a) \int_{\sigma} \epsilon d\sigma \geq 0, a = const \quad (3.8)$$

Очевидно, что при $a = 0$ выражение (3.7) сводится к первому неравенству (1.3), а (3.8) — к третьему. При $a = 1$ выражение (3.7) сводится к четвертому неравенству (1.3), а (3.8) — ко второму.

Согласно (3.1), (3.2), (1.4), найдем, что (3.7) и (3.8) с точностью до малых высшего порядка принимают вид

$$(\sigma_A - \sigma_B) \delta e^p + \frac{1}{2} (\delta \sigma \delta e^p + a \Delta \sigma \Delta e^e) \geq 0 \quad (3.9)$$

Полагая $A = B$ (фиг. 4), из (3.9) получим обобщенное условие пластического нагружения

$$\delta \sigma \delta e^e + a \Delta \sigma \Delta e^p \geq 0, \delta e^p + \Delta e^e = 0 \quad (3.10)$$

Если $a > 0$, то $\delta \sigma \delta e^e$ может принимать отрицательные значения, пластические деформации могут приобретаться при направлениях $\delta \sigma$ внутрь поверхности нагружения и поведение материала может быть неустойчивым.

Если $a < 0$, то $\delta \sigma \delta e^p$ может принимать ограниченные положительные значения. При одноосном растяжении из (3.10) получим

$$\delta \sigma \geq E_s^0 \delta e^p, E_s^0 = -aE, a < 0 \quad (3.11)$$

Согласно (3.11) и (3.5), модуль E_s не может быть меньше вполне определенной величины E_s^0 .

Рассмотрим неравенства (2.11), (2.32) с точностью до малых второго порядка малости.

Аналогично (3.1), (3.2) получим

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \sigma d\epsilon - \int_{\epsilon} \epsilon d\sigma &= \sigma_A (\delta e^p - \delta e^{*p}) + \frac{1}{2} \delta \sigma (\delta e^p - \delta e^{*p}) \geq 0 \\ \int_{\epsilon} \epsilon d\sigma - \int_{\sigma} \sigma d\epsilon &= \sigma_A (\delta e^p - \delta e^{*p}) + \frac{1}{2} (\delta \sigma \delta e^p + \Delta \sigma \Delta e^e - \Delta \sigma \delta e^{*p} - \Delta \sigma_1 \Delta e_1^e) \leq 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

В отличие от рассмотренных ранее случаев избавиться от первого члена в правой части обоих равенств (3.12) не удастся, и по существу вторые члены в правых частях этих равенств не оказывают влияния на неравенства (3.12).

Сделаем несколько замечаний о принципе максимума скорости диссипации. Онзагер сформулировал принцип ([5], стр. 76), согласно которому в наших обозначениях действительные скорости деформации ϵ_p максимизируют выражение

$$\sigma \epsilon^{*p} - \frac{1}{2} D(\epsilon^p) = \sigma \left(\epsilon^{*p} - \frac{1}{2} \delta \epsilon^p \right).$$

Подставляя в (3.13) вместо ε^{*p} величину ε^p , получим, что максимизируется выражение скорости диссипации $\sigma\varepsilon^p = D(\varepsilon^p)$.

Очевидно, что принцип максимума скорости диссипации Онзагера можно сформулировать следующим образом: действительные скорости деформации максимизируют выражение

$$\sigma(\varepsilon^{*p} - m\varepsilon^p) \theta < m < 1 \quad (3.14)$$

Альтернативное выражение при $m = 1$ сформулировано Циглером [5] и имеет вид

$$\sigma(\varepsilon^{*p} - m\varepsilon^p) \geq 0 \quad (3.15)$$

Следовательно, принцип максимума скорости диссипации Онзагера может быть сформулирован в виде (3.14) или (3.15).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бережной И.А., Ивлев Д.Д., Об определяющих неравенствах в теории пластичности. Докл. АН СССР, 1976, т.227, №4.
2. Drucker D.C. Some implications of work hardening and ideal plasticity. Quart. Appl. Math., 1950, vol. 7, No.4, p. 411-418.
3. Hill R. On constitutive inequalities for simple materials. Pt. I, II. J. Mech and Phys. Solids, 1968, vol. 16, No. 4, p. 229-242; No. 5, p. 315-322.
4. Ильюшин А. А. О постулатах пластичности. ПММ, 1961, т. 25, вып. 3.
5. Циглер Г. Экстремальные принципы термодинамики необратимых процессов и механика сплошной среды. М., «Мир», 1966.
6. Ивлев Д.Д. О диссипативной функции в теории пластических сред. Докл. АН СССР 1976, т. 176.

О ВЗРЫВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПОТОКОВ В ПОЛЕ ПОПЕРЕЧНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН.

И.Л.Бережной, В.В.Кулиш, В.П.Захаров.

В последние года появился ряд работ, посвященных трехволновому параметрическому взаимодействию двух поперечных электромагнитных волн с волнами пространственного заряда (ВПЗ) электронного потока (см., например, [1-3]). В известных работах анализировался случай взаимодействия поперечных электромагнитных волн с ВПЗ электронного потока разностной частоты. Характерной особенностью этого типа взаимодействия является то, что на конечной длине (или за конечное время) амплитуды взаимодействующих волн всегда остаются конечными.

В отличие от известных работ, ниже рассмотрено трехволновое параметрическое взаимодействие двух поперечных электромагнитных волн с ВПЗ суммарной частоты. При этом оказалось, что существуют случаи, когда на конечной длине или за конечное время взаимодействия амплитуды взаимодействующих волн могут неограниченно нарастать, т.е. имеет место явление взрывной неустойчивости. Последнее показано на примере явления

параметрического взаимодействия двух распространяющихся в одном направлении поперечных электромагнитных волн с медленной ВПЗ, распространяющейся в том же направлении.

В качестве исходных брались система уравнений Максвелла и релятивистское уравнение движения электронного потока в переменных Эйлера. Полагалось $|\vec{v}| \ll V_0$ ($|\vec{v}|$ - переменная составляющая, а V_0 - систематическая составляющая скорости электронного потока вдоль направления распространения поперечных волн). В целях упрощения задачи в области взаимодействия постулируется постоянство скорости V_0 . Поток электронов на входе считаем немодулированным, а частоту ω_1 и волновое число медленной ВПЗ k_1 связанными с частотами $\omega_{1,2}$ к волновыми числами $k_{1,2}$ поперечных электромагнитных волн условиями параметрической связи:

$$\begin{aligned}\omega_3 &= \omega_1 + \omega_2; \\ k_3 &= k_1 + k_2\end{aligned}\quad (1)$$

Учитывая законы дисперсии для медленной ВПЗ

$$k_3 = \frac{\omega_3}{V_0} + \frac{\omega_p^3}{V_0 \gamma_i^2} \quad (2)$$

и электромагнитных волн

$$k_{1,2} = \frac{\omega_{1,2} N_{1,2}}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_{1,2}^2 N_{1,2}^2 \gamma_i}} \quad (3)$$

получаем связь между частотами $\omega_{1,2}$, коэффициентами замедления электромагнитных волн $N_{1,2}$ и скоростью электронного потока $V_0 = \beta c$ ($\omega_p^2 \ll \omega_{1,2}^2 N_{1,2}^2 \gamma_i$; $\omega_p^2 \ll \omega_{1,2}^2 \gamma_i^2$):

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{N_1 \beta - 1}{1 - N_2 \beta} \quad (4)$$

Здесь ω_p - ленгмюровская частота плазмы электронного потока, $\gamma_i = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ - релятивистский фактор.

Далее полагаем для простоты, что электромагнитные волны линейно поляризованы в плоскости xz , а амплитуды их являются медленно меняющимися функциями координаты z . Тогда, используя известную методику, применявшуюся, например, в работах [1-3], для амплитуд взаимодействующих волн ε_k ($k=1,2$ - электромагнитные волны с частотами ω_1 и ω_2 соответственно, $k=3$ - медленная ВПЗ) получаем следующую систему укороченных уравнений:

$$\frac{d\varepsilon_1}{dz} = A_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3, \quad \frac{d\varepsilon_2}{dz} = A_2 \varepsilon_1 \varepsilon_3, \quad \frac{d\varepsilon_3}{dz} = A_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \quad (5)$$

где

$$A_{1,2} = \frac{e \omega_{1,2}}{4mc^3 \omega_{2,1} \gamma_i k_{1,2}} \left\{ ck_3 - \frac{\beta \omega_p^2}{\gamma_i (\omega_{1,2} - V_0 k_{1,2})} \left[1 + \gamma_i^2 \omega_p^{-1} (\omega_{1,2} - V_0 k_{1,2}) \right] \right\}$$

$$A_3 = \frac{e \omega_p (ck_3 - \beta \omega_3)}{4mc\gamma_i^2 V_0 \omega_1 \omega_2}$$

Решения нелинейной системы уравнений (5) имеют вид :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{10}^2 A_2 &> \varepsilon_{20}^2 A_1; \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_{10} \frac{dn \alpha_1 z}{cn \alpha_1 z}; \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_{20} \frac{1}{cn \alpha_2 z}; \\ \varepsilon_3 &= \varepsilon_{20} \sqrt{\frac{A_3}{A_2} \frac{sn \alpha_1 z}{cn \alpha_1 z}}, \end{aligned} \quad (6)$$

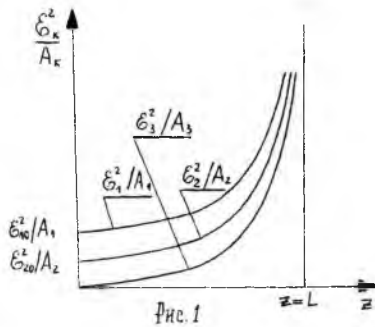
где $\alpha_1 = \varepsilon_{10} \sqrt{A_2 A_3}$ - инкремент пространственного нарастания на параметрической стадии взаимодействия при $\varepsilon_1 = \varepsilon_{10} = const$; $sn x$, $cn x$, $dn x$ - эллиптические функции Якоби

модуля $\zeta_1 = \left(1 - \frac{\varepsilon_{20}^2 A_1}{\varepsilon_{10}^2 A_2}\right)^{\frac{1}{2}}$; $\varepsilon_{10} = \varepsilon_1|_{z=0}$; $\varepsilon_{20} = \varepsilon_2|_{z=0}$; $\varepsilon_3|_{z=0} = 0$.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{10}^2 A_2 &< \varepsilon_{20}^2 A_1; \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_{10} \frac{1}{cn \alpha_2 z}; \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_{20} \frac{dn \alpha_2 z}{cn \alpha_2 z}; \\ \varepsilon_3 &= \varepsilon_{10} \sqrt{\frac{A_3}{A_1} \frac{sn \alpha_2 z}{cn \alpha_2 z}}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\alpha_2 = \varepsilon_{20} \sqrt{A_1 A_3}$, модуль эллиптических функций $\zeta_2 = \left(1 - \frac{\varepsilon_{10}^2 A_2}{\varepsilon_{20}^2 A_1}\right)^{\frac{1}{2}}$

Графики полбренных решений приведены на рис. 1. Как видим из (7), на конечной длине области взаимодействия



$$L = \frac{K}{\alpha_{1,2}} \quad (8)$$

где K - полный нормальный эллиптический интеграл Лежандра, амплитуды взаимодействующих волн неограниченно возрастают.

