САМАРСКИЙ ордена ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЕВА

ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Методические указания

ν 1

САМАРА 1992

Составители: Л. П. Муркин, Н. В. Мышкина

93

УДК 519.281

Практические рекомендации по обработке результатов измерений: Метод. указания / Сост. Л. П. Муркин, Н. В. Мышкина; Самар. авиац. ин-т. Самара, 1992. 24 с.

Методические указания являются введением в проблемы анализа результатов измерения. Приведены способы определения погрешностей измерения и графического анализа данных. Изложение дополнено примерами. Материал представлен в виде справочника, чтобы студенту, приступающему к работе в лаборатории и не владеющему в полном объеме всеми методами обработки результатов измерений, можно было обращаться к тексту за разъяснением по мере необходимости.

Методические указания предназначены для студентов младших курсов при работе в лабораториях общефизического практикума. Выполнены на кафедре физики.

Печатаются по решению редакционно-издательского совета Самарского ордена Трудового Красного Знамени авиационного института имени академика С. П. Королева

1. ИЗМЕРЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Суть измерений заключается в количественном выражении величин путем сопоставления измеряемой величины с однородной величиной, принятой за единицу. Согласно этому определению общее уравнение измерений имеет вид

$$x = n\,[x], \tag{1}$$

где x — измеряемая физическая величина,

$[x]$ — единица физической величины,

n — число единиц.

Результатом измерения является значение физической величины, полученное путем ее измерения. Это значение в общем случае отличается от истинного значения $x_{ист}$. Причиной этого является наличие погрешностей средств измерений, несовершенство методов и методик измерений, отличие внешних условий, при которых проводятся измерения, от установленных условий, а также действие ряда других причин, индивидуальных для каждого вида измерений. Вот почему результат измерения x будет являться реализацией случайной величины, равной сумме истинного значения измеряемой величины $x_{ист}$ и погрешности измерения Δx:

$$x = x_{ист} + \Delta x. \tag{2}$$

Если повторить измерения величины x еще несколько раз, то окажется, что все полученные значения лежат в некотором интервале, ограниченном наименьшим значением $x_д - \Delta(x)$ и наибольшим значением $x_д + \Delta(x)$. Величина $x_д$, соответствующая середине интервала, называется *действительным значением* измеряемой величины x. Действительное значение $x_д$ мало отличается от истинного значения $x_{ист}$ и используется вместо него для решения поставленных измерительных задач.

Границы интервала, определяемые величиной $\Delta(x)$, называются *доверительными границами*, а сам интервал — *доверительным интервалом*. Для заданного или определенного каким-либо образом доверительного интервала необходимо указать *доверительную вероятность* P. Доверительная вероятность приближенно равна доле измерений, результаты которых попадают в интервал от $x_д - \Delta(x)$ до $x_д + \Delta(x)$. Это означает следующее: если провести большое число измерений N_0 одной и той же величины в одних и тех же условиях и выбрать из них те N измерений, результаты которых попали в доверительный интервал, то будет справедливо приближенное равенство

$$P = N/N_0.$$

Пример 1. Пусть при некотором измерении задана доверительная вероятность $P = 0{,}95$ и определен доверительный интервал. Следовательно, если провести, например, 100 измерений, то примерно $0{,}95 \cdot 100 = 95$ результатов измерений будут находиться внутри доверительного интервала. Иными словами, доверительная вероятность показывает надежность результата измерения.

Пример 2. Результат измерения напряжения следующий: $U_д = 50$ В, $\Delta(U) = \pm 1$ В, $P = 0{,}95$. Эта запись означает, что истинное значение измеряемого напряжения с вероятностью 0,95 находится внутри интервала, ограниченного наименьшим значением $U_д - \Delta(U) = 49$ В и наибольшим значением $U_д + \Delta(U) = 51$ В.

Итак, в результате проведения измерения экспериментатор должен получить:

1) действительное значение измеряемой физической величины,

2) погрешность измерения вместе с соответствующей доверительной вероятностью. При этом доверительная вероятность чаще всего задается экспериментатором.

Решение поставленных задач зависит от большого числа факторов, но в первую очередь требуется знание *классификации измерений и классификации погрешностей.*

2. КЛАССИФИКАЦИЯ ИЗМЕРЕНИЙ

Измерения классифицируют (упрощенная схема классификации) [7]:

по общим приемам получения результатов — прямые и косвенные,

по числу измерений в серии — однократные и многократные.

Прямое измерение — измерение, при котором искомое значение величины получают непосредственно. Например, измерение температуры воздуха термометром, силы тока — амперметром, промежутка времени — секундомером.

Косвенное измерение — измерение, при котором значение физической величины определяют на основании результатов прямых измерений других физических величин, функционально связанных с искомой. Например, значение плотности ρ однородного тела цилиндрической формы можно установить по значениям массы m, высоты h и диаметра цилиндра d, полученным на основании прямых измерений и связанным уравнением

$$\rho = 4\,m/\pi\, d^2 h. \tag{3}$$

Однократное измерение — измерение, выполненное один раз. В ряде случаев, когда нужна бо́льшая уверенность в правильности полученного результата, выполняются два, три и более измерений одной и той же конкретной величины. В таких случаях допускаются выражения: «двухкратное измерение», «трехкратное измерение» и т. д.

Многократное измерение — измерение одной и той же физической величины, состоящее из ряда однократных измерений. Ориентировочно считается, что при четырех измерениях и более измерение можно считать многократным.

3. ОЦЕНКА ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ ИЗМЕРЯЕМОЙ ВЕЛИЧИНЫ

а) Для однократных измерений $x_д$ определяется показаниями средства измерения,

б) При многократных измерениях за действительное значение измеряемой величины принимают среднее арифметическое экспериментальных данных, из которых исключены систематические погрешности (о систематических погрешностях см. ниже):

$$\bar{x} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)/n, \tag{4}$$

где x_i — результат i-го измерения,

n — число измерений в серии.

4. КЛАССИФИКАЦИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Погрешности измерений могут быть классифицированы по следующим признакам:

по характеру проявления — систематические и случайные,

по способу выражения — абсолютные и относительные.

Систематическая погрешность — составляющая погрешности результата измерения, остающаяся постоянной для данного ряда измерений, или же закономерно изменяющаяся при повторных измерениях одной и той же величины.

Случайная погрешность — составляющая погрешности результата измерения, изменяющаяся случайным образом (по знаку и значению) в серии измерений одного и того же размера физической величины.

