САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени академика С.П. КОРОЛЕВА

ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ФОРМУЛ

САМАРА 1997

Государственный комитет Российской Федерации
по высшему образованию

Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С.П. Королева

ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ФОРМУЛ

Методические указания

САМАРА 1997

Составитель А. А. Дегтярев

УДК 519.6

Приложения интерполяционных формул : Метод. указания / Самар. гос. аэрокосм. ун-т ; Сост. А. А. Дегтярев. Самара, 1997. 12 с.

Предназначены для проведения практических занятий по численным методам и организации самостоятельной работы студентов, обучающихся по специальности 01.02 (прикладная математика).

Содержат краткие теоретические сведения и указания по методике решения прикладных задач по интерполированию функций одной действительной переменной, а также упражнения для контроля знаний студентов. Подготовлены на кафедре технической кибернетики.

Печатаются по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета им. С. П. Королева

Рецензент проф. А. И. Жданов

1. Обратная интерполяция

Обратная интерполяция применяется, например, при решении уравнений вида $f(x) = y^*$. Если функция $f(x)$ монотонна, то строится интерполяционный многочлен для функции $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$, а затем вычисляется его значение при $y = y^*$: $x^* = \varphi(y^*)$.

Пример. По заданным значениям функции

x	1	2	2,5	3
y	− 6	− 1	5,625	16

найти значение x^*, для которого $y^* = 0$.

Интерполяционный многочлен Лагранжа $L_3(y)$ имеет вид

$$L_3(y) = 1\cdot\frac{(y+1)(y-5{,}625)(y-16)}{(-5)(-11{,}625)(-22)} + 2\cdot\frac{(y+6)(y-5{,}625)(y-16)}{5(-6{,}625)(-17)} +$$

$$+ 2{,}5\cdot\frac{(y+6)(y+1)(y-16)}{11{,}625\cdot 6{,}625(-10{,}375)} + 3\cdot\frac{(y+6)(y+1)(y-5{,}625)}{22\cdot 17\cdot 10{,}375}.$$

полагаем $y = 0$, тогда получим $x^* \approx 2{,}122$.

Упражнения для контроля

1. Функция $f(x)$ задана таблицей :

x	1,8	1,9	2,0	2,1
$f(x)$	0,2268	0,0494	− 0,148	− 0,3654

Решить уравнение $f(x) = 0$, найдя корень с тремя десятичными знаками.

2. Используя таблицу функции $erf\,x$, найти корень уравнения $erf\,x = \frac{1}{2}$, с пятью десятичными знаками.

3. Используя таблицу функции e^x, вычислить $ln\,2$.

4. Функция $F(\varphi) = \int_0^{\varphi} \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi\right)^{-\frac{1}{2}} d\varphi$ задана таблицей

φ	$28{,}0^0$	$28{,}5^0$	$29{,}0^0$	$29{,}5^0$
$F(\varphi)$	0,498464	0,507724	0,517004	0,526304

Решить уравнение $F(\varphi) = 0{,}5$, найдя корень с точностью до 1.

5. Как оценить погрешность обратной интерполяции, если известна обратная функция $x = f^{-1}(y)$?

6. Найти нуль функции Бесселя $J_0(x)$, используя следующие данные :

x	2,38	2,39	2,40
$J_0(x) \times 10^2$	1,295378	0,772019	0,250768

x	2,41	2,42	2,43
$J_0(x) \times 10^2$	- 0,268340	- 0,785272	- 1,812473

2. Численное дифференцирование

Если функциональная зависимость $f(x)$ имеет очень сложный вид или вообще неизвестна (функция может быть задана, например, таблично), то для вычисления производной от $f(x)$ приходятся использовать приближенные формулы. Для их построения могут быть применены методы интерполяции. Иначе, заменяя $f(x)$ интерполяционным многочленом

$$f(x) = \varphi(x) + R(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i\,\varphi_i(x) + R(x)$$

и дифференцируя, получим $f^{(k)}(x) = \varphi^{(k)}(x) + R^{(k)}(x)$, где $\varphi^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i\,\varphi_i^{(k)}(x)$ – приближенное выражение для k-ой производной; $R^{(k)}(x)$ – погрешность численного дифференцирования.