В реальном эксперименте, конечно, неограниченного роста амплитуд наблюдаться не может, поскольку при достаточно больших их значениях существенное влияние начинают оказывать эффекты более высоких порядков, здесь не учтенные. К ним, в частности,

относится, например, явление рассинхронизма электронного пучка и электромагнитных

волн (т.е. нарушение условий параметрической связи (1)) вследствие торможения его в процессе взаимодействия. Этот эффект, по видимому, оказывает наиболее существенное влияние на рассмотренное выше явление в стадии насыщения. В эксперименте это влияние, по крайней мере частично, может быть нейтрализовано, если к области взаимодействия приложено ускоряющее электрическое поле с таким распределением напряженности по координате z , чтобы потери энергии электронов при взаимодействии компенсировались его ускоряющим действием [4]. Тогда электронный пучок будет, в основном, играть не столько роль источника энергии, сколько роль нелинейной среды, в которой энергия постоянного внешнего источника преобразуется в энергию поперечных волн.

В заключение отметим, что для рассмотренного эффекта взрывной неустойчивости принципиальным является то обстоятельство, что фазовые скорости поперечных электромагнитных волн $V_{\phi 1} < c$. Физически адекватными такой теоретической модели в эксперименте могут служить, например, устройства типа замедляющих систем СВЧ диапазона. При этом, по мнению авторов, особый интерес представляет случай $\omega_1 = \omega_2$, поскольку при этом появляется возможность создания генераторов и усилителей мощных электромагнитных сигналов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.И.Мирошниченко. Физика плазмы, 2, 789, 1976.
2. А.М.Калмыков, Н.Я.Коцаренко, В.В.Кулиш. Изв. вузов СССР, радиоэлектроника, 20, №10, 76, 1977.
3. Н.Я.Коцаренко, В.В.Кулиш. ЖТФ, 50, 220, 1980.
4. В.А.Жураховский, В.В.Кулиш, В.Т.Чемерис. Препринт Института электродинамики АН УССР, № 218, И-во "Наукова думка", Киев, 1979.
5. Киевский ордена Ленина госуниверситет им. Т.Г.Шевченко.

ОБ ЭФФЕКТЕ КАСКАДНОГО ПОВЫШЕНИЯ ЧАСТОТЫ ПОПЕРЕЧНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ЭЛЕКТРОННЫХ ПОТОКАХ

И.А.Бережной, В.П.Захаров, В.В. Кулиш

Известен эффект параметрического повышения частоты поперечных электромагнитных волн вверх при взаимодействии их с релятивистскими электронными потоками [1-8]. Отличительной особенностью указанного эффекта является то обстоятельство, что частоты двух встречных электромагнитных волн (волны усиливаемого сигнала, распространяющегося попутно электронному потоку и волны накачки, распространяющиеся навстречу) в собственной системе координат пучка оказываются примерно равными (условие синхронизма). Поэтому при переходе в лабораторную систему координат частота волны накачки ω_1 смещается вниз, а частота волны усиливаемого сигнала ω_2 - вверх. В лабораторной системе координат условие синхронизма приобретает вид [8]:

$$\omega_2 \square \omega_1 \frac{1 + N_1 \beta}{1 - N_2 \beta} = K_{1,2} \omega_1 \quad (1)$$

где $\beta = \frac{v_0}{c}$, v_0 - скорость постоянного дрейфа электронного потока,

$N_{1,2} = \frac{cK_{1,2}}{\omega_{1,2}}$ - коэффициенты замедления электромагнитных волн с частотами $\omega_{1,2}$ и вол-

новыми числами $K_{1,2} = |\bar{K}_{1,2}|$; $K_{1,2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ - коэффициент преобразования по частоте.

В рамках принятой в настоящей работе терминологии такой процесс преобразования частоты электромагнитных волн является однокаскадным.

Анализ формулы (1) показывает, что возможности значительного повышения частоты вверх ($K_{1,2} \gg 1$) при однокаскадном преобразовании связаны, в основном, с использованием ультрарелятивистских электронных потоков ($\beta \rightarrow 1$), поскольку с ростом $\omega_2 \rightarrow N_2 \rightarrow 1$, а реально достижимые значения коэффициента замедления N_j , как правило, не превышает нескольких единиц.

В настоящей работе показано, что значительное преобразование частоты вверх, однако, возможно и в слабoreлятивистских электронных потоках, если реализуется эффект каскадного повышения частоты.

Рассмотрим параметрическое взаимодействие поперечной некогерентной волны, обладающей дискретным частотным спектром ω_i , с сильноточным релятивистским электронным потоком. Схема взаимодействия (усилительная модель) представлена на рис.1. Здесь область взаимодействия ограничена по оси z безграничными по осям x и y плоскостями $z = 0$ и $z = L$. Плоскость $z = 0$ считаем прозрачной для электромагнитного излучения, а плоскость $z = L$ - абсолютно отражающей, кроме того, обе плоскости считаем прозрачными для электронного потока.

В области взаимодействия для каждой монохроматической волны частоте ω_i имеем одну волну попутную электронному потоку и одну встречную (отраженную от плоскости $z=L$). Специальным подбором частот для каждой пары встречных волн с несовпадающими частотами ω_i и ω_{i+1} можно обеспечить выполнение условия синхронизма типа (1):

$$\omega_{i+1} \square \omega_i \frac{1 + N_i \beta}{1 - N_{i+1} \beta} = \omega_i K_{i,i+1} \quad (2)$$

Теперь каждая монохроматическая волна до отражения от плоскости $z=L$ выступает в качестве усиливаемого сигнала, а после отражения - в роли накачки для попутной волны частоты ω_{i+1} . Самая низкая частота ω_1 , таким образом, оказывается связанной с самой высокой частотой ω_n следующим каскадным условием синхронизма:

$$\omega_n \square \omega_1 K_{1,n} \quad (3)$$

$$K_{1,n} = \prod_{i=1}^{n-1} K_{i,i+1} \quad (4)$$

В частном случае, когда все $N_i = 1$ (незамедленные волны) из (2) и (3) нетрудно получить:

$$\omega_n \approx \omega_1 \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^{n-1} \quad (5)$$

Таким образом, в рассматриваемой схеме взаимодействия упомянутый процесс однокаскадного преобразования частоты повторяется $(n-1)$ раз, т.е. имеем $(n-1)$ каскадов преобразования. Такое явление и называем эффектом каскадного повышения частоты поперечных электромагнитных волн в электронных потоках.

Из формул (3) и (5) непосредственно вытекает возможность значительного повышения частоты и в слабoreлятивистских электронных потоках. Полагая, например, $\beta = 0,82$, что соответствует ускоряющему потенциалу электронного потока ~ 370 кВ $n=4$, т.е. три каскада повышения частоты, находим $\frac{\omega_4}{\omega_1} = K_{14} \approx 10^3$, тогда как при обычном однокаскадном

преобразовании ($n=2$) в соответствии с (1) получаем $\frac{\omega_2}{\omega_1} = K_{12} = 10 \approx K_{14}$.

Амплитудный анализ описанного выше эффекта каскадного повышения частоты может быть произведен сравнительно просто, если ограничиться рассмотрением случая сравнительно большого ($K_{i,j+1} \geq 10$) преобразования частоты на каждом i -том каскаде. Тогда при анализе параметрического взаимодействия одной пары волн ω_i и ω_{i+1} влиянием всех остальных можно пренебречь.

С учетом вышесказанного, используя результаты работ [7,8], для напряженности электрического поля $(i+1)$ -ой поперечной волны получаем (в случае первоначально немодулированного потока):

$$E_{i+1} = \varepsilon_{i+1}^+(z) \exp\{j(\omega_{i+1}t - K_{i+1}z + \varphi_{i+1}^+)\} + \varepsilon_{i+1}^-(z) \exp\{j(\omega_{i+1}t - K_{i+1}z + \varphi_{i+1}^-)\} + \text{к.с.} \quad (6)$$

где $\varepsilon_{i+1}^+(z) = \varepsilon_{i+1}^+(0) nc(\alpha_i p_i z l \mu_i)$;

$$\varepsilon_{i+1}^-(z) = p_{i+1} \varepsilon_{i+1}^-(L) dc(\alpha_{i+1} p_{i+1} z l \mu_{i+1});$$

медленно меняющиеся по оси z амплитуды попутной ("+") и встречной ("-") электромагнитных волн с частотами ω_{i+1} ; $nc(xl\mu_i)$ и $dc(xl\mu_{i+1})$ - эллиптические функции Якоби модуля

$$\mu_i = \left\{ 1 - \frac{\omega_i}{\omega_{i+1}} [\varepsilon_{i+1}^+(0)]^2 p_i^2 [\varepsilon_i^-(L)]^{-2} \right\}^{1/2};$$

$\alpha_{i+1} = \varepsilon_{i+1}^-(L) \sqrt{A_{i+1} A_{i,j+1}}$ - инкремент пространственного нарастания волны ($\varepsilon_{i+1}^+, \omega_{i+1}$) на линейной стадии взаимодействия;

$$p_i = \frac{\varepsilon_i^-(0)}{\varepsilon_i^-(L)}; \quad K_{\varepsilon_{i+1}} = \frac{\omega_{i+1} - \omega_{i+1}}{v_0};$$

$$A_{i+1} = \frac{e\omega_{i+1} K_{\varepsilon_{i+1}}}{2mc^2 \omega_i \gamma K_{i+1}}; \quad A_{\varepsilon_{i+1}} = \frac{e\omega_p K_{\varepsilon_{i+1}}}{2mc^2 \gamma^{5/2} \beta \omega_i \omega_{i+1}}$$

$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ - релятивистский фактор, ω_p - ленгмюровская частота электронного потока.

