УДК 519.21

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ СИСТЕМЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ ПО СХЕМЕ СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО

Рогова К. Д., Плотников А. Н.

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С. П. Королёва, г. Самара

Во многих природных и техногенных процессах, например, отклонения от номинала параметров единиц продукции в порядке очередности их выхода с автоматической производственной линии; колебания биржевых цен, котировок, валютных курсов; колебания средне-сезонной температуры, количества осадков и т.д. В процессах подобного типа выход, как правило, формируется под воздействием множества складывающихся случайных факторов, и, в силу центральной предельной теоремы, следовало бы ожидать нормальность выходного рассеяния. Однако, в действительности, рассеяние зачастую обнаруживает отклонения от нормальности, которые невозможно списать на случайные колебания выборочных распределений, то есть значимые [1]. При этом некоторые нетривиальные результаты можно получить с помощью элементарного подхода, основанного на понятии плотности мгновенного рассеяния и его параметризаии. Суть данного подхода заключается в обобщении понятия суперпозиции распределений на случай бесконечного числа компонент с бесконечно малыми удельными долями, что порождает законы распределения, адекватные наблюдаемым, а причины отклонения от нормальности естественным образом интерпретируются в терминах объекта исследования Таким образом, с помощью наглядной физической аналогии, естественным образом возникает понятие мгновенной плотности нормального распределения:

$$f(x,t)=\frac{1}{\sigma(t)\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-\mu(t))^2}{2\sigma^2(t)}\right]. \tag{1}$$

Усредненная за период наблюдения T плотность представляет собой суперпозицию законов распределения. Парциальная доля мгновенной плотности (4.1) пропорциональна доле времени нахождения в окрестности точки фазового пространства с координатами $(\mu(t),\sigma(t))$- относительной фазовой скорости $\left[\int_0^T\frac{dt}{\sqrt{\dot\mu(t)^2+\dot\sigma(t)^2}}\right]^{-1}\frac{1}{\sqrt{\dot\mu(t)^2+\dot\sigma(t)^2}}$ [2]. Полная усредненная плотность, таким образом, представляет собой обобщение суперпозиции на случай бесконечно большого числа компонент с бесконечно малыми удельными долями :

$$f_T(x)=\left[\int_0^T\frac{dt}{\sqrt{\dot\mu(t)^2+\dot\sigma(t)^2}}\right]^{-1}\int_0^T\frac{f(x,t)dt}{\sqrt{\dot\mu(t)^2+\dot\sigma(t)^2}}. \tag{2}$$

Простейший вариант схемы заключается в следующм. Пусть выход процесса есть композиция входного и управляющего сигналов $Y_k=X_k+Z_k$. Управляющий сигнал Z_k определим в виде отрицательной обратной связи с запаздыванием: $\begin{cases}Z_1=0\\ Z_{k+1}=-hY_k,\ k\ge 1\end{cases}$, где $0<h<1$- коэффициент передачи обратной связи. Тогда выходной сигнал будет примет вид: $Y_1=X_1, Y_2=X_2-hX_1,...,Y_n=X_n+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k h^k X_{n-k}$.

При возникновении на входе разладки $\mu_X = \delta$ числовые характеристики выхода получаем в виде суммы геометрической прогрессии: $\mu_Y = \delta/(1+h)$, $\sigma_Y^2 = 1/(1-h^2)$. Частичная компенсация разладки $\mu_X - \mu_Y = \delta h/(1+h)$ достигается за счет увеличения дисперсии $\sigma_Y^2 - \sigma_X^2 = h^2/(1-h^2)$. При $h=1$происходит потеря устойчивости, и возникает задача оптимизации схемы по параметру h. За критерий оптимальности предлагается принять минимум вероятности выхода за границы стандартного 6σ интервала. Обозначив относительное смещение центра $\varepsilon = \delta/\sigma$, оценку после элементарных преобразований получим в виде:

$$\beta(h,\varepsilon) = 1 - \Phi_0\left[\sqrt{\frac{1-h}{1+h}}\left(3(1+h)+\varepsilon\right)\right] - \Phi_0\left[\sqrt{\frac{1-h}{1+h}}\left(3(1+h)-\varepsilon\right)\right]. \qquad (3)$$

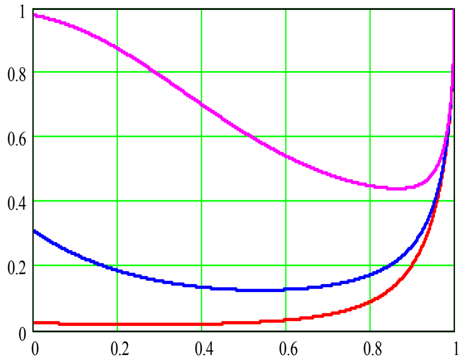

Рис.1. Оценка вероятности брака в зависимости от h *при значениях смещения* δ *в долях*

σ: 1, 2.5, 5.

Вид зависимости (3) показан на Рис.1. В рассмотренной схеме управляющий сигнал формируется по одному отсчету выходного. Статистическое регулирование возникает при формировании управляющего сигнала по скользящему среднему $m \geq 2$ отсчетов выходного. При этом значение коэффициента передачи $h=1$ находится в области устойчивости, и справедливы соотношения: $\mu_Y^* = \frac{1}{m+1}\mu_X$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{Y_n}^2 = \frac{m+(m-1)h}{(1+h)(m-h)}\sigma_X^2$

.

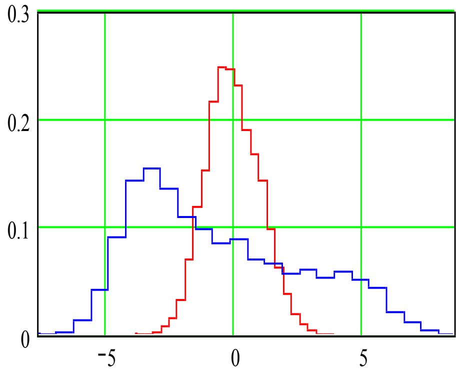

Рис.2. Гистограмма процесса с ускоренным трендом среднего, регулируемого по схеме скользящего среднего с $m=5$, $h=2$.

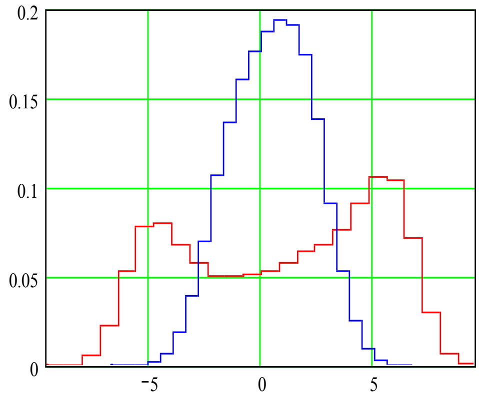

Рис.3.Гистограмма процесса с осциллирующим трендом среднего, регулируемого по схеме скользящего среднего с $m = 5$, $h = 2$.

Библиографический список

1. В. Феллер. Ведение в теорию вероятнностей и её приложения т.1, М. Мир, 1984г.
2. А. Н. Плотников. Элементарноая теория анализа и статистическое моделирование временных рядов. ЛАНЬ, С-Пб., 2016г.