Часто в приведенную классификацию включают грубые погрешности. Грубая погрешность (промахи) — это погрешность измерения, значительно превышающая погрешность, ожидаемую при данных условиях. Как правило, причина таких погрешностей — недостаточное внимание или небрежность экспериментатора (неразборчивая или неверная запись показаний прибора, резкое изменение условий эксперимента). Устранить уже сделанные погрешности можно, анализируя полученные результаты с помощью теории вероятности. Если сделано около 10 измерений, то промахом можно считать измерение, для которого погрешность более трех среднеквадратических отклонений. Это измерение исключается при обработке результатов измерений.

Абсолютная погрешность — погрешность измерения, выраженная в единицах измеряемой величины.

Относительная погрешность — погрешность измерения, выраженная в долях значения измеряемой величины или в процентах. Относительная погрешность δ (в процентах) находится из отношений

$$\delta = \Delta x/x \quad \text{или} \quad \delta = (\Delta x/x)\ 100\%. \tag{5}$$

Рассмотрим более подробно причины и способы устранения либо учета систематических и случайных погрешностей.

4.1. СИСТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОГРЕШНОСТИ

Этот вид погрешности наиболее существенно искажает результат измерений, поэтому систематические погрешности подлежат исключению, насколько это возможно, путем введения поправок. Различают следующие систематические погрешности:

1) погрешности, свойственные средствам измерения;

2) погрешности, обусловленные воздействием влияющих величин как на средства измерения, так и на объект измерения;

3) погрешности, возникающие из-за неточности действий экспериментатора;

4) погрешности метода;

5) погрешности из-за неадекватности модели измерений объекту измерений.

Приемы выявления систематических погрешностей весьма разнообразны и не могут быть сведены к определенным алгоритмам. Только хорошее знание экспериментальной техники, опыт экспериментатора, накапливаемый с течением времени, знание методики эксперимента, критическое отношение к полученным результатам, внимание и аккуратность в работе позволяют выявлять и устранять либо учитывать систематические погрешности.

Примеры:

1. Стрелка амперметра, через который не идет ток, не показывает «нуль». Эта погрешность устраняется с помощью корректора начальной установки нуля.

2. Изменение температуры воздуха приводит к погрешностям при точных измерениях. Погрешности можно устранить путем введения поправок либо путем термостатирования, т. е. поддержания нормальной температуры.

3. Неточные действия оператора могут привести к запаздыванию или опережению регистрации какого-либо измерительного сигнала. Появление таких погрешностей можно исключить, если провести автоматизацию процесса измерения.

Следует особо выделить инструментальные (приборные) погрешности. Эти погрешности приведены в технических паспортах (формулярах) на средства измерения. Для большинства приборов вводится характеристика — класс точности прибора. Эта характеристика, обозначаемая буквой γ_0, определяется формулой

$$\gamma_0 = (\Delta x/x_N)\ 100\%, \tag{6}$$

где Δx — предельная допустимая для данного класса прибора погрешность, определенная при нормальных внешних условиях;

x_N — так называемое нормирующее значение. За нормирующее значение часто принимают верхний предел измерения. Но в общем случае следует руководствоваться паспортом (формуляром) средств измерения, где указывается нормирующее значение.

Значение инструментальной погрешности будем в дальнейшем обозначать буквой $\pm\Theta$.

Примечание. В ряде книг, посвященных вопросам метрологии — науке об измерениях — инструментальная погрешность относится к так называемым неисключенным систематическим погрешностям, которые обозначаются $\Delta_s(x)$. К этому же виду систематических погрешностей относятся, например, методические погрешности, которые связаны с допущениями и упрощениями, сделанными при выводе формул; погрешности поправок; погрешности, вызванные влиянием внешних условий, которые не могут быть измерены в ходе эксперимента, и ряд других.

Пример расчета инструментальной погрешности.

Пусть при некоторых измерениях применен вольтметр класса точности 1,5 с пределом измерения 0...100 В. Для нахождения инструментальной погрешности воспользуемая формулой (6), откуда

$$\Delta x = (\gamma_0/100)\ x_N. \tag{7}$$

В данной задаче $\gamma_0 = 1{,}5$, нормирующее значение $x_N = 100$ В (верхний предел измерения). После подстановки

$$\Delta x = (1{,}5/100)\ 100\ \text{В} = 1{,}5\ \text{В}.$$

Используя обозначение инструментальной погрешности, запишем $\Theta = \pm 1{,}5$ В.

Для всех средств измерения, приведенных в табл. 1, инструментальная погрешность $\Theta = \pm\Delta_м(x)$.

Таблица 1

Измерительный прибор	Диапазон измерений	Предельная погрешность $\Delta_м(x)$
Линейка измерительная металлическая	300 мм 500 мм 1000 мм	0,10 мм 0,15 мм 0,20 мм
Штангенциркуль	0...125 мм 0...200 мм 0...320 мм	0,05 мм при значении отсчета по нониусу 0,05 мм и 0,1 мм при значении отсчета по нониусу 0,1 мм
Микрометр с ценой деления 0,01 мм	0...25 мм	4 мкм
Весы лабораторные	5...100 г 10...200 г	Три значения цены деления отсчетной шкалы
Секундомер механический	0...60 с 0...30 мин	0,2 с при скачке секундной стрелки 0,1 с 0,4 с при скачке стрелки 0,1 с и 0,6 с при скачке стрелки 0,2 с
Термометр ртутный стеклянный	−35...+100°С	Значение цены деления шкалы, если она равна 1, 2, 5 град/дел.

Примечание. Если класс точности средств измерений неизвестен и нет паспортных данных, то можно использовать правило: предельная погрешность, а следовательно, инструментальная погрешность равна половине цены деления шкалы прибора.

4.2. СЛУЧАЙНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ

Если экспериментатор, проводя серию измерений одной и той же величины в одних и тех же условиях, получает несколько отличающиеся друг от друга значения, то этот факт, как правило, обусловлен действием случайных погрешностей. Можно сказать, что случайные погрешности вызывают рассеяние результатов в серии измерений. В теории случайных величин характеристикой рассеяния значения случайных величин является среднее квадратическое отклонение (СКО). СКО среднего арифметического значения $\sigma(\bar{x})$ определяется по формуле

$$\sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}} . \qquad (8)$$

Теория вероятностей позволяет найти доверительные границы случайной погрешности $\Delta(\bar{x})$, если вычислено СКО и задана требуемая доверительная вероятность P:

$$\Delta(\bar{x}) = t(P, n)\cdot\sigma(\bar{x}), \qquad (9)$$

где $t(P, n)$ — коэффициент Стьюдента, который находится по табл. 2 в зависимости от числа измерений n и доверительной вероятности P.