При $z = L$ $E_{i+1}(L) = 0$ и, следовательно, $\varepsilon_{i+1}^+(L) = \varepsilon_{i+1}^-(L)$, а начальные фазы колебаний $\varphi_{i+1}^+ = \varphi_{i+1}^- + \pi$.

Формулы (6) получены в предположении, что с поперечными электромагнитными волнами взаимодействует медленная волна пространственного заряда (МВПЗ) разностной частоты первоначально немодулированного электронного потока. Считалось также, что пространственный заряд настолько большой (электронный поток сильноточный), что влиянием второй волны пространственного заряда - быстрой (ЕВПЗ) - можно пренебречь. Нетрудно убедиться, что такого же типа теоретические модели могут быть построены и в случае МВПЗ суммарной частоте при встречном и параллельном распространении исходных волн как для первоначально немодулированных, так и для модулированных по плотности электронных потоков.

Для каждой $(i+1)$ -ой попутной волны ограничение усиления, в рамках рассматриваемой модели, наступает за счет эффекта истощения энергии i -той волны накачки (если не учитывать нелинейные эффекты, связанные с нарушением условий синхронизма (2) за счет, например, потери кинетической энергии электронным пучком [4]), что учитывается соотношением Менли-Роу:

$$I_{i+1}^+(L)_{\max} \approx K_{i,i+1} I_i^-(L) \quad (7)$$

где $I_{i+1}^+(L)_{\max}$ -максимально достижимая интенсивность $(i+1)$ -ой попутной волны $(\varepsilon_{i+1}^+, \omega_{i+1})$ на границе $z=L$, $I_i^-(L)$ значения интенсивности встречной волны $(\varepsilon_i^-, \omega_i)$. Интересной физической особенностью режима, описываемого формулой (7) является то обстоятельство, что $I_{i+1}^+(L)_{\max}$ практически не зависит от начального значения амплитуды волны $(\varepsilon_{i+1}^+, \omega_{i+1})$ [7], определяющей лишь длину $L=L_{opt}$, на которой такой режим реализуется. Соответственно, такими же свойствами обладает и система с каскадным повышением частоты, для которой соотношение Мэнли-Роу также оказывается справедливым:

$$I_n^+(L)_{\max} \approx K_{1n} I_1^-(L) \quad (8)$$

Для трех каскадов, $\beta=0,82$ и $N_i=1$ из (5) и (8) получаем $\frac{I_n^+(L)_{\max}}{I_1^-(L)} \approx 10^3$. Очевидно, что с ростом числа каскадов преобразования растет и значение коэффициента K_{1n} . Однако при этом нельзя забывать, что формулы (6)-(8) получены в слабосигнальном приближении, т.е. предположении $I_i^{\pm} \ll I_e$, где I_e - интенсивность электронного потока.

Кривые зависимости $\frac{I_n^+(z)}{I_1^-(L)}$ для различных значений n приведены на рис. 2.

Если в усилительной модели (рис.1) прозрачную для излучения плоскость $z=0$ заменить на частично или полностью отражающую, то получим генераторный вариант исследуемой модели. На входе такой системы достаточно лишь задать амплитуду волны $(\varepsilon_{i+1}^+, \omega_{i+1})$ (или МВПЗ, в случае модулированного потока), считая, что в качестве "затравочного" сигнала на всех остальных частотах существуют собственные шумы системы. Тогда полагая все частоты ω_i близкими к собственным частотам ω_{pi} резонатора, образованного плоскостями $z=0$ и $z=L$, приходим к выводу, что в такой модели возможен процесс лавинообразного повышения частоты вверх. Описанный лавинообразный процесс прекратится на частоте ω_k , если условие генерации для k -того каскада

$$r_1 r_2 \exp(\alpha_{k-1} L) \geq 1 \quad (9)$$

перестает выполняться, если оно, конечно, выполняется для всех остальных частот $\omega_1 < \omega_k < \omega_2$. Здесь $r_{1,2}$ - коэффициенты отражения электромагнитных волн от плоскостей $x=0$ и $x=L$ соответственно. В общем случае коэффициенты $r_{1,2}$ являются функциями частот ω .

Возможны и комбинированные варианты усилительной и генераторной моделей. Например, полагая $r_1(\omega_k) = 0$ и $r_1(\omega_i \neq \omega_k) > 0$, когда условия генерации для всех частот $\omega_i \neq \omega_k$ считаются выполненными, получаем, что по отношению к волне частоты ω_k модель является усилительной, тогда как по отношению к волнам всех остальных частот - генераторной.

В заключение отметим, что описанный эффект каскадного повышения частоты может быть, по-видимому, экспериментально обнаружен в устройствах типа «Допплерзон» или «Убитрон» (последний соответствует предельному переходу $N_1 \rightarrow 0; \omega_1 \rightarrow 0$). Причем, если вопрос о полезности его использования, ввиду недостаточной изученности, можно считать пока открытым, то как паразитный эффект рассмотренное явление может быть обнаружено уже сейчас.



ЛИТЕРАТУРА

1. А.М.Калмыков, Н.Я.Коцаренко, В.В.Кулиш. Изв. вузов, Радиофизика, № 10.76, 1977.
2. А.М.Калмыков, Н.Я.Коцаренко, В.В.Кулиш. Письма в ЖТФ, 4, 820, 1978.
3. В.Л.Братман, Н.С.Гинзбург, М.И.Петелин. Письма в ЖЭТФ, 28, 207, 1978.
4. В.Л.Браташин, Н.С.Гинзбург, М.И.Петелин. ЖЭТФ, 49, 1129, 1979.
5. В.А.Вайнштейн. ЖТФ, 49, 1129, 1979.
6. В.А.Жураховский, В.В.Кудиш, В.Т.Черемис. Препринт №218, института электродинамики АН УССР. Из-во "Наукова думка", Киев, 1979.
7. А.М.Калмыков, Н.Я.Коцаренко, В.В.Кулиш. Радиофизика и электроника, №10, 2084, 1979.
8. Н.Я.Коцаренко, В.В.Кулиш. Радиотехника и электроника, №1, 214, 1980

ЛАЗЕРНЫЙ ЛУЧ ВЕДЕТ НА ПОСАДКУ¹

Под утро, когда закончились полеты и, несмотря на наступившую тишину, в голубе гудело, как в кабине взлетающего самолета, главный конструктор системы «Глисслада» доктор физико-математических наук профессор Игорь Бережной сказал:

— Ну вот, теперь я готов отвечать на ваши вопросы.

При других обстоятельствах я бы наверняка предпочел перенести разговор на более подходящее время. Но острое желание разобраться наконец в том, чему мы стали свидетелями этой ночью, оказалось сильнее.

...Заканчивался второй час полета, когда нас позвали в кабину самолета:

— Система включена.

Я стал искать глазами прибор, на который, как мне казалось, лазерные лучи должны были передавать с земли сигналы, позволяющие вести самолет на посадку. В кабине было много приборов, но ни один из них не походил на тот, что я надеялся увидеть.

БЕРЕЖНОЙ. Чтобы приземлиться с помощью системы «Глисслада», дополнительного оборудования в самолете не требуется. Суть в том, что лучи лазерных устройств, расположенных в аэропорту, «рисуют» определенную геометрическую фигуру, которая хорошо видна с воздуха.

Далеко впереди по курсу корабля, там, где по россыпи огней угадывался город, в ночном небе росли рубиновые усы. Это было удивительное зрелище. В научных лабораториях лазерные лучи выглядят жесткими, тающими в себе опасностью раскаленными нитями, а здесь они приветливо мерцали в ночном небе, манили, и самолет уверенно летел им навстречу. Прошло, однако, время, прежде чем мы приблизились к аэродрому.

БЕРЕЖНОЙ. Этой ночью мы увидели лучи «Глисслады» за 18 километров от посадочной полосы. Но если подняться выше, можно выйти на нее с большего расстояния. В основу системы положен древнейший принцип навигации— по линейным ориентирам, когда путник или мореплаватель держали курс на заметное дерево, скалу или звезду. У нас таким ориентиром служат лазерные лучи. По их «подсказке» летчик готовит самолет к посадке: проверяет траекторию снижения (глиссаду), расстояние до посадочной полосы, высоту пролета над контрольными точками (так называемыми дальним и ближним приводами), крен самолета и другие параметры.

По просьбе испытателей земля выключила обычные посадочные огни аэродрома. Рубиновые нити внизу стали гуще, сочнее. Две из них протянулись у самой земли, две поднимались вверх, с правой и левой стороны самолета, а одна простиралась в центре. Точно по ней и шел на посадку самолет. БЕРЕЖНОЙ. Первая пара лучей отмечает боковые границы посадочной полосы, вторая под определенным углом уходит вверх, образуя своеобразный воздушный коридор. За пределы которого самолет не должен выходить. Средний луч позволяет ориентировать самолет точно по курсу посадочной полосы и выдерживать

¹ «Гражданская авиация», №9, 1978 г.

нужную глиссаду снижения. Вам повезло — самолет вел опытный летчик-испытатель. Поэтому с воздуха система выглядела точно как на схеме, которую должен запомнить летчик. А у менее опытного пилота лучи все время бы «плясали», фиксируя даже полуметровое отклонение от заданной траектории.

Неожиданно зажглись еще два луча ниже плоскости глиссады и в одной точке пересеклись с центральным. Когда мы прошли над этим перекрестьем, в кабине прозвенел звонок, и штурман доложил: «Прошли дальний привод, высота двести, скорость заданная». Впереди показалось еще одно перекрестье. От него до начала посадочной полосы ровно тысяча метров.

БЕРЕЖНОЙ. Заметили, сколько приборов в кабине? Десятки. При посадке ночью и в сложных метеорологических условиях внимание летчика до предела напряжено, с определенного рубежа он должен установить визуальный контакт с землей, а в это время ему приходится отвлекаться на приборы, без показаний которых нельзя произвести посадку. Новая система хороша тем, что она не только не добавляет приборов в кабину, но и в определенной мере устраняет зависимость пилота от тех, что находятся в ней. Приземляясь с помощью «Глиссады», летчик и без звонка маркера и доклада штурмана, например, знает, что самолет на нужной высоте проходит над приводной радиостанцией. Система проста и понятна. Если «слепою» посадку по приборам летчики осваивают несколько десятков часов, то здесь не скольких заходов обычно достаточно для того, чтобы опытный пилот научился приземляться по лазерному лучу.