Упражнения для контроля

7. В условиях задачи 31 (см. [5]) доказать, что погрешность в i-ом узле, происходящая от замены $f'(x)$ на $L_n'(x)$, выражается формулой

$$R_n'(x_i) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)\,!}(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})\cdot$$
$$\cdot(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)\quad , \qquad i = \overline{0,n}\ .$$

8. Функция $f(x)$ задана своими значениями в узлах $x_0 = -h$, $x_1 = 0$, $x_2 = \lambda h$, где она принимает значения $f(x_0) = f_0$, $f(x_1) = f_1$, $f(x_2) = f_2$. Найти выражения первой и второй производной этой функции в узле x_1.

9. Найти выражение для остаточного члена аппроксимации первой производной в задаче 8.

10. Используя условия задачи 8, получить другой вид аппроксимации $f'(0)$, раскладывая разность $f(\lambda h) - f(-h)$ в ряд Тейлора. Найти выражение остаточного члена аппроксимации $f'(0)$.

11. Проделать то же, что и в задаче 10, но для аппроксимации $f''(0)$.

12. Даны равноотстоящие с шагом h узловые значения $f_0, f_1, f_2, \ldots$. С помощью разложения в ряд Тейлора выразить с указанной точностью через эти значения следующие производные :

$$1.\ f_0',\ o(h^4); \qquad 4.\ f_1',\ o(h^4);$$
$$2.\ f_1'',\ o(h^2); \qquad 5.\ f_0''',\ o(h^2);$$
$$3.\ f_1',\ o(h^3); \qquad 6.\ f_2''',\ o(h^2);$$

Для каждого случая найти главный член погрешности.

13. Способом неопределенных коэффициентов получить следующие формулы и показать, что каждая из них точна, если $f(x)$ есть многочлен 4-ой степени :

$$f_2 = f_{-2} + \frac{4h}{3}\left(2f_1' - f_0' + 2f_{-1}'\right);$$
$$f_2 = f_0 + \frac{h}{3}\left(f_2' + 4f_1' + f_0'\right).$$

14. Используя интерполяционный многочлен, построенный в задаче 21 (см. [1]) вычислить $f'\left(\pi/12\right)$ и $f''\left(\pi/12\right)$. Найти фактическую погрешность.

15. Найти $f'(4/3)$ в задаче 22 (см. [5]) , используя трехточечную формулу из задачи 8 для узлов –2, –4 / 3, 0. Найти теоретическую и фактическую погрешность.*

16. Вычислить $f'(-4/3)$, дифференцируя интерполяционный полином, построенный в задаче 22. Найти фактическую погрешность.

17. Используя таблицу $\ln x$ из задачи 68 (см. [5]), найти $(\ln x)'$ в узлах x = 5,2 ; 5,6 ; 6,2. Определить фактическую погрешность.

3. Численное интегрирование

Для построения квадратурной формулы $\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$ широко применяются интерполяционные методы. Заменяя подынтегральную функцию $f(x)$ интерполяционным многочленом

$$f(x) = \varphi(x) + R(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\varphi(x) + R(x),$$

получим

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\int_a^b \varphi_i(x)\,dx + \int_a^b R(x)\,dx.$$

Обозначив $A_i = \int_a^b \varphi_i(x)\,dx$, получим квадратурную формулу с погрешностью $\int_a^b R(x)\,dx$.

Упражнения для контроля

18. Пусть $f(x) = L_n(x) + R_n(x)$ задана на отрезке $[a, b]$, где $L_n(x)$ – интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $f(x)$, построенный по узлам $x_i \in [a, b]$: $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Заменив $f(x)$ на $L_n(x)$, записать общий вид квадратурной формулы для $\int_a^b f(x)\,dx$.

формулы для $\int_a^b f(x)\,dx$.

19. Полагая $f(x)=x^k$, $k=\overline{0,n}$, показать, что коэффициенты A_i квадратурной формулы $\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$ при заданном расположении узлов $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ определяются единственным образом.

