УДК 531.1.01; 539.3

ОБ ОДНОМ АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

© Сабирзянов Р.Р., Бодунов Н.М.

Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева – КАИ, г. Казань, Российская Федерация

e-mail: ruslan_mail_r@mail.ru

Однонаправленные композиционные детали (трубы, стержни, профили, оболочки и др.), в том числе тела вращения, составляют значительную часть в конструкциях современных летательных аппаратов. В работе рассматриваются осесимметричные трансверсально-изотропные материалы, которые в каждой точке имеют плоскость изотропии. Экспериментальные исследования деталей из композиционных материалов (КМ) являются весьма дорогостоящими, поэтому перспективным является математическое моделирование деталей из таких материалов. Оценка напряженно-деформированного состояния (НДС) изделий из КМ реализуется традиционными методами на основе использования математических моделей, представленных в виде уравнений механики сплошной среды [1; 2]. При этом математические модели и алгоритмы по расчету НДС должны быть удобными для реализации на компьютере.

Основные уравнения и постановка задачи по расчету НДС трансверсально-изотропного тела вращения приведены в работе [1]. Считается, что задача теории упругости представлена через функции напряжений или перемещений, если все напряжения и перемещения выражены через одну или несколько функций, удовлетворяющих определенным дифференциальным уравнениям, которые получаются из уравнений равновесия и совместности деформаций. Применение этих функций позволяет свести задачи теории упругости к соответствующим краевым задачам математической физики. Применительно к анизотропным материалам различные виды разрешающих уравнений приведены в работах [1,3]. Воспользуемся одним из подходов решения задачи, при котором необходимо решать следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial r^4}-\frac{2}{r}\frac{\partial^3\varphi}{\partial r^3}+\frac{3}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}-\frac{3}{r^3}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+A\frac{\partial^4\varphi}{\partial r^2\partial z^2}-\frac{A}{r}\frac{\partial^3\varphi}{\partial r\partial z^2}+B\frac{\partial^4\varphi}{\partial z^4}=0. \qquad (1)$$

Здесь $r,z<1; \bar{r}=r/r^*; \bar{z}=z/z^*; r^*, z^*-$ характерные размеры рассматриваемого тела (черточки в выражении (1) не указаны); константы C_1 и C_2 находят из системы

$$C_1+C_2=\frac{a_{11}a_{44}+2a_{13}(a_{11}-a_{12})}{a_{11}a_{33}-a_{13}^2};\ C_1C_2=\frac{a_{11}^2-a_{12}^2}{a_{11}a_{33}-a_{13}^2};\ \ A=C_1+C_2; B=C_1\cdot C_2;$$

$a_{ij}-$ упругие постоянные материала; $a_{11}=1/E$; $a_{12}=-\nu/E$; $a_{33}=1/E'$; $a_{13}=-\nu'/E'$; $a_{44}=1/G'$; $2(a_{11}-a_{12})=[2(1+\nu)]/E=1/G$; $E,E'-$ модули Юнга растяжения и сжатия в плоскости изотропии и в направлении, перпендикулярном к ней; $\nu-$ коэффициент Пуассона, характеризующий сужение материала в плоскости изотропии при растяжении в той же плоскости; $\nu'-$ коэффициент Пуассона, характеризующий сужение материала в направлении, нормальном к плоскости изотропии при растяжении в этой плоскости; $G = E/[2(1+\nu)]$, G' – модули сдвига для плоскости изотропии и перпендикулярных (радиальных) ей плоскостей.

В работе [4] изложена методика нахождения полиномиальных решений канонических уравнений математической физики, основанная на разложении искомых решений по собственным (базисным) функциям, которая была применена в [5]. Данную методику используем для решения уравнения (1). Алгоритм решения следующий: с помощью определенных преобразований исходное дифференциальное уравнение в частных производных сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению, решение которого с помощью рекуррентной формулы позволяет найти его полиномиальные решения любой степени; а далее осуществляем переход к решению исходного уравнения. В результате получим следующее решение уравнения (1):

$$\varphi = \sum_{\alpha=0}^{N} A_\alpha P_\alpha(r,z) = A_2(r^2 c_{02} + c_{22} z^2) +$$
$$+ A_3(c_{13} r^2 z + c_{33} z^3) + A_4(c_{04} r^4 + c_{24} z^2 r^2) + A_5(c_{15} r^4 z + c_{35} z^2 r^3) +$$
$$+ A_6\left[c_{06}\left(r^6 - \frac{8}{B} r^2 z^4\right) + c_{26}\left(r^4 z^2 - \frac{2}{3}\frac{A}{B} r^2 z^4\right)\right] + \qquad (2)$$
$$+ A_7\left[c_{17}\left(r^6 z - \frac{8}{5B} r^2 z^5\right) + c_{37}\left(r^4 z^3 - \frac{2}{5}\frac{A}{B} r^2 z^5\right)\right] + \ldots + A_N P_N(r,z).$$

Здесь $c_{0\alpha}, c_{2\alpha}$ и $c_{1\alpha}, c_{3\alpha}$ –коэффициенты, формирующие начальный базис (в расчетах их можно положить равными единице); A_α – подлежащие определению произвольные коэффициенты, количество которых зависит от метода решения граничной задачи и оценки точности приближенного решения (применимы методы наименьших квадратов, коллокации и др.). Для решения данной задачи предпочтителен МНК (можно ограничиться решением, не превышающим степень полинома выше 6–7; решение задачи через выражение (2) хорошо интегрируется по границе).

Предложенный подход дает возможность получить решения задач деформирования деталей из КМ в аналитическом виде. При этом существенно сокращает размерность алгебраической системы уравнений относительно неизвестных коэффициентов, так как строится аппроксимация искомого решения только на границе.

Полученные результаты могут быть использованы для решения прикладных задач, в том числе для решения задач параметрической идентификации и обратных задач, в экспериментальных исследованиях, например, при оценках прочности и уточнении механических характеристик при деформировании композитных деталей.

Библиографический список

1. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.

2. Максименко В.Н., Олегин И.П. Теоретические основы методов и расчета прочности элементов конструкций из композитов. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2006. 240 с.

3. Колтунов М.А., Васильев Ю.Н., Черных В.А. Упругость и прочность цилиндрических тел. М.: Высшая школа, 1975. 526 с.

4. Дружинин Г.В., Закиров И.М., Бодунов Н.М. Базисные функции в приближенных решениях краевых задач. Казань: Изд-во ФЭН, 2000. 376 с.

5. Бодунов Н.М., Дружинин Г.В., Бреховских П.В. Аналитическое решение задачи по расчету НДС в однородном прямолинейно-анизотропном теле // Вестник КГТУ. 2012. № 4. Вып. 2. С.181–185.