Самолет мягко коснулся посадочной полосы и, замедляя бег, покатился по аэродромной дорожке. Главный конструктор согласовал какие-то вопросы со специалистами, обслуживающими «Глиссаду» на земле, и наш АН-24 снова поднялся в воздух. В эту ночь он еще девять раз заходил на посадку, но уже не приземляясь — снижался до нескольких десятков метров, взмывал вверх, не коснувшись колесами бетона, и уходил на новый круг. Шла обычная испытательная работа.

БЕРЕЖНОЙ. За время испытаний летчики сделали на различных типах самолетов более трех тысяч заходов на посадку с помощью «Глиссады». В испытаниях принимали участие ученые, конструкторы, инженеры, медики. Последние, кстати сказать, подтвердили полную безопасность системы «Глиссада» для человека. На этот раз мы летали в ясную погоду. Еще заметней лучи в тумане. Летчик обнаруживает их значительно раньше, чем видит землю. Следовательно, у него в несколько раз больше времени, чтобы сориентироваться и произвести посадку.

«Глиссада» совмещается с любыми радиосистемами посадки, в том числе и автоматизированными. Изобретением заинтересовались специалисты из многих стран. Оно патентуется в 16 государствах, в частности в США, Англии, Франции, ФРГ, Японии.

ЛОЦМАНОМ СТАЛ ЛАЗЕР¹

Репортаж

Недавно куйбышевцы, гулявшие вечером во набережной Волги у речного вокзала, стали свидетелями необычного зрелища. Три тонких красных луча вдруг пронзили сгущающуюся темноту. Каких только предположений не строили очевидцы! Картина, действительно, была фантастическая. Но объяснение ей самое земное.

Так выглядит в действии система лазерной проводки судов — «Глиссада», созданная группой куйбышевских конструкторов.

Послужной описок у этого изобретения уже достаточно объемист: система оправдала себя в авиации для ориентации самолетов при посадке. Она запатентована в таких промышленно развитых странах Запада, как США, Англия, ФРГ, Франция, демонстрировалась на представительном «авиасалоне» в Ле-Бурже, на Лейпцигской ярмарке. И вот «Глиссада» уверенно осваивает новую стихию — водную.

Первые испытания были проведены в Ленинграде: на проводке судов по Неве. Следующим «полигоном» для опробования нового амплуа системы стала Волга.

— Трудностей при проведении судов по такой реке, как Волга, более чем достаточно. — обосновывает выбор начальник службы безопасности судовождения пароходства «Волготанкер» Г. А. Взятков. — Вот, к примеру, огни большого города. Для туристов, не спорю, они привлекательны, но для капитанов — одна морока. Порой створные огни с ними совсем сливаются. Вести судно приходится осторожно, гася скорость, полагаясь больше на опыт и сноровку экипажа. А уж луч лазера ни с чем не перепутаешь.

Наш разговор происходит на палубе теплохода «МО-108», приписанного к Куйбышевскому речному порту. На нем группа работников пароходства «Волготанкер» и куйбышевского участка судоходной инспекции Волжского бассейна вместе с создателями системы отправляются прямо к месту события. Курс — точка на горизонте, откуда расходятся лучи.

В рубке тесно от специалистов. Все взгляды прикованы к трем рубиновым линиям. С воды они выглядят совсем иначе. Центральный луч под строгим прямым углом устремился ввысь, по бокам симметрично расположились два других. Вертикальность главного — свидетельство того, что судно идет точно по курсу, как будто привязанное к лазерной нити.

Механик — капитан - -дублер Е.Н. Пятов поворачивает штурвальное колесо чуть вправо. Луч мгновенно реагирует, заметно отклонившись от перпендикуляра. Трудно избавиться от впечатления, что он как бы следит за судном. Однако ориентир неподвижен — просто мы уклонились от правильного курса.

— Вот это чувствительность! — одобрительно восклицает наш рулевой. — Двадцать лет. вожу суда, а с -такой легкостью в ориентировании не сталкивался. Тут и захочешь — не заблудишься.

И правда, идем мы с предельной точностью: луч перед нами буквально вонзился в черный купол неба над лесом. Характерная черта новой системы: чем хуже видимость, тем

¹ «Волжская коммуна», №129, 1984 г.

ярче лучи. Создатели ее утверждают, что в тумане ориентир может быть виден лучше, чем при нормальной погоде. Еще одно преимущество перед простыми створными огнями.

Есть и другие. Например, боковые лучи, показывающие фарватер, смогут вести суда по обширным прямолинейным пространствам водохранилищ, где створов невидно. Или, исходя из опыта ленинградских испытаний, можно применить систему лазерной проводки для прохождения шлюзов и мостов через Волгу. Это намного повысит безопасность и скорость судовождения на этих напряженных участках. Кстати, после опытной эксплуатации на Неве экономисты подсчитали, что применение лучевых лазерных ориентиров позволит ежегодно сберечь свыше 660 тысяч рублей за счет ускорения прохождения судов, а следовательно, и увеличения грузооборота. Для Волги — реки - труженицы, перевозящей миллионы тонн грузов, выгода наверняка будет, не меньше. Впрочем, решающее слово здесь за специалистами.

...Наше судно отправилось в обратный путь к речному вокзалу. Стоя на корме, мы любовались красивым зрелищем, которому, возможно, вскоре суждено стать повседневым. В наступившей ночи отчетливо видны лучи лазеров. Звучит команда по радиации — и лучи над Волгой гаснут. Эксперимент окончен. Три ночи наблюдали установку в работе речники. Первым рейсовым судном, которое прошло участок реки по лазерному ориентиру, стал мощный танкер «Волгонефть-129». Впечатление у экипажа - благоприятное. Потом были десятки других судов — и отзыв тот же. Когда вновь вспыхнут над волжской гладью лучи - «люцманы»? На этот вопрос должны ответить прежде всего те, кому с ними непосредственно работать — службы пароходства «Волготанкер», судоходная инспекция. И здесь невольно вспоминаются слова одного из создателей «Глиссады», произнесенные на борту судна, идущего навстречу лазерному лучу: «Люди всегда передвигались по линейным ориентирам. Пример — все дороги от «грунтовки» до «бетонки». Наша система воплотила в жизнь эту идею для летчиков. Следующий шаг — ее прописка на воде».

Ю. Изъятский.

«ГЛИССАДА» РАБОТАЕТ НА «ОТЛИЧНО»¹

О новой навигационной системе, созданной Куйбышевскими конструкторами.

Сегодня ночью — испытания новой навигационной системы. Приезжайте, это интересно, — пригласил старший капитан-наставник Куйбышевского участка судоходной инспекции. И. Л. Володченко.

И вот мы в рубке одного из судов речного порта. Пльвем вниз по Волге, в район створа Коровьего Яра. Мне объяснили, что здесь «стесненные условия судоходства». Ясно. Однако, в чем состоит программа испытаний, я пока взять в толк не могу.

— Сейчас судно поведете вы, — вместо ответа говорит мне Николай Лаврентьевич и, похоже, не шутит.

¹ «Волжская заря», №133, 1984 г.

Инструктаж буквально в два слова, и вот я, не имея никакого понятия о правилах судовождения, занимаю место штурмана.

— Право руля... Так держать... Чуть левее...

— Поздравляю. С такой точностью на этом сложном участке не водят суда даже самые опытные капитаны.

Володченко улыбается, но его, слова—теперь я уже понимаю это сам — абсолютная правда. Взгляните, пожалуйста, на снимок, сделанный во время моей штурманской практики. Вот так же хорошо лучи видны через окно рубки. Только в «натуре» они ярко-красные, и выглядят куда более эффектно, чем на черно-белой фотографии.

Систему, о которой идет речь, ее авторы назвали «Глиссадой». Это один из терминов в авиации им пользуются, когда говорят о траектории посадки самолета. Но «Глиссада» с большой буквы—слово, можно сказать, в навигации новое.

На суше мы движемся по линейным, очень удобным, ориентирам. Для пешехода такой «линией» является, в частности, тротуар, для автомобиля — шоссе, для поезда — рельсы и так далее. С экстремальными условиями — например, метель в степи, когда можно выйти только на спасительный огонек — мы сталкиваемся разве лишь в книгах или фильмах. А в воздухе и на воде так называемые точечные ориентиры для навигатора — норма. Когда же складывается неблагоприятная метеорологическая обстановка, исчезают и они. Туман, дымка, сильный снег — и вот не только ночью, но часто и днем не видно огней маяка, взлетно-посадочной полосы. Капитаны и штурманы речных и воздушных кораблей ведут их к цели слепо. У летчиков даже выражение есть: слепая посадка. Конечно, современные сверхчувствительные приборы помогут, выручат. И все-таки каждый пилот и судоводитель рад бы, подобно земным «извозчикам», видеть «дорогу». Впрочем, что мечтать о несбыточном! Даже в сказке волшебный клубок, разматывающий нить и указывающий путь, «применялся» только на суше. Оно и понятно: по небу и по водной глади линию не проведешь...

Это было верно до недавнего времени. Но вот появляется лазер, этот чудо-мастер на все руки. Он находит себе место в строительстве, авиации, сельском хозяйстве, медицине. Куйбышевские инженеры-конструкторы взялись «обучить» лазер еще одной полезной профессии. Они решили использовать известное свойство лазера: он, в отличие от лампочки, излучает световую энергию не в разные стороны, а узконаправленно. Вследствие этого лазерный луч выглядит в воздухе «светящейся нитью». Ее видно за десять, двадцать, а то и тридцать километров.

Лазер обратил на себя внимание еще и тем, что не боится дымки, смога, дождя. Они делают его лучи даже ярче (лазер рассеивает свет на аэрозолях воздуха — частицах, находящихся в нем во взвешенном состоянии). Так называемую метеорологическую дальность видимости лазер в самых плохих погодных условиях повышает в несколько раз.

Итак «несбыточная» мечта соединилась с реальной идеей; теперь у навигаторов есть отличный линейный протяженный ориентир. Ленинградцы назвали «Глиссаду» лазерным лоцманом. Очень выразительно, но, пожалуй, все-таки не совсем точно. Лоцман ведь находится на борту, он должен, как говорится, попасть в точку, а для этого сначала ее «поймать». Когда ведет «Глиссада», получается наоборот: «точка», в которой расположена система, сама ищет судно, «вызывает его на себя».