20. Найти выражения для коэффициентов A_i, $i=\overline{0,n}$ квадратурной формулы $\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$, положив n = 1 и n = 2.

21. Вычислить $\int_1^{3/2} \sqrt{x}\,dx$ при n = 1, взяв $x_0=1{,}1$ и $x_1=1{,}4$. Оценить погрешность результата и сравнить с фактической погрешностью.

22. Вычислить $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$, выбрав узлы $x_0=\frac{\pi}{6}$, $x_1=\frac{\pi}{4}$, $x_2=\frac{\pi}{3}$.

23. Вычислить интеграл из задачи 21 при n = 2, взяв дополнительный узел $x=1{,}2$.

24. Методом неопределенных коэффициентов выразить $\int_{x_0}^{x_4} f(x)\,dx$ через три ординаты, соответствующие трем равноотстоящим с шагом h абсциссам x_1, x_2, x_3.

25. Получить формулу трапеций для интервала $[\,x_k\ x_{k+1}\,]$. Дать геометрическую интерпретацию. Получить оценку погрешности.

26. Пусть на отрезке интегрирования $[\,a, b\,]$ введена сетка с равноотстоящими узлами $x_0=a$, $x_n=b$, $x_{k+1}-x_k=h=\frac{b-a}{n}$. Представив интеграл в виде суммы

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx,$$

получить обобщенную формулу трапеций. Дать геометрическую интерпретацию. Получить оценку погрешности.

27. Интегрируя интерполяционную формулу Ньютона, построенную для узлов x_k, $x_{k+1}=x_k+h$, $x_{k+2}=x_k+2h$, вывести формулу Симпсона для вычисления интеграла $\int_{x_k}^{x_{k+2}} f(x)\,dx$.

28. Пусть на отрезке интегрирования $[\,a, b\,]$ введена сетка с равноотстоящими узлами $x_0=a$, $x_{2n}=b$, $x_{k+1}-x_k=h=\frac{b-a}{2n}$. Представив интеграл в виде суммы $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)\,dx$, получить обобщенную формулу Симпсона. Дать геометрическую интерпретацию. Получить оценку погрешности.

29. Вычислить интеграл $\int_2^3 \frac{dx}{x-1}$ по обобщенной формуле трапеций при n = 4. Оценить погрешность и сравнить с фактической.

30. На сколько частей надо разделить отрезок $[\,0, 1\,]$, чтобы вычисляя по обобщенной формуле трапеций значение функции Лапласа $erf\ x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$ при x = 1, получить погрешность $\le 10^{-6}$.

31. Интеграл $\int_0^{1/2} \sqrt{x}\, e^{-x^2}\, dx$ вычислить :

по обобщенной формуле Симпсона при $n = 2$;
интегрируя по частям

$$\int_0^{1/2} \sqrt{x}\, e^{-x^2}\, dx = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2} e^{-1/4} + \frac{4}{3}\int_0^{1/2} x^{5/2}\, e^{-x^2} dx\ ,$$

и подсчитав интеграл справа по обобщенной формуле Симпсона при том же n , сравнить результаты и объяснить причину большей точности в последнем случае.

Библиографический список

1. *Амосов А.А. , Дубинский Ю.А. , Копченова Н.С.* Вычислительные методы для инженеров.- М.: Высш. шк., 1994.
2. *Самарский А.А.* . Введение в численные методы. - М.: Наука, 1987.
3. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. - М.: Наука, 1980.
4. *Корнейчук Н.П.* Сплайны в теории приближения . - М.: Наука,1984.
5. Методы интерполирования функций . Мет.указ.
   Сост. Дегтярев А.А.- Самара: СГАУ,1996.

ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ
ФОРМУЛ

Составитель Д е г т я р е в Александр Александрович

Редактор
Тех. редактор
Корректор

Лицензия ЛР № 020301 от 28.11.91

Подписано в печать Формат
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,2. Заказ . Арт.

Самарский государственный аэрокосмический
университет имени академика С.П. Королева.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

ИПО Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443001 Самара, ул. Ульяновская, 18.