Таблица 2

n		2	3	4	5	6	10	20	∞
$t(P,n)$	при $P=0{,}95$	12,7	4,30	3,18	2,78	2,57	2,26	2,09	1,96
	при $P=0{,}99$	63,7	9,92	5,84	4,60	4,03	3,25	2,86	2,58

5. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Основная цель обработки результатов экспериментальных данных — получение результата измерений и оценка его погрешности. Выбор метода обработки зависит главным образом от вида измерений (прямые, косвенные) и от числа экспериментальных данных (многократные и однократные измерения). В данном разделе рассматриваются упрощенные методы обработки данных для указанных видов измерений.

5.1. ПРАВИЛА ОКРУГЛЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

В процессе выполнения измерений проводятся расчеты как результатов измерений, так и погрешностей, причем точность расчетов обычно значительно больше метрологически обоснованной точности результатов. Однако в числах, выражающих результат измерения и его погрешность, необходимо оставлять только те цифры, за достоверность которых можно ручаться, т. е. значащие цифры. Последняя значащая цифра (реже две последние цифры), как говорят, «отягощена» погрешностью. Эти обстоятельства приводят к необходимости округления результатов измерений и погрешностей.

Ниже излагаются основные правила округления чисел.

1. Значащими цифрами числа считаются все цифры от первой слева, не равной нулю, до последней, записанной справа. При этом нули, записанные в виде множителя 10^n, не учитываются.

Примеры:

1) число 2000 имеет четыре значащих цифры,

2) число $2{,}000 \cdot 10^3$ тоже имеет четыре значащих цифры,

3) число $2 \cdot 10^3$ имеет одну значащую цифру.

2. Если при округлении числа первая из отбрасываемых цифр (считая слева направо) меньше 5, то остающиеся цифры не меняются.

Пример: Пусть число 38,7488 надо округлить так, чтобы в нем остались три значащих цифры. Результат округления: 38,7.

3. Если первая из отбрасываемых цифр (считая слева направо) больше 5, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу.

Пример: Пусть число 284,3681 надо округлить так, чтобы в нем осталось пять значащих цифр. Результат округления: 284,37.

4. Если первая из отбрасываемых цифр (считая слева направо) равна 5, а следующие за ней цифры неизвестны или нули, то последнюю сохраняемую цифру числа не изменяют, если она четная, и увеличивают на единицу, если она нечетная.

Примеры:

1) Пусть число 28,25 надо округлить так, чтобы в нем остались три значащих цифры. Результат округления: 28,2.

2) Пусть число 123,7550 надо округлить так, чтобы в нем осталось пять значащих цифр. Результат округления: 123,76.

5. При округлении больших чисел может возникнуть расхождение между числом требуемых значащих цифр и количеством разрядов в нем. Для устранения этого расхождения следует использовать множитель 10^n, позволяющий уменьшить число значащих цифр.

Пример: Пусть число 387625, в котором шесть значащих цифр, требуется округлить так, чтобы в нем остались три значащих цифры. Если использовать правило п. 3 и записать 388000, то исходное требование округления до трех значащих цифр оказывается невыполненным, т. к. записанное число 388000 по-прежнему имеет шесть значащих цифр. Поэтому предварительно надо записать число

387625 в виде $387{,}625 \cdot 10^3$ или $38{,}7625 \cdot 10^4$, или $3{,}87625 \cdot 10^5$ и т. д. Результат после округления: $388 \cdot 10^3$ или $38{,}8 \cdot 10^4$, или $3{,}88 \cdot 10^5$ и т.д. Как видно из примера, множитель 10^n может быть различным. Рациональный выбор множителя обсуждается ниже в п. 9.

6. Округление результата измерений и погрешности следует начинать с округления погрешностей. Погрешность в окончательном виде дается с одной или двумя значащими цифрами. Две значащие цифры в оценке погрешности приводят только при особо точных измерениях, а также в том случае, если цифра старшего разряда числа, выражающего погрешность, равна 3 или меньше 3.

Примеры: 1) значение погрешности 0,47835, полученное путем расчетов, округляется до 0,5;

2) значение погрешности 0,13628 округляется до 0,14.

7. Результат измерения округляется до цифры того же разряда, на котором заканчивается значение погрешности.

Примеры: 1) результат измерения $14{,}5324 \pm 0{,}25$ округляется до $14{,}53 \pm 0{,}25$; но не до $14{,}5 \pm 0{,}25$ или $14{,}532 \pm 0{,}25$;

2) результат измерения $28{,}3000 \pm 0{,}05$ округляется до $28{,}30 \pm 0{,}05$, но не до $28{,}3 \pm 0{,}05$.

8. Если значение погрешности имеет множитель 10^n, то значение результата необходимо преобразовать так, чтобы это значение тоже имело множитель 10^n. При записи результата и погрешности множитель 10^n можно выносить за скобки.

Применение множителя 10^n в ряде случаев позволяет уменьшить число значащих цифр.

Примеры: 1) результат $38{,}2402 \pm 5 \cdot 10^{-3}$ можно после округления представить в виде $38240 \cdot 10^{-3} \pm 5 \cdot 10^{-3}$ или $(38240 \pm 5) \cdot 10^{-3}$. Однако результат можно записать и так: $38{,}240 \pm 0{,}005$. В каком виде удобно записать результат, зависит от конкретной физической величины;

2) результат $683263 \pm 832{,}5$. Если округлить погрешность до 800, то в этом значении остаются 3 значащих цифры, тогда как согласно п. 6 в погрешности должна сохраняться одна значащая цифра. Поэтому надо предварительно ввести множитель 10^n в значение результата и погрешности, например: $6832{,}63 \cdot 10^2 \pm 8{,}325 \cdot 10^2$, а затем уже провести округление: $(6833 \pm 8) \cdot 10^2$. Можно выбрать множители 10^3, 10^4, 10^5 и т. д. и записать результат вместе с погрешностью: $(683{,}3 \pm 0{,}8) \cdot 10^3$ или $(68{,}33 \pm 0{,}08) \cdot 10^4$, или $6{,}833 \pm 0{,}008) \cdot 10^5$ и т.д.