«Глиссада» — универсальная навигационная система, но первоначально «сделала себе имя» в авиации. Она отлично работает на режиме взлета и посадки самолетов.

Как известно, это самый трудный и ответственный режим, недаром воздушный лайнер ведет на посадку обязательно командир. При этом он следит за массой приборов, мгновенно обобщая их показания. Теперь летчику нужно контролировать только прибор скорости; остальной информацией его обеспечивает «Глиссада». Летчик простую комбинацию лучей в виде символа, которая однозначно определяет положение самолета в пространстве. Безопасность полетов существенно повышается, а психофизиологическая перегрузка летчика при посадке — намного меньше.

Кроме того, «Глиссада» не требует установки на борту самолета дополнительных приборов, работает без светотехнического оборудования; стоимость системы, затраты на ее установку и эксплуатацию в несколько раз ниже стоимости систем автоматической посадки и светотехнического оборудования современных аэродромов.

Перспективная новинка вызвала большой интерес за рубежом. Система запатентована в США, Англии, Франции, ФРГ, Японии, Аргентине, Австралии, во многих других странах всех континентов.

У нас в стране она проходит сейчас опытную эксплуатацию на ряде аэродромов.

Теперь создан и «водный» вариант «Глиссады».

— Хотелось бы отметить, что в этой важной работе самое активное участие принимают молодые специалисты,

— говорит главный конструктор системы. — Они предложили и успешно применили целый ряд интересных решений

Мы знакомимся с инженерами А. Е. Мельниковым и В. Л. Сафроновым. Александра Евгеньевича как ответственного за внедрение ЛСПС (лазерная система проводки судов) просим сначала рассказать об испытаниях, проводившихся ранее на Неве.

— Да, первыми из речников обратились к нам за помощью ленинградцы, — рассказывает А. Е. Мельников.

— Вести суда ночью по Неве очень трудно. Знаменитая своими капризами «ленинградская погода», сильные свальные течения на поворотах, насыщенный грузопоток и накопец—мосты. Разводной пролет — сорок-пятьдесят метров, а ширина современного судна до тридцати метров. Тут требуется высокое мастерство опытных лоцманов, нехватка которых в Ленинграде стала серьезной проблемой... Свою систему мы установили на трех мостах, в самых трудных участках. Судоводители высоко оценили надежность ориентации, которую обеспечивает «Глиссада». Система дала и, значительный экономический эффект: около 700 тысяч рублей в год. По результатам испытаний в Министерстве речного флота РСФСР состоялось заседание научно-технического совета, который рекомендовал систему к широкому внедрению на реках.

...И вот «Глиссада» испытывается на Волге. Здесь тоже немало участков, где ночью и в плохую погоду ориентация очень затрудняется. Новая система призвана помочь судоводителям при заходе в шлюзы, каналы, аванпорты гидроузлов, в портовой зоне, где береговая «иллюминация» просто-напросто «затмевает» огни маяков.

В районе такого участка на берегу устанавливаются лазерные источники. Делается геодезическая привязка комбинации лучей; они сориентированы так, что боковые задают границы хода судов, а центральный луч — ось проводки.

Здесь, как и в системе посадки самолетов, остроумно использован принцип проективной геометрии. «Глиссада» как бы следит за кораблем и «машет» штурману лучами. Это

иллюзия: символ как раз неподвижен, а смещается относительно него судно. Прощая, ты уже детали. Главное в том, что «лазерный диспетчер» ни на секунду не теряет близости и в любых условиях ведет суда уверенно и точно.

...Испытания прошли успешно. Авторитетная комиссия, в которую входили главные специалисты соответствующих служб парокходства «Волготанкер», Волжского объединенного речного парокходства, судоходной инспекции Волжского бассейна и других организаций, пришла к выводу: лазерная навигационная система имеет большие возможности и непременно должна привиться на «главной улице» России. Ну что ж, остается пожелать, чтобы «Глиссада» как можно быстрее получила «прописку» там, где и родилась.

В. КНЯЗЕВ

«ГЛИССАДА» ИГОРЯ БЕРЕЖНОГО¹

Идея создания лазерной взлетно-посадочной системы возникла а 1970 году, а летом (1971 года начались летные исследования.

Созданная в Самаре 20 лет назад навигационная установка прокладывает путь к ее широкому применению в гражданской и военной авиации, в морском и речном флотах страны. Заинтересовались ею и многие зарубежные специалисты.

Ярко-красные лазерные лучи «Глиссады» надежно несут лоцманскую службу, поагая воздушным и морским капитанам вести свои суда к земным причалам.

Придумал лазерного лоцмана и заставил его служить людям коллектив конструкторов во главе с доктором физико-математических наук профессором Игорем Александровичем Бережным.

21 апреля исполняется 57 лет со дня его рождения, 10 лет со дня трагической гибели...

На счету доктора Бережного около 300 научных трудов и разработок, многие из которых и сегодня остаются в ряду перспективных. За сравнительно недолгую научную и опытно-производственную деятельность он награжден двумя орденами «Знак Почета» и орденом Трудового (Красного Знамени (посмертно).

Родился И. А. Бережной в г. Балашове Саратовской области. В шестидесятых годах семья переехала на жительство в г. Энгельс. В школьные годы Игорь увлекался физикой, математикой, вечерами пропадал в авиамodelьном кружке, где мастерил различные типы военных и гражданских самолетов, часами мог пропадать на испытательной площадке, где кружковцы вели «воздушные бои», проверяя на прочность юркие крылатые модели.

В 1951 году, успешно сдав вступительные экзамены, Игорь начал учебу в Куйбышевском авиационном институте.

После его окончания с 1957 по 1967 годы работал инженером, инженером-конструктором Воронежского авиационного предприятия, занимался научными изысканиями в области прикладной механики и технической физики.

¹ «Волжская заря», №78, 1991 г.

Его всегда отличали стремление как можно быстрее и эффективнее применить научные знания на практике, незаурядные организаторские способности, умение находить общий язык с людьми, самоотверженность в работе.

По рекомендации генерального конструктора самолетов А. Н. Туполева в 1967 году И. А. Бережной направляется в Куйбышев в качестве главного конструктора КБ шасси вертолетов и самолетов, а в 1973 году им вновь создано конструкторское бюро автоматических систем управления (К'БАС), которое и сегодня работает над реализацией многих его идей.

...4 февраля 1981 года И. А. Бережной трагически погиб. За десять лет эта история обросла различными домыслами, предположениями и даже сплетнями. Бог — судья тем людям, которые пытаются очернить имя этого человека.

Поделюсь с читателями только той информацией, которую мне удалось получить. Она, конечно, минимальна, но позволяет кое-что понять.

Доктор Бережной, бывая в служебных командировках в Москве, выполнял различные поручения, просьбы своих сослуживцев. Помогал, в частности, добывать дефицитные лекарства, в которых нуждались его коллеги, многие из них, как и он сам, трудились по несколько лет без отпусков и выходных дней, не заботясь о собственном здоровье.

Известен случай, когда медицинская комиссия решила «списать» опытного летчика-испытателя по болезни. Предстояла сложная операция. И. А. Бережной, пользовавшийся авторитетом среди ученых Академии медицинских наук СССР, смог получить редкий в ту пору японский препарат, с помощью которого медики вылечили летчика без операции. Этот летчик-испытатель и сегодня в строю.

Очередная поездка Игоря Александровича в Москву не была исключением. И в этот раз он обещал людям свою помощь...

...Расчет террористов был прост. Взрывное устройство, закамуфлированное под посылку с лекарством, было передано водителю автомашины, в которой И. А. Бережной должен был после совещания в Министерстве авиационной промышленности СССР ехать в гостиницу. Никакого подозрения посылка не вызвала ни у водителя, ни у Игоря Александровича, потому что передана была знакомым человеком...

Насколько мне известно, уголовное дело по данному происшествию Генеральной прокуратурой СССР приостановлено. Многие обстоятельства остаются и по сей день неразгаданной тайной.

...Ежегодно, в дни рождения и трагической гибели И. А. Бережного, бывшие коллеги, друзья и родные посещают его могилу на городском кладбище, что у села Рубежное. Помнят этого уважаемого и любимого ими человека.

В.Ксюшин

СПИСОК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

д.т.н. Бережного И.А.

№ п/п	Наименование трудов	Рукопись или печатные	Название изд. или журнала, (№, год)	К-во стр.	Фамилия соавтора
1	2	3	4	5	6
1.	"Осциллографический метод определения скорости при соударении"	Печатн.	"Бюл. перед. опыта" сент., 1957г.	4	
2.	"О принципах измерения моментов при испытании самоконтрающихся гаек"	Печатн.	"Бюл. перед. опыта", дек. 1957г.	5	
3.	"Динамические головки"	ПП ечатн.	"Авиационная промышленность" № 1, 1961г.	2	Совместно с соавтором
4.	"Реверсор для испытания образцов"	Печатн.	"Заводская лаборатория" № 9, 1962г.		
5.	"Расчет параметров пружин"	Печатн.	"Авиационная промышленность", № 1, 1963г.	1	
6.	"О кручении призматических стержней из идеально пластического материала с учетом микронапряжений"	Печатн.	"ПМТФ" ДН СССР, № 5, 1963г.	4	Совместно с соавтором
7.	"О влиянии вязкости на механическое поведение пластических сред"	Печатн.	ДАН СССР, т. 163, № 3, 1965г.	5	Совместно с соавтором
8.	"О линеаризации соотношений теории пластических сред, свойства которых зависят от времени"	Печатн.	"Мех. тв. тела", № 3, АН СССР, 1966г.	4	
9.	"Некоторые вопросы теории пластических сред, свойства которых зависят от времени"	Диссерт. на соиск. уч. степ. к.ф.-м. наук	июнь, 1966г.	110	

