УДК 517.928

ТРАЕКТОРИИ-УТКИ В ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НЕРВНОЙ ПРОВОДИМОСТИ ФИТЦХЬЮ – НАГУМО

© Караваева Е.А., Щепакина Е.А.

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация

e-mail: lenakaravaeva98@gmail.com

Представленная работа посвящена исследованию динамической модели нервной проводимости ФитцХью – Нагумо [1]. Данная модель представляет собой сингулярно возмущенную систему дифференциальных уравнений. Для исследования используются качественные методы теории сингулярных возмущений, в частности метод интегральных многообразий [2; 3]. Исследованы условия протекания критического режима, который описывается траекторией-уткой динамической системы.

Рассматриваемая в данной работе модель используется для описания проблем, связанных с сердечными аритмиями [4]. Эта модель нервной проводимости, которая описывает генерацию и прохождение нервного импульса через мембрану аксона. Модель сводится к системе уравнений для двух переменных, известных как уравнения ФитцХью – Нагумо (FitzHugh – Nagumo) [1]:

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{dv}{dt} = -p(v) - w + I, \\ \dfrac{dw}{dt} = c(v - \gamma w), \end{cases}$$

$$p(v) = v(v-1)(v-a),$$

где a, c, γ – положительные константы, причем $0 < a < 0{,}5$, $v(t)$ играет роль потенциала, $w(t)$ характеризует нелинейные свойства проводимости мембраны для всех типов ионов. Параметр I – это импульс тока, приложенного к мембране, этот параметр является бифуркационным. Положительный параметр ε является малым. Таким образом, система является сингулярно возмущенной.

Нашей задачей стало качественное исследование системы дифференциальных уравнений в заданной модели, основанное на исследовании медленной кривой системы и ее особых точек.

Динамика решений будет зависеть от значения параметра I. В зависимости от этого исследуемая особая точка может принадлежать как устойчивому, так и неустойчивому участку медленной кривой [2; 3]. На основании исследований была выдвинута гипотеза о наличии бифуркации рождения цикла. Особое внимание было уделено эволюции рожденного предельного цикла при малых изменениях бифуркационного параметра в случае, когда неустойчивая особая точка находится в окрестности так называемой точки срыва – точки, в которой происходит смена устойчивости медленной кривой. Было установлено, что траектории переходной формы от только что рожденного предельного цикла малой амплитуды до цикла релаксационного типа представляют собой траектории-утки. Самая большая траектория-утка отвечает критическому режиму, разделяющему два типа колебательных процессов в динамической системе.

Построено асимптотическое разложение критического значения параметра, проведены расчеты параметров колебаний.

Библиографический список

1. FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // Biophysical Journal. 1961. Vol. 1. P. 123–200.

2. Соболев В.А., Щепакина Е.А. Редукция моделей и критические явления в макрокинетике. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 320 с.

3. Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1975. 248 с.

4. Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Б. Математические модели биологических продукционных процессов: учеб. пособие. М.: Изд-во МГУ, 1993. 302 с.