УДК 519.624

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ

© Сошников Д.В., Бондаренко Н.П.

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация

e-mail: androidZ200daniilsamara@mail.ru

Данная работа посвящена нахождению собственных значений краевой задачи Штурма – Лиувилля:

$$\frac{d^2}{dx^2}Y(x) + \lambda Y(x) = Q(x)Y(x), x \in (0,\pi).$$
$$Y'(0) - hY(0) = 0, Y'(\pi) + HY(\pi) = 0, \quad (1)$$

где Y(x) – вектор-функция размерности *n, H* и *h* – симметричные матрицы размера *nxn*.

Данная задача появляется при решении дифференциальных уравнений в частных производных методом разделения переменных. Матричная задача может возникать в области квантовой механики [1], в теории упругости [2] и других приложениях [3; 4].

Для простоты рассмотрим случай, когда Q(x) = 0.

Было показано, что собственные значения рассматриваемой краевой задачи при $\lambda \geq 0$ совпадают с корнями уравнения:

$$\left|(H+h)\cos(\rho\pi) + Hh\frac{\sin(\rho\pi)}{\rho} - E\rho\sin(\rho\pi)\right| = 0, \quad (2)$$

и при $\lambda < 0$ — с корнями уравнения:

$$\left|(H+h)ch(\rho\pi) + Hh\frac{sh(\rho\pi)}{\rho} + E\rho sh(\rho\pi)\right| = 0, \quad (3)$$

где |.| – определитель матрицы, $\rho^2 = \pm\lambda$, E – единичная матрица.

Для нахождения корней данных уравнений будем использовать численный метод.

Выберем глобальный отрезок, на котором хотим найти все корни. Далее разделим его на множество локальных отрезков, на каждом из которых будет содержаться не более одного корня. Длины отрезков подбирались экспериментально. Далее для каждого отрезка проверяем знак функции на его концах, и если знаки разные, то на этом отрезке есть корень, и для его нахождения используется метод дихотомии.

На основе данного алгоритма была разработана программа на языке C++ и проведена проверка корректности работы данной программы на тестовых данных:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & -2 & 11 & -1 \\ 6 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 & 12 & 9 \\ 1 & 1 & 0 & 7 & 7 \\ -2 & 0 & -4 & 0 & 2 \\ 12 & 7 & 0 & -5 & 3 \\ 9 & 7 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вывод программы при $\lambda \geq 0$ на отрезке [0, 5] (данные значения – это ρ):

0.94252 1.01131 1.03856 1.12792 1.51241 1.88727 2.02117 2.06772 2.22976 2.63589 2.83609 3.0287 3.08532 3.30586 3.70196 3.79127 4.03375 4.09389 4.36445 4.72554 4.76987

Вывод для $\lambda < 0$ (данные значения – это ρ):

0.606249 2.42295 3.04147 5.79217 6.25554 18.8422

Вывод программы при $\lambda \geq 0$ на отрезке [100, 105] (данные значения – это ρ):

100.931 100.985 101.005 101.011 101.086
101.931 101.986 102.005 102.011 102.086
102.932 102.986 103.005 103.011 103.085
103.932 103.986 104.005 104.011 104.084

В статье [5] выводится асимптотическая формула для собственных значений краевой задачи матричного уравнения Штурма – Лиувилля:

$$\rho_{mq} = m + \frac{\omega_q}{\pi m} + \frac{k_{mq}}{m}, \text{ где } q = \overline{1, n}, \{k_{mq}\}_{m>0} \in l_2, \quad (4)$$

где ω_q – собственные значения матрицы ω:

$$\omega = h + H + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} Q(x)dx.$$

В нашем случае Q(x) = 0.

Собственные значения матрицы ω для данного примера:

-22.2519 -4.61145 1.58608 3.59835 27.6789

Второе слагаемое из формулы (1) для m = 101:

-0.0708 -0.0147 0.0050 0.0115 0.0881

Далее, добавляя первое слагаемое (m = 101), мы видим, что значения, полученные при помощи программы, близки к значениям, полученным по формуле (4).

Библиографический список

1. Agranovich Z.S., Marchenko V.A. The inverse problem of scattering theory. New York: Gordon and Breach, 1963. 290 p.
2. Beals R., Henkin G.M., Novikova N.N. The inverse boundary problem for the Rayleigh system // J. Math. Phys. 1995. Vol. 36, No. 12. P. 6688–6708.
3. Boutet de Monvel A., Shepelsky D. Inverse scattering problem for anisotropic media // J. Math. Phys. 1995. Vol. 36, No. 7. P. 3443–3453.
4. Chabanov V.M. Recovering the M-channel Sturm-Liouville operator from M+1 spectra // Phys. 2004. Vol. 45, No. 11. P. 4255–4260.
5. Bondarenko N. Spectral analysis for the matrix Sturm-Liouville operator on a nite interval // Tamkang J. Math. 2011. Vol. 42, No. 3. P. 305–327.