1	2	3	4	5	6
10	О поведении функций нагружения для сред, свойства которых зависят от времени"	Печатн.	Мех.тв.тела № 1, АН СССР 1967г.	5	
11	"О применении функций нагружения в некоторых задачах движения экипажа"	Печатн.	Мех.тв.тела № 5, АН СССР, 1967г.	6	
12	"О датчике давления повышенной чувствительности"	Печатн.	Измерительная техника* № 1, 1968г.	2	Совместно с соавтором
13	"О сопротивлении некоторых опор экипажа при движении по поверхности"	Печатн.	Мех.тв.тела № 4, АН СССР 1968	4	
14	"Получение частотных характеристик многомассовых систем применительно к самолетным гидроагрегатам"	Печатн.	Авиационная промышленность", № 5, 1968г.	3	Совместно с соавтором
15	"О некотором инвариантном представлении связи между векторами силы и скорости для двумерной пластической модели"	Печатн.	Мех.тв.тела № 5, АН СССР, 1968г.	3	
16	"О некоторых особенностях преобразования сингулярных функций нагружения"	Печатн.	Изв.АН СССР МТТ, № 4, 1969г.	4	Совместно с соавтором
17	"О диссипативных функциях в теории упрочняющихся пластических сред"	Печатн.	Изв.АН СССР, МТТ, № 5, 1969г.	4	Совместно с соавторами
18	"Некоторые результаты экспериментального исследования двумерной пластической модели на примере колеса с упругой шиной"	Печатн.	Изв.АН СССР, МТТ, № 1, 1970г.	4	Совместно с соавтором
19	"О деформационных моделях теорий пластичности и сложных сред"	Печатн.	ПММ АН СССР т.34, № 3, 1970г.	5	Совместно с соавторами
20	"О диссипативной функции теории вязко-пластических сред"	Печатн.	АН СССР Пробл. мех.тв.деформ.тела", сб.посв.академ.В.В.Новожилу, 1970г.	4	Совместно с соавторами
21	"Некоторые общие вопросы теории пластичности и ее приложение в квазипластических задачах движения колеса по поверхности с трением"	Печатн.	Диссертация на соискание ученой степени д.ф.м.н., 1971г.	160	

1	2	3	4	5	6
22	On constructing models of cohesionless media by specifying the dissipation functi	Печатн.	АН ПНР, Труды Международного (Симпозиума по основам пластичности". г.Варшава, 1972г.	8	Совместно с соавторами
23	"0 функции анизотропии в теории упрочняющихся сред"	Печатн.	АН СССР, Сб., посвящ. академику Мухелишвили, 1972г.		
24.	"0 поверхностях нагружения сложных жестко-пластических моделей"	Печатн.	Тр.НИИ.матем ВГУ, в. 10, 1973г.	8	Совместно с соавтором
25	"0 поверхностях нагружения сложных жестко-пластических моделей"	Печатн.	Тр.НИИ матем ВГУ, в. 10, 1973г.		Совместно с соавтором
26	"0 некоторых моделях сложных сред с управляемыми параметрами"	Печатн.	Тр.КуАИ вып.66, 1973г.	6	Совместно с соавтором
27	"0 функции анизотропии двумерных пластических моделей"	Печатн.	СО АН СССР, Дин. спл. сред, вып. 13, 1973г.	6	Совместно с соавтором
28	"0 моделях Максвелла с управляемой вязкостью"	Печатн.	СО АН СССР, Дин. спл. с ред., т.13, 1973г.	5	Совместно с соавтором
29	"0 построении функций нагружения квазипластической модели группы колес и результаты некоторых опытов"	Печатн.	МТТ.Изв. АН СССР, № 4, 1974г., с.175		Совместно с соавтором
30	"0 некоторых моделях, построенных на основе механизмов упругости, вязкости и пластичности с переменными определяющими параметрами"	Печатн.	Изв. АН СССР, МТТ, № 1, 1974г., с.36	8	Совместно с соавторами
31	"0 функции нагружения для идеаль- но-пластических моделей"	Печатн.	АН СССР, Избр.проб. приклад. мех. Сб.посв.академ Челомею В.Н. ВИНТИ, 1974г.	5 #	Совместно с соавторами
332	"0 течении жидкости с управляемой вязкостью"	Печатн.	ДАН СССР, т.223, № 3, 1975г.	5	Совместно с соавторами

1	2	3	4	5	6
33	"О построении поверхностей нагружения сложных жестко—пластических моделей"	Печати.	АН СССР, Сб. поев. академику Работнову Ю.Н. 1975г.	9	Совместно с соавторами
34	"О некоторых экспериментах со сходящимися кольцевыми волнами на поверхности тяжелой жидкости"	Печати.	ДАН СССР, № 223, № 4, 1975г.	3	Совместно с соавторами
35	"Об одной возможности применения электроионизационных CO ₂ —лазеров для целей лазерного термоядерного синтеза"	Печати.	АН СССР Письма в ЖТФ, т.1.В.24, 1975г.	3	Совместно с соавтором
36:	"Об определяющих неравенствах в теории пластичности"	Печати.	ДАН СССР, т.227 № 4, 1976г.	3	Совместно с соавтором
37	"Пластичность и механика некоторых диссипативных систем"	Рукопись	1976г.	156	Совместно с соавторами
38	"Лазерный луч ведет на посадку"	Печати.	Советский Союз, № 9, 1977г.	2	
39	"Глиссада - лазерная система посадки самолетов"	Печати.	"Природа" № 11, 1977г., с. 96		
40	"Диссипативная функция в теории пластичности"	Печати.	Механика деформируемого твердого тела. Межвуз.сб. ГКУ, Куйбышев, 1977г.,с.5-22	18	Совместно с соавтором
41	"Лазер ведет на посадку"	Печати.	Гражданская авиация, № 9, 1978г.	2	
42	"Амортизатор шасси для летательных аппаратов"		А.с.№ 238354 от 12.12.68.		Совместно с соавтором
43	"Система автоматического торможения колес"		А.с.н№ 241231 от 22.01.69.		Совместно с соавтором
44	"Тормоз для авиационных колес"		А.с. № 255059 от 04.08.69.		Совместно с соавтором
45	"Компрессор"		А.с.№ 278005 от 22.05.70.		Совместно с соавторами
46	"Способ торможения самолета"		А.с.№ 291831 ри 23.10.70.		Совместно с соавторами
47	"Система для моделирования управляемости и рулевых характеристик самолета на взлетно-посадочной полосе"		А.с.№ 292557 от 23.10.70.		Совместно с соавторами

1	2	3	4	5	6
48	«Летательный аппарат укороченного взлета и		А.с. № 296388 от 03.12.70.		Совместно с соавторами
49	«Механизм на воздушной подушке летательного аппарата»		А.с. № 296384 от 03.12.70.		Совместно с соавторами
50	«Устройство крепления мягкой оболочки к жесткому корпусу»		А.с. № 308628 от 13.04.71		Совместно с соавторами
51	Спецтема		А.с. № 56636 от 28.05.71		Совместно с соавторами
52	«Бескамерное колесо шасси летательного аппарата»		А.с. № 319178 от 03.08.71.		Совместно с соавторами
53	«Сферическое бескамерное колесо»		А.с. № 319179 от 03.08.71.		Совместно с соавторами
54	«Эластичное ограждение полости воздушной подушки летательного аппарата»		А.с. № 330714 от 03.12.71.		Совместно с соавторами
55	«Устройство для торможения и управления аппарата на воздушной подушке»		А.с. № 331634 от 13.12.71.		Совместно с соавторами
56	«Бескамерное колесо»		А.с. № 333810 от 29.12.71.		Совместно с соавторами
57	«Взлетно-посадочное устройство летательного аппарата на воздушной подушке»		А.с. № 333813 от 29.12.71.		Совместно с соавторами
58	«Взлетно -посадочное устройство самолета»		А.с. № 324806 от 01.10.72.		Совместно с соавторами
59	Спецтема		А.с. № 61706 от 10.03.72.		Совместно с соавторами
60	«Механизм разворота колес шасси летательного аппарата»		А.с. № 342430 от 17.03.72.		Совместно с соавторами
61	«Амортизатор шасси летательного аппарата»		А.с. № 342431 от 17.03.72.		Совместно с соавторами
62	Спецтема		А.с. № 63174 от 15.05.72.		Совместно с соавторами
63	«Гидроусилитель»		А.с. № 352036 от 19.06.72.		Совместно с соавторами
64	Спецтема		А.с. № 64478 от 26.07.72.		Совместно с соавторами
65	Спецтема		А.с. № 64499 от 26.07.72.		Совместно с соавторами
66	«Механизм разворота колес шасси самолета»		А.с. № 361121 от 18.12.72.		Совместно с соавторами
67	«Устройство для частичной разгрузки шасси летательного аппарата»		А.с. № 364503 от 12.12.72.		Совместно с соавторами
68	Спецтема		А.с. № 66086 от 19.10.72.		Совместно с соавторами
69	Спецтема		А.с. № 66102 от 19.10.72.		Совместно с соавторами

1	2	3	4	5	6
70	Спецтема		А.с. №66285 от 12.12.72.		Совместно с соавторами
71	Спецтема		А.с.№66741 от 02.11.72.		Совместно с соавторами
72	Спецтема		А.с.№64460 от26.07.72.		Совместно с соавторами
73	Спецтема		А.с.№68621 от 01.02.73.		Совместно с соавторами
74	Спецтема		А.с.№384183от 07.03.73		Совместно с соавторами
75	Спецтема		А.с.№ 69608 от 09.03.73.		Совместно с соавторами
76	Спецтема		А.с.№69604 от09.03.73.		Совместно с соавторами
77	Спецтема		А.с.№70272 от10.03.73.		Совместно с соавторами
78	Спецтема		А.с.№71928 от 14.06.73.		Совместно с соавторами
79	"Вихревая труба"		А.с.№408522о т28.08.33		Совместно с соавторами
80	Спецтема		А.с.№75517 от 10.12.73.		Совместно с соавторами
81	Спецтема		А.с.№69610 от09.03.73.		Совместно с соавторами
82	Спецтема		А.с.№76783 от 18.01.74		Совместно с соавторами
83	"Электронизационный оптический квантовый генератор"		А.с.№42975от2 8.01.74.		Совместно с соавторами
84	Спецтема		А.с.№ 77786 от 14.03.74		Совместно с соавторами
85	Спецтема		А.с.№ 82328 от 01.10.74.		Совместно с соавторами
86	Спецтема		А.с.№ 83519 от 12.11.74.		Совместно с соавторами
87	Спецтема		А.с.№ 83930 от 09.12.74.		Совместно с соавторами
88	Спецтема		А.с.№ 84177 от 12.12.74.		Совместно с соавторами
89	"Лазерная курсо—глиссандная посадочная система"		а.с. №623335 от 15.05.78.		Совместно с соавторами
90	"Способ посадки"		а.с.№623336 от 15.05.78.		Совместно с соавторами
91	Спецтема		А.с.№ 84728 от 15.01.75.		Совместно с соавторами
92	Спецтема		А.с.№ 86545 от 20.03.75.		Совместно с соавторами
93	Спецтема		А.с.№ 90153 от 09.09.75.		Совместно с соавторами
94	Спецтема		А.с.№ 91525		Совместно с