9. Примеры, приведенные в пп. 5 и 8, показывают, что множитель 10^n, вводимый при записи результата и погрешности, может быть различным. Однако при выборе множителя 10^n принято руководствоваться таблицей кратных или дольных приставок, которые имеют свои названия.

Таблица 3

Множитель	Наименование приставки	Обозначение	Множитель	Наименование приставки	Обозначение
10^{12}	тера	Т	10^{-1}	(деци)	д
10^{9}	гига	Г	10^{-2}	(санти)	с
10^{6}	мега	М	10^{-3}	милли	м
10^{3}	кило	к	10^{-6}	микро	мк
10^{2}	(гекто)	г	10^{-9}	нано	н
10^{1}	(дека)	да	10^{-12}	пико	п

Примечание. Приставки, заключенные в скобках, допускается применять только в наименованиях кратных и дольных единиц, получивших широкое распространение, например, допустимо наименование «сантиметр», но не допустимо «сантивольт».

Выбор кратной или дольной единицы диктуется удобством ее применения. На практике эти единицы обычно выбирают такими, чтобы числовое значение измеренной величины находилось в диапазоне от 0,1 до 1000.

Примеры записи результатов измерений:

$R = (52{,}35 \pm 0{,}04)$ кОм;

$C = (162{,}5 \pm 0{,}7)$ нФ или $C = (0{,}1625 \pm 0{,}0007)$ мкФ.

10. Изложенные правила применяются только при округлении окончательных результатов. Все промежуточные вычисления выполняются с большим числом разрядов во избежание ощутимой потери точности.

5.2. ПОЛУЧЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТА И ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ОДНОКРАТНОГО ПРЯМОГО ИЗМЕРЕНИЯ (ПРИМЕР)

Пусть при проведении некоторого эксперимента использовался вольтметр, имеющий класс точности 2,5 и диапазон измерений 0...300 В. На вольтметре был получен отсчет измеряемого напряжения 267 В. Абсолютная инструментальная погрешность определяется по формуле (7):

$$\Delta U = (2{,}5/100) \cdot 300 = 7{,}5 \text{ В}$$

или после округления $\Delta U = 8$ В.

Выводы:

1) результаты измерения $U = 267$ В,

2) погрешность результата измерения определяется целиком абсолютной инструментальной погрешностью, т. е. $\Delta_s(x) = \Theta = 8$ В.

Форма представления результата и погрешности измерения следующая:

$$U = (267 \pm 8) \text{ В}, \quad \delta = (8/267) \cdot 100 \approx 3\%$$

или $$U = 267 \text{ В}; \ \Delta U = 8 \text{ В}, \ \delta = 3\%,$$

или $$U = (259...275) \text{ В}, \quad \delta \approx 3\%.$$

5.3. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЯМЫХ МНОГОКРАТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

На рис. 1 представлена блок-схема, определяющая порядок обработки результатов прямых многократных измерений [1]:

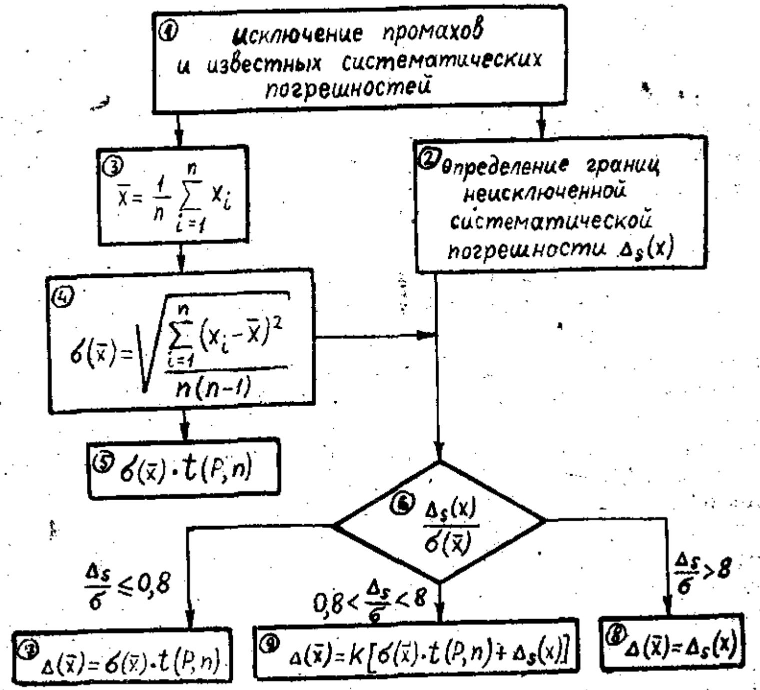

Рис. 1. Блок-схема порядка обработки результатов прямых многократных измерений

Описание блок-схемы:

Блок 1. Оцениваются и исключаются известные систематические погрешности и промахи, вследствие чего получается исправленный ряд наблюдений. Следует иметь в виду, что вопрос о выявлении систематических погрешностей является достаточно сложным. Существуют различные приемы их выявления (см., например, п. 4.1 данной инструкции). Но в каждой конкретной работе лабораторного практикума рекомендуется обсудить источники появления систематических погрешностей вместе с преподавателем.

Блок 2. Определяются границы неисключенной систематической погрешности результата измерения $\Delta_s(x)$. В первом приближении, если в инструкции к лабораторной работе нет специальных указаний, будем считать неисключенную систематическую погрешность равной абсолютной инструментальной погрешности средств измерения. Доверительная вероятность такой погрешности принимается равной 1.

Блок 3. Вычисляется среднее арифметическое $\bar{x}$ исправленного ряда наблюдений по формуле (4):

$$\bar{x} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)/n.$$

Полученное значение является оценкой значения измеряемой величины x, т. е. результатом измерения.

Блок 4. Вычисляется оценка среднего квадратического отклонения результата измерения по формуле (8):

$$\sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}.$$

Блок 5. Выбирается доверительная вероятность P. Для технических измерений чаще всего выбирается $P = 0{,}95$ [7]. По выбранной вероятности P и числу измерений n находится коэффициент $t(P, n)$ (табл. 2), после чего вычисляются доверительные границы случайной погрешности результата измерений $\sigma(\bar{x}) \cdot t(P, n)$.

Блок 6.
Рассчитывается величина $\Delta_s(x)/\sigma(\bar{x})$.

