УДК 517.951

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ.

© Карнова Е.О., Бородачева Е.В.

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация

e-mail: karnova.1999@mail.ru

Как известно, для задачи Коши для дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(t,x), x(0) = x_0 \tag{1}$$

имеет место теорема Филиппова [1] о существовании решения при выполнении ряда условий на отображение F .

Теорема: Пусть при почти всех $t \in [t_0, t_0 + a]$ для $|x - x_0| \le b$ выполнены условия:

1) множество $F(t,x)$ – непустое, замкнутое, выпуклое;

2) функция F $\beta - непрерывнапо\ x;$

3) существует однозначная вектор-функция $f(t,x) \subset F(t,x)$, которая при каждом x измерима по $t;$

4) существует такая суммируемая функция $m(t), что |f(t,x)| \le m(t)$.

Тогда на отрезке $t_0 \le t \le t_0 + d$ существует решение задачи (1).

В частности, если для отображения F выполняется, среди прочих, условие Липшица по x , то задача (1) имеет решение $x(t)$ на некотором отрезке $[t_0, t_0 + \Delta]$.

Пусть теперь для отображения F выполняется условие односторонней липшицевости [2].

Определение: Многозначное отображение $F : I \times D \to K(R^m)$ будем называть односторонне липшицевым по x , если найдется локально интегрируемая на $I \subseteq R_+$ (по Лебегу) функция $L : I \to R_+$ такая, что $\forall x, y \in D, \forall t \in I, \forall v \in F(t,x) \exists w \in F(t,y) : x - y, v - w \le L(t) x - y^2$, где $.,.$ – скалярное произведение в R^m, $I \subseteq R_{+, D \subseteq R^m}$.

Можно показать, что условие односторонней липшицевости – обобщение условия Липшица. Очевидно, что теорема Филиппова не дает ответа в этом случае на вопрос о существовании решения задачи (1) с условием односторонней липшицевости по x отображения F. Аналогом теоремы Филиппова в этом случае является теорема [2] болгарского математика Тзанко Дончева.

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального включения с односторонне липшицевой правой частью:

$$\dot{x}(t) \in H(t,x), x(0) \in K_0 , \tag{2}$$

где отображение $H : [0,1] \times R^m \to Kv(R^m), K_0 - компакт\ из\ K(R^m)$.

Теорема: Предположим, что выполняются следующие условия:

1) отображение $H(t,x)$ измеримо по t на $[0,1]$ для каждого $x \in R^m$ и полунепрерывно сверху по x на R^m для всех $t \in [0,1]$;

2) найдется интегрируемая по Лебегу функция $\lambda : [0,1] \to R_+$ такая, что $H(t,x) \le \lambda(t)(1 + x)$ для всех $x \in R^m$ и почти для всех $t \in [0,1]$;

3) H – односторонне липшицево отображение с интегрируемой по Лебегу на $[0,1]$функцией $L_H(t)$. Пусть $z:[0,1] \to R^m$ – абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая условию: расстояние $\rho(\dot{z}(t), H(t, z(t))) \leq g(t)$ для почти всех $t \in [0,1]$, где $g(t)$ – интегрируемая на [0,1] функция.

Тогда для любого компакта $K_0 \in K(R^m)$ существует на [0,1] решение $x(t)$ задачи (2) такое, что

$$x(t) - y(t) \leq v(t) ,$$

где

$$v(t) = d\exp(m(t)) + \int_0^t \exp[m(t) - m(s)]g(s)ds,$$

$$d = \rho(z(0), K_0), \; m(t) = \int_0^t L(s)ds .$$

Библиографический список

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука: Главная редакция физико-математической литературы, 1985.
2. Donchev T., Farkhi E. Stability and Euler approximation of one-sided Lipschitz differential inclusions // SLAM J. Control OPTIM. 1999. V. 2. P. 780–796.