			от 05.11.75.		соавторами
1	2	3	4	5	6
95	Спецтема		А.с.№ 90370 от 21.11.75.		Совместно с соавторами
96	Спецтема		А.с.№ 91809 от 01.12.75.		Совместно с соавторами
97	Спецтема		А.с.№ 92233 от 08.12.75.		Совместно с соавторами
98	"Газовый лазер"		А.с.№511778 от 23.12.75		Совместно с соавторами
99	"Система посадки"		А.с. №623337 от 15.05.78.		Совместно с соавторами
100	Взлетно-посадочная система для летательных аппаратов и способ осуществления взлета и посадки по ней"		Заявка №2069154/23 Полож. решен. от 19.09.75.		Совместно с соавторами
101	Спецтема		А.с. 93300 от 04.02.76		Совместно с соавторами
102	Спецтема		А.с.№ 92531 от 02.01.76.		Совместно с соавторами
103	Спецтема		А.с.№ 93300 от 04.02.76.		Совместно с соавторами
104	"Система посадки самолета"		А.с.№ 516247 от 05.02.76.		Совместно с соавторами
105	"Установка для сферического нагрева плазмы лазерным излучением*		А.с.№ 528831 от 21.05.76.		Совместно с соавторами
106	Взлетно-посадочное		А.с.№ 536076 от 28.07.76.		Совместно с соавторами
107	"Аппарат на воздушной подушке"		А.с.№ 539796 от 27.08.76.		Совместно с соавторами
108	"Взлетно -посадочное устройство летательного аппарата на воздушке"		А.с.№ 539797 от 27.08.76.		Совместно с соавторами
109	Спецтема		А.с.№ 99588 от 01.10.76.		Совместно с соавторами
110	Спецтема		А.с.№ 99670 от 04.10.76.		Совместно с соавторами
111	Спецтема		А.с.№ 99840 от 05.10.76.		Совместно с соавторами
112	Спецтема		А.с.№ 100994 от 05.11.76.		Совместно с соавторами
113	Спецтема		А.с.№ 101385 от 03.12.76.		Совместно с соавторами
114	"Электроионизационный лазер"		А.с.№ 553893 от 13.12.76.		Совместно с соавторами

1	2	3	4	5	6
115	"Система посадки самолетов"		Заявка № 2309278 Полож. решен, от 05.10.76.		Совместно с соавторами
116	Спецтема		А.с.№ 104555 от 05.04.77г.		Совместно с соавторами
117	"Система для управления подъемной силой воздухоплавательного аппарата"		А.с.№ 557548 от 14.01.77		Совместно с соавторами
118	"Источник электронов"		А.с.№ 562163 от 22.02.77.		Совместно с соавторами
119	Спецтема		А.с.№ 104740 от 07.04.77		Совместно с соавторами
120	«Посадочные огни»		А.с.№ 567259 от 07.04.77.		Совместно с соавторами
121	"Смеситель газодинамического лазера"		А.с.№ 575984 от 14.06.77.		Совместно с соавторами
122	"Магнито газодинамический лазер"		А.с.№ 576870 от 21.06.77.		Совместно с соавторами
123	"Электронизационный проточный лазер"		А.с.№ 586767 от 07.09.77.		Совместно с соавторами
124	"Способ посадки и устройство для его осуществления"		А.с.№ 592104 от 15.10.77.		Совместно с соавторами
125	"Газовый лазер"		А.с.№ 593610 от 21.10.77.		Совместно с соавторами
126	Спецтема		А.с.№ 110140 от 02.11.77.		Совместно с соавторами
127	"Система посадки"		А.с. №642926 от 21.09.78.		Совместно с соавторами
128	«Устройство для управления положением зеркала»		А.с.№607481 от 20.01.78.		Совместно с соавторами
129	"Лазерная система наведения"		А.с. №614606 от 14.03.78.'		Совместно с соавторами
130	"Система посадки самолетов"		А.с. №758691 от 28.04.80.		Совместно с соавторами
131	"Термоакустическая труба"		А.с.№6241220 т 22.05.78.		Совместно с соавторами
132	"Способ измерение скорости и устройство для его осуществления"		А.с.№634207 от 22.07.78.		Совместно с соавторами
133	Спецтема		А.с.№ 112205 от 06.01.78.		Совместно с соавторами
134	"Отражатель"		А.с.№ 609426 от 07.02.78.		Совместно с соавторами
135	Спецтема		А.с.№ 116193 от 10.05.78.		Совместно с соавторами
136	Спецтема		А.с.№ 118217 от 06.07.78.		Совместно с соавторами

1	2	3	4	5	6
137	"Бескомпрессорная система прокачки рабочего газа квази-непрерывного лазера"		А.с.№ 450540 от 19.07.78.		Совместно с соавторами с
138	"Способ проверки герметичности"		а.с. №639400 от 28.08.78.		Совместно с соавторами с
139	"Виброизолированная платформа"		а.с.№647744 от 20.10.78.		Совместно с соавторами с
140	"Электроионизационный лазер"		а.с.№654116 от 28.11.78.		Совместно с соавторами с
141	Газовый лазер"		а.с.№660528 от 14.07.77.		Совместно с соавторами с
142	"Электроионизационный лазер"		а.с.№659038 от 28.12.78.		Совместно с соавторами с
143	"Лазерная система наведения "		А.с.№ 692240 от 22.06.79.		Совместно с соавторами с
144	"Система навигации на внутренних водных путях"		А.с.№722020 от 21.11.79.		А.с.№ 692240 от 22.06.79.
145	Спецтема		А.с. №120605 от 07.09.78.		А.с.№ 692240 от 22.06.79.
146	Спецтема		А.с.№120114 от 04.11.78.		А.с.№ 692240 от 22.06.79.
147	"Установка для взрыва проволок"		а.с. №654113 от 14.07.79		Совместно с соавторами с
148	Спецтема		а.с.№127408 от 05.10.78		Совместно с соавторами с
149	"Система посадки"		а.с.№683176 от 11.05.79.		Совместно с соавторами с
150	Спецтема от 05.02.79.		а.с.№125672 от 05.02.79.		Совместно с соавторами с
151	"Шасси на воздушной подушке для летательных аппаратов". Патент США.		п.№ 3981462 от 21.09.76.		Совместное с соавторами с
152	"Шасси на воздушной подушке для летательных аппаратов" Патент Канады.		п.№ 1010478 от 17.05.77.		Совместно с соавторами с
153	"Шасси на воздушной подушке для летательных аппаратов" Патент Англии.		п.№ 1465517 от 22.07.77.		Совместно с соавторами с
154	"Взлетно-посадочная система летательных аппаратов и способ осуществления взлета" Патент США (основная)		п.№ 4063218 от 13.12.77.		Совместно с соавторами с
155	"Взлетно-посадочная система летательных аппаратов и способ осуществления взлета" (выделенная) Патент США	Печати	п.№ 4209768 от 19.11.80.		Совместно с соавторами с

1	2	3	4	5	6
157	"Шасси на воздушной подушке для летательных аппаратов" Патент ФРГ.	Печатн.	п. № 2434789 от 29.09.78.		Совместно с соавторами
158	"Шасси на воздушной подушке для летательных аппаратов*" Патент Франции	Печатн.	п. № 7429403 от 09.06.78.		Совместно с соавторами
159	"Взлетно-посадочная система летательных аппаратов и способ осуществления взлета и посадки по ней" Патент Англии	Печатн.	п. № 1523887 от 15.09.78.		Совместно с соавторами
160	"Взлетно-посадочная система для летательных аппаратов и способ осуществления взлета и посадки по ней" Патент Индии	Печатн.	п. № 145817 от 30.12.78.		Совместно с соавторами
161	"Взлетно-посадочная система для летательных аппаратов и способ осуществления взлета и посадки по ней" Патент Франции	Печатн.	п. № 7532357 от 27.08.79.		Совместно с соавторами
162	"Взлетно-посадочная система для летательных аппаратов и способ осуществления взлета и посадки по ней" Патент Австралии (основная)	Печатн.	п. № 498432 от 29.12.79.		Совместно с соавторами
163	"Взлетно-посадочная система для летательных аппаратов и способ осуществления взлета и посадки по ней" Патент Аргентины	Печатн.	п. № 216428 от 28.12.79.		Совместно с соавторами
164	"Взлетно-посадочная система для летательных аппаратов и способ осуществления взлета и посадки по ней" Бразилия.	Печатн.	Реш.о выдаче патента от 16.09.80.		Совместно с соавторами
165	Спецтема	Печатн.	а.с.№ 128589 от 06.04.79.		Совместно с соавторами
166	"Одномодовый лазер"	Печатн.	а.с.№ 714978 от 15.10.79.		Совместно с соавторами
167	"Система посадки самолетов"	Печатн.	з.№ 2653441 Полож. решение от 29.01.79.		Совместно с соавторами
168	"Посадочные огни"	Печатн.	а.с.№ 713129 от 05.10.79.		Совместно с соавторами