Блок 7. Если $\Delta_s/\sigma \leqslant 0{,}8$, то неисключенную систематическую погрешность можно не учитывать. В этом случае погрешность результата измерения $\Delta(\bar{x})$ определяется случайной погрешностью

$$\Delta(\bar{x}) = \sigma(\bar{x}) \cdot t(P, n).$$

Блок 8. Если $\Delta_s/\sigma > 8$ (а именно такое соотношение между неисключенной систематической погрешностью и случайной является характерным для большинства технических измерений), то погрешность результата измерения будет целиком определяться неисключенной систематической погрешностью, а случайную погрешность можно не учитывать, т. е.

$$\Delta(\bar{x}) = \Delta_s(x).$$

Блок 9. Если значение Δ_s/σ лежит в диапазоне от 0,8 до 8, то при определении суммарной доверительной погрешности учитываются оба вида погрешности:

$$\Delta(\bar{x}) = k[\sigma(\bar{x}) \cdot t(P, n) + \Delta_s(x)],$$

где коэффициент k определяется по табл. 4 в зависимости от соотношения Δ_s/σ [7].

Таблица 4

Δ_s/σ	0,8	1	2	3	4	5	6	7	8
k	0,75	0,73	0,71	0,73	0,76	0,78	0,81	0,83	0,84

10. Окончательный результат записывается в виде

$$x = \bar{x} \pm \Delta(\bar{x}); \quad P = \ldots$$

$$\delta = (\Delta(\bar{x})/\bar{x}) \cdot 100\%.$$

Пример обработки результатов прямых многократных измерений

Название опыта: определение диаметра проволоки.
Применяемый прибор: микрометр.
Цена деления: 0,01 мм.
Предельная инструментальная погрешность: 4 мкм (0,004 мм).
Результаты отдельных измерений и соответствующие погрешности сведены в табл. 5.

Таблица 5

Номер измерений	x_i, мм	Δx_i, мм	Δx_i^2, мм^2
1	1,62	$-4 \cdot 10^{-3}$	$16 \cdot 10^{-6}$
2	1,60	$+10 \cdot 10^{-3}$	$256 \cdot 10^{-6}$
3	1,63	$-14 \cdot 10^{-3}$	$196 \cdot 10^{-6}$
4	1,61	$+6 \cdot 10^{-3}$	$36 \cdot 10^{-6}$
5	1,62	$-4 \cdot 10^{-3}$	$16 \cdot 10^{-6}$
6	1,82	промах	

$$\Sigma x_i = 8{,}08 \text{ мм}, \qquad \Sigma \Delta x_i^2 = 520 \cdot 10^{-6} \text{ мм}^2.$$

Результаты измерений

1. Рассчитываем оценку значения измеряемой величины:

$$\bar{x} = \frac{8{,}08\ \text{мм}}{5} = 1{,}616\ \text{мм}.$$

2. Рассчитываем оценку СКО результата измерения:

$$\sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{520 \cdot 10^{-6}\ \text{мм}^2}{5 \cdot 4}} = 5{,}10 \cdot 10^{-3}\ \text{мм}.$$

3. Выбираем $P = 0{,}95$. По табл. 2 находим коэффициент Стьюдента $t(P, n) = 2{,}78$.

Рассчитываем доверительные границы случайной погрешности результата измерения:

$$t(P, n) \cdot \sigma(\bar{x}) = 2{,}78 \cdot 5{,}10 \cdot 10^{-3}\ \text{мм} = 14{,}16 \cdot 10^{-3}\ \text{мм} \approx 0{,}014\ \text{мм}.$$

4. Вычисляем отношение Δ_s/σ:

$$\Delta_s/\sigma = 0{,}004/0{,}0051 = 0{,}785 < 0{,}8.$$

Следовательно, согласно блок-схеме, приведенной на рис. 1,

$$\Delta(\bar{x}) = t(P, n) \cdot \sigma(\bar{x}),\ \text{т. е.}\ \Delta(\bar{x}) = 0{,}014\ \text{мм}.$$

5. Запись результата измерения:

$$x = (1{,}616 \pm 0{,}014),\ \text{мм};\quad P = 0{,}95,$$

$$\delta = (0{,}014/1{,}616) \cdot 100\% \approx 0{,}9\%.$$

Пояснения к примеру.

1. При заполнении столбца x_i табл. 5 установили, что результат при $i=6$ резко отличается от предыдущих, что могло получиться в результате неточной записи. Этот результат считаем промахом и исключаем его. Таким образом, исправленный ряд наблюдений содержит пять значений ($n=5$).

2. Систематическая погрешность при данных измерениях отсутствует, так как прибор проверен и признан годным к эксплуатации, факторы, могущие влиять на результат измерения, явно не просматриваются.

3. Вычисляем оценку значения измеряемой величины $\bar{x}$ по формуле (4), после чего заполняем графы $\Delta x_i = x_i - \bar{x}$ и Δx_i^2 табл. 5.

4. Находим СКО результата измерения $\sigma(\bar{x})$ по формуле (8).

5. Вычисляем доверительные границы по формуле (9), проводим округление в соответствии с правилами п. 5.1, т. е. оставляем две значащие цифры, так как первая значащая цифра (единица) меньше трех.

6. Запись окончательного результата измерения означает, что истинное значение диаметра проволоки с вероятностью 0,95 находится в интервале 1,602...1,630 мм.

Относительная погрешность результата измерения $\delta = 0{,}9\%$.

5.4. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

При косвенных измерениях искомое значение измеряемой величины A находят на основании известной зависимости между A и величинами $a_1, a_2, \ldots, a_m$, определяемыми прямыми измерениями:

$$A = F(a_1, a_2, \ldots, a_m).$$

Обработка результатов таких измерений должна производиться следующим образом:

1. Для каждой из величин $a_1, \ldots, a_m$ определяются среднее арифметическое $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m$; СКО $\sigma(\bar{a}_1), \ldots, \sigma(\bar{a}_m)$; неисключенные систематические погрешности $\Delta_s(a_1) \ldots, \Delta_s(a_m)$.

2. Вычисляется оценка результата косвенного измерения

$$\bar{A} = F(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m).$$

3. Находится СКО результата косвенного измерения по формуле

$$\sigma(\bar{A}) = \sqrt{(\partial A/\partial a_1)^2 \sigma^2(\bar{a}_1) + \ldots + (\partial A/\partial a_m)^2 \sigma^2(\bar{a}_m)}$$

или

$$\sigma(\bar{A}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} [(\partial A/\partial a_i)^2\, \sigma^2(\bar{a}_i)]}. \qquad (10)$$

Частные производные вычисляются как обычные производные, но при этом переменной считается только тот аргумент, по которому берется производная.

