УДК 511.17: 514.11

ПОЧТИ ПИФАГОРОВЫ ТРОЙКИ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Цыкин Д. Ю., Алякин В. А.

Самарский региональный центр для одаренных детей, г. Самара

Наиболее известным диофантовым уравнением является уравнение Пифагора.

$$x^2 + y^2 = z^2. (1)$$

Тройки натуральных чисел (x, y, z), удовлетворяющие уравнению (1), описывают целочисленные прямоугольные треугольники [1,2]. Методы генерации пифагоровых троек известны с античных времен. Математиками рассматривались различные частные случаи уравнения Пифагора, например, такие как почти равнобедренные прямоугольные треугольники. В настоящей работе исследуется новая модификация уравнения Пифагора. Мы рассматриваем тройки натуральных чисел (x, y, z) такие, что

$$|x^2 + y^2 - z^2| = 1. \quad (2)$$

Такие тройки естественно называть почти пифагоровыми, а соответствующие треугольники – почти прямоугольными или почти пифагоровыми.

Первую группу почти пифагоровых троек составляет тройки, в состав которых входит единица: $(1,1,1)$; $(1,2,2)$ ... $(1, n, n)$. Вторую группу составляют равнобедренные почти пифагоровы треугольники вида $(a, a, c$. В работе показано, что таких троек бесконечно много. Интерес представляет третья группа почти пифагоровых троек $(a, b, c$, где $a < b < c)$.

Цель работы – как можно полнее исследовать свойства нового геометрического объекта – почти пифагоровых треугольников.

В работе используются методы элементарной теории чисел [3,5], а также теория уравнений Пелля [4]. Основными результатами работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. Если (a, b, c) –почти пифагорова тройка, то из отрезков $a, b и c$ можно составить треугольник.

Теорема 2. Почти пифагоровых троек вида (a, b, c),где $a < b < c$,бесконечно много.

Теорема 3. Тройка чисел $(a, b, c$, образованная возрастающей арифметической прогрессией, не может быть почти пифагоровой.

Теорема 4. Площадь почти прямоугольного треугольника (a, b, c) может быть найдена по формуле:

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2 - 1}$$

Теорема 5. Радиусы описанной и вписанной окружностей $R и r$ соответственно для почти прямоугольного треугольника (a, b, c) могут быть найдены по формулам:

$$R = \frac{\frac{1}{2} * c}{\sqrt{1 - \frac{1}{4a^2b^2}}}; r = \frac{1}{2}\frac{(a + b - c) * \sqrt{4a^2b^2 - 1}}{2ab \pm 1}.$$

Далее представлены примеры почти пифагоровых троек натуральных чисел, найденные с помощью среды программирования Pascal.

(4,7,8); (6,17,18); (7,11,13); (8,9,12); (8,31,32); (9,19,21); (10,15,18); (10,49,50)
(4,8,9); (6,18,19); (8,32,33); (10,50,51); (12,72,73); (14,98,99); (16,128,129); (18,30,35)

Открытым остается вопрос о существовании тетраэдра, все три плоских угла при вершине которого являются почти прямыми. Также не решена проблема о бесконечности множества почти пифагоровых троек, в состав которых входят простые числа близнецы.

Библиографический список

1. Деза Е.И. Специальные числа натурального ряда. – М. : ЛИБРОКОМ, 2015. −240с.
2. Степанова Л. Л. и др. Практикум по элементарной математике. Арифметика.- М. :МЦНМО, 2008. −207с.
3. Манин Ю.И. , Панчишкин. А.А. Введение в современную теорию чисел. – М. : МЦНМО, 2013. −552с.
4. Сендеров В., Спивак А. Уравнение Пелля. Квант, 2002. $N3$; 2002, $N4$; 2002, $N6$.
5. Сизый С.В. Лекции по теории чисел. – М.: ФИЗМАТ ЛИТ, 2007. −192с.