1	2	3	4	5	6
169	Спецтема	Печатн.	а.с. № 132844 от 02.08.79.		Совместно с соавторами
170	"Эмульсионная форсунка"	Печатн.	а.с.№ 730370 от 07.01.80.		Совместно с соавторами
171	Спецтема	Печатн.	а.с.№ 134033 от 04.09.79.		Совместно с соавторами
172	Спецтема	Печатн.	а.с.№ 135302 от 04.10.79.		
173	Спецтема	Печатн.	а.с.№ 137480 от 05.12.79.		Совместно с соавторами
174	Спецтема	Печатн.	а.с.№ 136891 от 11.11.79.		
175	Спецтема	Печатн.	а.с.№ 137106 от 12.11.79.		Совместно с соавторами
176	Спецтема	Печатн.	а.с.№ 136764 от 11.11.79.		Совместно с соавторами
177	"Устройство контроля взаимного положения отражающих элементов"	Печатн.	а.с.№ 745239 от 07.03.80.		Совместно с соавторами
178	Спецтема	Печатн.	а.с.№ 138536 от 07.01.80.		Совместно с соавторами
179	Спецтема	Печатн.	а.с.№ 138535 от 07.01.80.		Совместно с соавторами
180	"Угломерное устройство"	Печатн.	а.с.№ 766306 от 28.05.80.		Совместно с соавторами
181	"Система посадки самолетов"	Печатн.	з.№ 2723883 Полож. решение от 25.12.79.		Совместно с соавторами
182	"Промышленный образец" Лазерный маяк	Печатн.	а.с.№ 9716 от 15.01.80.		Совместно с соавторами
183	Спецтема	Печатн.	а.с.№ 147607 от 06.08.80.		Совместно с соавторами
184	"Газовый лазер"	Печатн.	а.с.№ 807966 от 20.10.80.		Совместно с соавторами
185	"Система посадки летательных аппаратов"	Печатн.	а.с.№ 801451 от 01.01.81.		Совместно с соавторами
186	"Способ активации дианазизирующих яиц рачков артемии салины"	Печатн.	з.№ 2836439 от 22.04.801 Полож. решение		Совместно с соавторами
187	"Устройство для определения пара метров движения объекта"	Печатн.	Полож. решение от 25.12.79.		Совместно с соавторами
188	"Способ измерения параметров движения изображения объекта со случайным распределением яркостей"		а.с.№ 753244 от 07.04.80.		Совместно с соавторами

1	2	3	4	5	6
189	"Способ посадки летательного аппарата"		з.№ 2776639 Пол.реш.от 26.11.80.		
190	"Система посадки самолетов"		з.№ 2940176 Полож. реше- ние от 30.12.80.		Совместно с соавторами
191	Спецгема		а.с.№ 154832 от 02.02.81. по з.№ 2266592		Совместно с соавторами 1
192	Спецгема		з.№ 2275631 от 31.03.81. а.с. 12275631 от 04.02.81.		Совместно с соавторами
193	"Взлетно-посадочная система для летательных аппаратов и способ осуществления взлета и посадки по ней" Канада		п.№ 1094669 от 27.01.81.		Совместно с соавторами
194	"Взлетно-посадочная система для летательных аппаратов и способ осуществления взлета и посадки по ней" США		п.№ 4249158 от 03.02.81.		Совместно с соавторами
195	"Взлетно-посадочная система для летательных аппаратов и способ осуществления взлета и посадки по ней." США.		п.№ 4259658 от 31.03.81.		Совместно с соавторами

ОТ КБ ШАССИ ДО ОЛО «АВИААГРЕГАТ»

В 1965 году приказом Министерства Авиапрома было создано Конструкторское бюро шасси самолетов и вертолетов. Главным конструктором вновь образованного конструкторского бюро был назначен, тогда совсем еще молодой, тридцатилетний, Бережной Игорь Александрович. С присущими ему энергией и упорством Игорь Александрович взялся за создание ОКБ. В самые кратчайшие сроки, практически на пустом месте, им был создан трудоспособный коллектив.

Это был не столько коллектив конструкторов-разработчиков новой техники, сколько коллектив единомышленников. Сам молодой, Игорь Александрович смело выдвигал на руководящие посты молодежь. И обличенная высоким доверием она не подвела своего главного конструктора.

Одними из первых разработок молодого коллектива были работы по участию в создании шасси первого сверхзвукового пассажирского самолета ТУ-144 и шасси знаменитой «Суховской сотки».

При этом, практически впервые в отрасли при проектировании шасси были применены электронно-вычислительные машины, и здесь ОКБ Бережного опередило знаменитые авиационные фирмы «Антонова», «Сухого», «Ильюшина», «Туполева».

Но пылкий аналитический ум Игоря Александровича не мог удовлетвориться работой в узких рамках проектирования традиционного шасси. Поэтому в ОКБ были начаты и доведены до создания опытных образцов работы по разработке нетрадиционных типов шасси: лыжно-гусеничное с воздушной смазкой, шасси на воздушной подушке. В ходе работ был создан стенд-макет шасси на воздушной подушке, который прошел испытания в условиях климата Антарктиды, а также спроектировано, изготовлено и испытано шасси на воздушной подушке для самолета АН-14.

Научный интерес Игоря Александровича не ограничивался разработкой оригинальных проектов в области взлетно-посадочных устройств, таких как управляемая платформа с расположенными на ней стойками шасси, позволяющая более равномерно распределять нагрузки в многостоечном шасси, или разработка теории и практики торможения «плугом», под его руководством был создан одноразовый блок «НАР», начаты работы по разработке лазерной системы слепой посадки.

Но и после того, как Игорь Александрович, назначенный главным конструктором «КБАС», ушел с поста руководителя КБ шасси, коллектив не утратил традиций, заложенных в нем его первым руководителем. Созданное на базе серийного завода по выпуску шасси и конструкторского бюро, производственное объединение внесло весомый вклад в дело развития советской и российской авиации. В его недрах созданы шасси для большинства гражданских самолетов, бороздящих воздушный океан. Это шасси для самолетов ТУ-204, ТУ-214, АН-72, ИЛ-86, ИЛ-96, а также для гордости военно-воздушного флота России, стратегического бомбардировщика ТУ-160 и многие другие. Традиционно производственное объединение, в настоящем, акционерное общество открытого типа «Авиаагрегат» вело разработки по созданию новых блоков «НАР».

В настоящее время «Авиаагрегат» - развивающееся предприятие, преодолевшее кризис первых лет перехода на работу в новых экономических условиях. На предприятии

ведутся работы по разработке, проектированию и изготовлению как шасси и блоков «НАР», так и новых видов продукции, таких как автомобильные амортизаторы, вязкостные муфты, гидроцилиндры для подъемно-транспортных и землеройных машин, агрегаты и устройства для железнодорожного транспорта и много другое.

Коллектив предприятия находится в постоянном поиске, его ряды пополняются молодыми специалистами, на предприятии стабильно растут объемы производства и оплата труда персонала.

Г. А. Кулаков - генеральный директор ОАО «Авиаагрегат». профессор,
доктор технических наук

СОДЕРЖАНИЕ

ЮБИЛЕЙ ВЫДАЮЩЕГОСЯ УЧЕНОГО	5
ИЗБРАННЫЕ НАУЧНЫЕ ТРУДЫ	21
ОСЦИЛЛОГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ ПРИ СОУДАРЕНИИ	21
О КРУЧЕНИИ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ ИЗ ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА С УЧЕТОМ МИКРОНАПРЯЖЕНИЙ	23
О ВЛИЯНИИ ВЯЗКОСТИ НА МЕХАНИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД	28
О ЛИНЕАРИЗАЦИИ СООТНОШЕНИЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД, СВОЙСТВА КОТОРЫХ ЗАВИСЯТ ОТ ВРЕМЕНИ	32
НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД, СВОЙСТВА КОТОРЫХ ЗАВИСЯТ ОТ ВРЕМЕНИ	37
О ФУНКЦИЯХ НАГРУЖЕНИЯ ПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД, СВОЙСТВА КОТОРЫХ ЗАВИСЯТ ОТ ВРЕМЕНИ	40
О СОПРОТИВЛЕНИИ НЕКОТОРЫХ ОПОР ЭКИПАЖА ПРИ ДВИЖЕНИИ ПО ПОВЕРХНОСТИ	45
О НЕКОТОРОМ ИНВАРИАНТНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ СВЯЗИ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ СИЛЫ И СКОРОСТИ ДЛЯ ДВУМЕРНОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ	50
О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ НАГРУЖЕНИЯ ДЛЯ ДВУМЕРНОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ	54
О ДЕФОРМАЦИОННЫХ МОДЕЛЯХ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ И СЛОЖНЫХ СРЕД	58
ОБ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМ ИССЛЕДОВАНИИ КОЛЕСА С УПРУГОЙ ШИНОЙ ПРИ ДВИЖЕНИИ ПО ПОВЕРХНОСТИ С ТРЕНИЕМ	63
О ПРИОБРЕТЕННОЙ АНИЗОТРОПИИ ПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ	67
ON CONSTRUCTING MODELS OF COHESIONLESS MEDIA BY SPECIFYING THE DISSIPATION FUNCTION	72
О МОДЕЛИ МАКСВЕЛЛА С УПРАВЛЯЕМОЙ ВЯЗКОСТЬЮ	75
О ПОСТРОЕНИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ НАГРУЖЕНИЯ СЛОЖНЫХ ЖЕСТКО- ПЛАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ	78
О ФУНКЦИИ НАГРУЖЕНИЯ ДЛЯ ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ	86
О ФУНКЦИИ АНИЗОТРОПИИ ДВУМЕРНЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ	90
О ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ С УПРАВЛЯЕМОЙ ВЯЗКОСТЬЮ	94
О НЕКОТОРЫХ ЭКСПЕРИМЕНТАХ СО СХОДЯЩИМИСЯ КОЛЬЦЕВЫМИ ВОЛНАМИ НА ПОВЕРХНОСТИ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ	97
ОБ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ НЕРАВЕНСТВАХ В ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ	99
«ГЛИССАДА» — ЛАЗЕРНАЯ СИСТЕМА ПОСАДКИ САМОЛЕТОВ	102
ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ТЕОРИИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА	108
О ВЗРЫВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПОТОКОВ В ПОЛЕ ПОПЕРЕЧНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН	117
ОБ ЭФФЕКТЕ КАСКАДНОГО ПОВЫШЕНИЯ ЧАСТОТЫ ПОПЕРЕЧНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ЭЛЕКТРОННЫХ ПОТОКАХ	120
О БЕРЕЖНОМ И.А.	125
ЛАЗЕРНЫЙ ЛУЧ ВЕДЕТ НА ПОСАДКУ	125
ЛОЦМАНОМ СТАЛ ЛАЗЕР	127
«ГЛИССАДА» РАБОТАЕТ НА «ОТЛИЧНО»	128
«ГЛИССАДА» ИГОРЯ БЕРЕЖНОГО	131
СПИСОК НАУЧНЫХ ТРУДОВ	133
ОТ КБ ШАССИ ДО ОАО «АВИААГРЕГАТ»	145

Игорь Александрович Бережной

Сборник научных трудов

Редактор Карпова Л. М.
Оригинал-макет Глотова В. Н.

Подписано в печать 01.03.04
Формат 60x84/₁₆. Бумага офсетная. Печать оперативная.
Объем 9,25 печ. л. Уч.-изд.л. 9. Тираж 300 экз.
Заказ №1085.

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика
С. П. Королева.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.
Отпечатано ОАО «Самарабланкиздат», 443020, Самара, Садовая, 46.