Например.

$$V = \pi R^2 h;\quad \text{тогда}\quad \partial V/\partial R = 2\pi R h,\quad \text{а}\quad \partial V/\partial h = \pi R^2.$$

4. Находится неисключенная систематическая погрешность косвенного измерения по формуле

$$\Delta_s(A) = 1{,}1 \sqrt{\sum_{i=1}^{m} [(\partial A/\partial a_i)_2\, \Delta_s^2(a_i)]}. \qquad (11)$$

Коэффициент 1.1 определен в соответствии с рекомендациями, приведенными в книге [7]; для доверительной вероятности $P = 0{,}95$.

5. Для некоторых распространенных функциональных зависимостей $A = F(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ формулы (10) и (11) могут быть преобразованы к виду, удобному для практических расчетов.

а) Если $A = a_1 + a_2 + \ldots$, то

$$\sigma(\bar{A}) = \sqrt{\sigma^2(\bar{a}_1) + \sigma^2(\bar{a}_2) + \ldots} \qquad (12)$$

и

$$\Delta_s(A) = 1{,}1 \sqrt{\Delta_s^2(a_1) + \Delta_s^2(a_2) + \ldots} \qquad (13)$$

б) Если $A = a_1^n \cdot a_2^m \ldots / a_3^p \ldots$, то

$$\sigma(\bar{A}) = \bar{A}\sqrt{n^2\left(\frac{\sigma(\bar{a}_1)}{\bar{a}_1}\right)^2 + m^2\left(\frac{\sigma(\bar{a}_2)}{\bar{a}_2}\right)^2 + p^2\left(\frac{\sigma(\bar{a}_3)}{\bar{a}_3}\right)^2 + \ldots} \quad (14)$$

и

$$\Delta_s(A) = 1{,}1\,\bar{A}\sqrt{n^2\left(\frac{\Delta_s(\bar{a}_1)}{\bar{a}_1}\right)^2 + m^2\left(\frac{\Delta_s(\bar{a}_2)}{\bar{a}_2}\right)^2 + p^2\left(\frac{\Delta_s(\bar{a}_3)}{\bar{a}_3}\right)^2 + \ldots} . \quad (15)$$

6. Дальнейшая обработка производится так же, как и для прямых измерений, а именно: находятся доверительные границы случайной погрешности результата измерений $\sigma(\bar{A}) \cdot t(P, n)$.

7. Рассчитывается величина Δ_s/σ.

8. Если $\Delta_s/\sigma < 0{,}8$, то неисключенную систематическую погрешность можно не учитывать. В этом случае погрешность результата измерения Δ определяется случайной погрешностью

$$\Delta(\bar{A}) = \sigma(\bar{A}) \cdot t(P, n).$$

9. Если $\Delta_s/\sigma > 8$, то погрешность результата измерения целиком определяется неисключенной систематической погрешностью, а случайную погрешность можно не учитывать, т. е.

$$\Delta(\bar{A}) = \Delta_s(\bar{A}).$$

10. Если значение Δ_s/σ лежит в диапазоне от 0,8 до 8, то при определении суммарной доверительной погрешности учитываются оба вида погрешности:

$$\Delta(\bar{A}) = k[\sigma(\bar{A}) \cdot t(P, n) + \Delta_s(\bar{A})],$$

где коэффициент k определяется по табл. 4 в зависимости от отношения Δ_s/σ.

11. Окончательный результат записывается в виде

$$A = \bar{A} \pm \Delta(\bar{A}); \; P = \ldots,$$

$$\delta = (\Delta(\bar{A})/\bar{A})\ 100\%.$$

Наряду с описанным методом обработки результатов косвенных измерений применяется метод приведения, основанный на приведении ряда значений косвенно измеряемых величин к ряду прямых измерений.

Основные пункты метода приведения:

1. Пусть зависимость измеряемой величины A от величин a_1, a_2, ..., a_m дается формулой

$$A = F(a_1, a_2, \ldots, a_m), \quad (16)$$

причем для каждой величины проведено n прямых измерений. Затем вычисляют значения величины A: $A_1, A_2, \ldots, A_n$, подставляя в формулу (16) последовательно сочетания отдельных результатов измерения аргументов: при расчете A_1, сочетание $(a_1, a_2, \ldots, a_m)_1$ и т. д., при расчете A_n — сочетание $(a_1, a_2, \ldots, a_m)_n$.

2. Полученный ряд данных можно рассматривать как ряд результатов прямых измерений и вести обработку по методике, изложенной в п. 5.3.

При расчете неисключенной систематической погрешности результата косвенных измерений следует пользоваться формулой (11) и ее частными видами — (13) и (15).

Известны и другие методы обработки результатов косвенных измерений, изложенные, например, в книгах [3, 6]. Однако в большинстве случаев значения измеряемых величин и соответствующих погрешностей, полученные различными методами, незначительно отличаются друг от друга.

Пример обработки результатов косвенного измерения

Название опыта: определение плотности ρ материала, из которого изготовлен цилиндр.

Формула, по которой рассчитывается плотность материала цилиндра:

$$\rho = 4\,m/\pi\,d^2 h.$$

Величины, значения которых определяются путем прямых измерений:

масса цилиндра m,
диаметр цилиндра d,
высота цилиндра h.

а) Определение массы цилиндра.

Масса цилиндра определяется однократным взвешиванием на технических лабораторных весах.

Применяемый прибор — весы лабораторные.
Диапазон измерения 10...200 г.
Предельная погрешность 0,05 г.
Результат взвешивания $m = 14{,}75$ г.

$$\Delta m \text{ или } \Delta_s(m) = 0{,}05 \text{ г},$$

$$m = (14{,}75 \pm 0{,}05) \text{ г}.$$

б) Определение диаметра цилиндра.

Применяемый прибор — штангенциркуль.
Диапазон измерения 0...125 мм.
Цена деления нониуса 0,05 мм.
Предельная погрешность $\Delta_м(d) = 0{,}05$ мм.

Результаты отдельных измерений и соответствующие погрешности сведены в табл. 6.

