УДК 517.928

ОСОБЕННОСТИ РЕДУКЦИИ В ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВОСПЛАМЕНЕНИЯ И ГОРЕНИЯ СПРЕЯ

Рытова О. В., Щепакина Е. А.

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С. П. Королёва, г. Самара

В работе на основе новой концепции положительно инвариантных интегральных многообразий [1] осуществлена редукция динамической модели воспламенения и горения горючего спрея, характерной особенностью которой является наличие негладких нелинейностей в соответствующих дифференциальных уравнениях. Применение данной концепции позволяет существенно упрощать математические модели сложных процессов без потери основных качественных и количественных характеристик.

Исследуемая в работе модель с математической точки зрения представляет собой сингулярно возмущенную систему дифференциальных уравнений с негладкими нелинейностями в правых частях. Традиционный подход к редукции системы, основанный на теории интегральных многообразий, не может быть применен, поскольку функции в дифференциальных уравнениях нелипшицевы [2]. Применение положительно инвариантных и функций Ляпунова позволило корректно осуществить редукцию.

Горючий спрей представляется как взрыв, где капли рассматриваются в качестве источника эндотермичности. Среда моделируется как пространственно-однородная смесь горючего газа с монодисперсным спреем. Конвективный и радиационный нагрев капель принимаются во внимание, а искажение падающего излучения и влияние от движения капель игнорируется. Считается, что падающее излучение имеет спектр абсолютно черного тела и поглощается каплями. Система предполагается адиабатической и давление газа постоянно. Теплопроводность жидкой фазы предполагается бесконечно большой. Объемная доля жидкой фазы предполагается гораздо меньше, чем газовой фазы. Таким образом, коэффициент теплопередачи смеси контролируется тепловыми свойствами газообразного компонента. Предполагается, что процесс горения, описываемый первым порядком экзотермической реакции, происходит только в газовой фазе. Эффекты Стефана, нагрев и испарение игнорируются. В данных предположениях процесс воспламенения и горения горючего спрея описывается системой [3]

$$\frac{d\theta_g}{d\tau} = \frac{1}{\gamma}\left(P_1(\theta_g,\eta,\xi) - P_2\left(\theta_g,\theta_d,q^{\frac{1}{3}}\right)\right),$$

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \frac{1}{\nu_f}\left[-P_1(\theta_g,\eta,\xi) + \frac{\psi}{\nu_f}P_{23}\left(\theta_g,\theta_d,q^{\frac{1}{3}}\right)\left(1-\varsigma(\theta_d)\right)\right],$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{\nu_{\tilde{o}x}}P_1(\theta_g,\eta,\xi),$$

$$\frac{d\theta_d}{d\tau} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_4 q}P_{23}\left(\theta_g,\theta_d,q^{\frac{1}{3}}\right)\varsigma(\theta_d),$$

$$\frac{dq}{d\tau} = -\varepsilon_2 P_{23}\left(\theta_g,\theta_d,q^{\frac{1}{3}}\right)\left(1-\varsigma(\theta_d)\right),$$

$$P_1(\theta_g,\eta,\xi) = \eta^a\xi^b exp\left(\frac{\theta_g}{1+\beta\theta_g}\right), P_2(\theta_g,\theta_d,r) = \varepsilon_1 r\sqrt{\frac{T_{d0}(1+\beta\theta_g)}{T_{g0}}}(\theta_g-\theta_d),$$

$$P_3(r)=\frac{\varepsilon_1\varepsilon_3}{4\beta}r^{2+\beta}\left(1+\beta\theta_g^{ext}\right)^4, P_{23}\left(\theta_g,\theta_d,r\right)=P_2\left(\theta_g,\theta_d,r\right)+P_3(r),$$

$$\theta_g^{ext}=\frac{1}{\beta}\frac{T_{ext}-T_{d0}}{T_{d0}}, \varsigma(\theta_d)=\frac{T_b-T_{d0}(1+\beta\theta_d)}{T_b-T_{d0}}, q=r^3,$$

с начальными условиями:

$$\theta_g(0)=\theta_{g0}\neq 0, \theta_d(0)=\theta_{d0}=0, r(0)=r_0=1, \eta(0)=\eta_0, \xi(0)=\xi_0=1.$$

Здесь $\theta_g,\eta,\xi,\theta_d,r$ – безразмерные температура газа, концентрация горючего, концентрация окислителя, температура капель и радиус капель, соответственно.

В работе показано, что эта система имеет инвариантное многообразие $q\equiv 0$ и частный интеграл:

$$q=\left(e^{\theta_d}\left(\varsigma(\theta_d)\right)^{\theta_{db}}\right)^{\varepsilon^4}.$$

Отсюда следует, что $\varsigma(\theta_d)\to 0$ при $q\to 0$, т. е. поверхностная температура капель приближается к температуре кипения $(\theta_d\to\theta_{db})$ при$q\to 0$. Подставляя $q=0$ и $\theta_d=\theta_{db}$ в исходнуюсистему, получим:

$$\frac{d\theta_g}{d\tau}=\frac{1}{\gamma}P_1\left(\theta_g,\eta,\xi\right), \frac{d\eta}{d\tau}=\frac{1}{v_f}-P_1\left(\theta_g,\eta,\xi\right), \frac{d\xi}{dt}=\frac{1}{v_{ox}}P_1\left(\theta_g,\eta,\xi\right).$$

Два интеграла этой системы

$$\gamma\theta_g+v_f\eta=\gamma\theta_{g0}+v_f\eta_0,$$
$$\gamma\theta_g+v_{ox}\xi=\gamma\theta_{g0}+v_{ox}$$

позволяют исключить уравнения для η и ξ из последующего анализа. Таким образом, применение концепции положительно инвариантного многообразия позволяет выполнить редукцию исходной нелипшецевой системы и получить в итоге скалярное уравнение для θ_g в виде:

$$\frac{d\theta_g}{d\tau}=\frac{1}{\gamma}P_1\left(\theta_g,\eta_0-\frac{\gamma}{v_f}\left(\theta_g-\theta_{g0}\right),1-\frac{\gamma}{v_{ox}}\left(\theta_g-\theta_{g0}\right)\right).$$

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Самарской области в рамках научного проекта № 16-41-630529 и Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках программы повышения конкурентоспособности Самарского университета (2013–2020).

Библиографический список

1. Sazhin, S.S. Positively invariant manifolds: concept and applications [Text]/ S.S. Sazhin, E. Shchepakina, V. Sobolev // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. – Vol. 811. – 012015.

2. Соболев, В. А. Редукция моделей и критические явления в макрокинетике [Текст]/ В. А. Соболев, Е. А. Щепакина. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2010.

3. Goldfarb I. Radiation effect on thermal explosion in a gas containing evaporating fuel droplets [Text]/ I. Goldfarb, V. Goldshtein, D. Katz, S.S. Sazhin // International J. of Thermal Sciences. – 2007. – Vol. 46. – P. 358-370.