Таблица 6

Номер измерения	d_i, мм	Δd_i, мм	Δd_i^2, мм²
1	15,10	$+4\cdot10^{-2}$	$16\cdot10^{-4}$
2	15,20	$-6\cdot10^{-2}$	$36\cdot10^{-4}$
3	15,15	$-1\cdot10^{-2}$	$1\cdot10^{-4}$
4	15,10	$+4\cdot10^{-2}$	$16\cdot10^{-4}$
5	15,15	$-1\cdot10^{-2}$	$1\cdot10^{-4}$

$$\Sigma d_i = 75{,}70 \text{ мм}, \qquad \Sigma \Delta d_i^2 = 70\cdot10^{-4} \text{ мм}^2.$$

Результаты измерения диаметра цилиндра:

1. $\bar{d} = \dfrac{75{,}70 \text{ мм}}{5} = 15{,}14$ мм.

2. $\sigma(\bar{d}) = \sqrt{\dfrac{70\cdot10^{-4} \text{ мм}^2}{5\cdot4}} = 1{,}87\cdot10^{-2}$ мм.

3. Неисключенная систематическая погрешность определяется предельной инструментальной погрешностью, т. е. $\Delta_s(d) = 0{,}05$ мм.

в) Определение высоты цилиндра.

Применяемый прибор — штангенциркуль.

Цена деления нониуса 0,05 мм.

Диапазон измерения 0...125 мм.

Предельная погрешность 0,05 мм.

Результаты отдельных измерений и соответствующие погрешности сведены в табл. 7.

Таблица 7

Номер измерения	h_i, мм	Δh_i, мм	Δh_i^2, мм²
1	31,85	0,02	$4\cdot10^{-4}$
2	31,90	$-0{,}03$	$9\cdot10^{-4}$
3	31,85	0,02	$4\cdot10^{-4}$
4	31,85	0,02	$4\cdot10^{-4}$
5	31,90	$-0{,}03$	$9\cdot10^{-4}$

$$\Sigma h_i = 159{,}35 \text{ мм}, \qquad \Sigma \Delta h_i^2 = 30\cdot10^{-4} \text{ мм}^2.$$

Результаты измерения высоты цилиндра:

1. $\bar{h} = \dfrac{159{,}35 \text{ мм}}{5} = 31{,}87$ мм.

2. $\sigma(\bar{h}) = \sqrt{\dfrac{30\cdot10^{-4} \text{ мм}^2}{5\cdot4}} = 1{,}23\cdot10^{-2}$ мм.

3. Неисключенная систематическая погрешность определяется предельной инструментальной погрешностью

$$\Delta_s(h) = 0{,}05 \text{ мм}.$$

Результаты измерения плотности материала:

1. $\bar{\rho} = \dfrac{4\,\bar{m}}{\pi\,\bar{d}^2\,\bar{h}}$; $\bar{\rho} = \dfrac{4\cdot14{,}75}{3{,}14\cdot(15{,}14)^2\cdot31{,}87} = 2{,}6159\cdot10^{-3}$ г/мм³.

2. Для оценки СКО воспользуемся формулой (14), которая в обозначениях рассматриваемой задачи примет вид

$$\sigma(\bar{\rho}) = \bar{\rho}\sqrt{\left(\frac{\sigma(\bar{m})}{\bar{m}}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma(\bar{d})}{\bar{d}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma(\bar{h})}{\bar{h}}\right)^2}.$$

После подстановки численных значений и расчетов получим

$$\sigma(\bar{\rho}) = 2{,}6159\cdot10^{-3} \text{ г/мм}^3\sqrt{\left(\frac{0{,}00 \text{ г}}{14{,}75 \text{г}}\right)^2 + 4\left(\frac{1{,}87\cdot10^{-2} \text{ мм}}{15{,}14 \text{ мм}}\right)^2 + \left(\frac{1{,}23\cdot10^{-2} \text{ мм}}{31{,}87 \text{ мм}}\right)^2} =$$
$$= 6{,}55\cdot10^{-6} \text{ г/мм}^3.$$

3. Для оценки неисключенной систематической погрешности воспользуемся формулой (15), которая в обозначениях рассматриваемой задачи примет вид

$$\Delta_s(\bar{\rho}) = 1{,}1\,\bar{\rho}\sqrt{\left(\frac{\Delta_s(\bar{m})}{\bar{m}}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta_s(\bar{d})}{\bar{d}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_s(\bar{h})}{\bar{h}}\right)^2}.$$

После подстановки численных значений и расчетов получим

$$\Delta_s(\rho) = 1{,}1\cdot2{,}6159\cdot10^{-3} \text{ г/мм}^3 \times$$
$$\times\sqrt{\left(\frac{0{,}05 \text{ г}}{14{,}75 \text{ г}}\right)^2 + 4\left(\frac{0{,}05 \text{ мм}}{15{,}14 \text{ мм}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}05 \text{ мм}}{31{,}87 \text{ мм}}\right)^2} = 21{,}8\cdot10^{-6} \text{ г/мм}^3.$$

4. Находим доверительный интервал, задаваясь $P = 0{,}95$ и $t(P,n) = 2{,}78$ при 5 измерениях (см. табл. 2):

$$t(P,n)\cdot\sigma(\bar{\rho}) = 2{,}78\cdot6{,}55\cdot10^{-6} \text{ г/мм}^3 = 18{,}2\cdot10^{-6} \text{ г/мм}^3.$$

5. Рассчитываем Δ_s/σ:

$$\Delta_s/\sigma = 21{,}8\cdot10^{-6}/6{,}55\cdot10^{-6} = 3{,}33, \text{ т. е. } 0{,}8 < \Delta_s/\sigma < 8.$$

Следовательно, суммарная погрешность

$$\Delta(\bar{\rho}) = k[\sigma(\bar{\rho})\cdot t(P,n) + \Delta_s(\bar{\rho})],$$

где k берем из табл. 4 ($k = 0{,}74$),

$$\Delta(\bar{\rho}) = 0{,}74\cdot[18{,}2\cdot10^{-6} + 21{,}8\cdot10^{-6}] = 29{,}6\cdot10^{-6} \text{ г/мм}^3.$$

6. Запись результата измерения плотности материала:

а) предварительная

$$\rho = (2{,}6159 \cdot 10^{-3} \pm 29{,}6 \cdot 10^{-6})\ \text{г/мм}^3.$$

б) окончательная, после округления и перехода к единицам системы СИ

$$\rho = (2{,}616 \pm 0{,}030) \cdot 10^3\ \text{кг/м}^3,\ P = 0{,}95.$$

$$\delta = (0{,}030/2{,}616) \cdot 100\% \approx 1{,}1\%.$$

6. ГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

В ряде случаев целью измерения является установление функциональной зависимости $y = f(x)$ и построение графика этой функции.

При представлении результатов в виде графиков следует соблюдать следующие правила:

1. Провести ряд измерений искомой величины при нескольких значениях переменной. Большое значение имеет выбор числа экспериментальных точек, то есть совокупности численных значений аргумента и функции. В местах перегибов, максимумов, крутых скачков число точек должно быть бо́льшим, чем в областях плавного изменения функции. Поэтому перед началом работы следует провести несколько предварительных измерений по всему диапазону изменения переменных, чтобы составить общее представление об исследуемой зависимости и наметить план эксперимента.

2. Установить интервал изменения аргумента и функции и выбрать масштаб по осям координат. Рекомендуется выбирать масштаб, кратный 10^n, $2 \cdot 10^n$, $5 \cdot 10^n$, где n — любое целое число, положительное или отрицательное.

Примеры:

1. Правильный выбор масштаба: в 1 см—200 Ом, в 1 см—50 мА, в 1 см—10 кВ, в 1 см—10^2 м/с и т. д.

2. Неправильный выбор масштаба: в 1 см—15 Ом, в 1 см—40 м/с, в 1 см—35 кг и т. п.

Начало отсчета следует выбирать так, чтобы отрезки по осям координат, которые определяются форматом листа миллиметровки, несколько перекрывали интервалы изменения аргумента и функции.

При этом разметка по осям координат не обязательно должна начинаться с нуля.

3. Нанести на поле графика экспериментальные точки. Если проведено несколько серий измерений, то рекомендуется точки каждой серии отмечать условными значками — кружочками, треугольниками, квадратами и т. д.

4. Построить график исследуемой функции, который в подавляющем большинстве случаев должен представлять собой плавную непрерывную кривую. При этом необходимо следить, чтобы число точек под кривой и над ней было по возможности одинаковым. Описанный способ построения графиков существенно сглаживает «шум» эксперимента, обусловленный наличием случайных погрешностей, однако требует от эксперимента некоторых предварительных представлений о возможном ходе искомой зависимости.

5. Если на графике для сравнения с экспериментом приводят теоретическую кривую, то точки, по которым ее проводят, выбирают по своему усмотрению. Наносить их нужно без нажима, лучше всего карандашом, чтобы при необходимости можно было стереть. Экспериментальные данные следует отмечать хорошо выделяющимися точками.

6. Если на графике имеется теоретическая кривая, то плавную кривую через экспериментальные точки проводить не следует.

7. Для оценки погрешности полученного графического представления искомой зависимости можно воспользоваться методом обработки при прямых измерениях, применяя его к нескольким экспериментальным точкам, выбираемым на кривой в характерных участках, например, в начале кривой, в точках перегиба, экстремумов, в конце кривой. При этом в качестве среднего арифметического берется точка, лежащая непосредственно на кривой.

Запись полученных погрешностей может даваться либо в численном виде, особенно когда погрешность почти постоянна в соответствующих точках, либо в виде вертикальных отрезков прямой, длина которых равна погрешности (с учетом масштаба). Последний способ часто применяется для указания на графике разброса экспериментальных точек.

8. График выполняется на миллиметровке, подклеивается

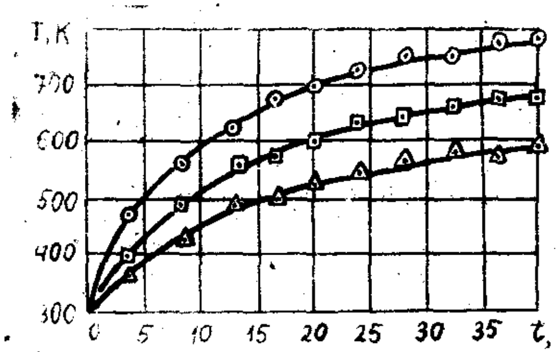

Рис. 2. Пример выполнения графика: ○ — образец 1, □ — образец 2, △ — образец 3

в журнал лабораторных работ и снабжается подписью, разъясняющей его смысл.

На рис. 2 приведен пример выполнения такого графика.

Здесь представлена зависимость температуры от времени нагрева образцов из различных материалов. Каждая точка на графиках является средней величиной трех измерений температуры. Если на одном рисунке приводится несколько кривых, то для каждой из них выбирают свое обозначение экспериментальных точек. Использованные обозначения надо обязательно расшифровать либо в подписи под рисунком, либо в тексте, где описывается данный график.

7. ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

x — измеряемая величина,
$[x]$ — единица физической величины,
$x_д$ — действительное значение измеряемой величины,
$x_{ист}$ — истинное значение измеряемой величины,
$\bar{x}$ — оценка результата измерений; при прямых измерениях представляет собой среднее арифметическое экспериментальных данных,
Δx — погрешность результата измерения,
$\sigma(\bar{x})$ — оценка среднего квадратического отклонения (СКО) среднего арифметического результата измерения,
P — доверительная вероятность,
n — число измерений,
$t(P, n)$ — коэффициент Стьюдента, зависящий от доверительной вероятности P и числа измерений n,
$\Delta(\bar{x}) = t(P,n)\,\sigma(\bar{x})$ — доверительные границы случайной погрешности,
γ_0 — класс точности,
x_N — нормирующее значение,
Θ — границы инструментальной погрешности,
$\Delta_s(x)$ — границы неисключенной систематической погрешности,
$\Delta(\bar{x})$ — границы погрешности результата измерений,
δ — относительная погрешность.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Обработка и оформление результатов измерений: Метод. указания/Куйбышев. авиац. ин-т. Куйбышев, 1988. 23 с.
2. Светозаров В. В. Элементарная обработка результатов измерений. М.: МИФИ, 1983. 50 с.
3. Зайдель А. В. Ошибки измерений физических величин. Л.: Наука, 1974.
4. Рогачев Н. М., Волкова Э. М., Федосова Л. И. Физические измерения. Измерение линейных и угловых величин / Куйбышев. авиац. ин-т. Куйбышев, 1977. 50 с.

5. Куликовский К. Л., Купер В. Я. Методы и средства измерений. М.: Энергоиздат, 1986. 448 с.
6. Новицкий П. В., Зограф И. А. Оценка погрешностей результатов измерений. Л.: Энергоатомиздат, 1985. 248 с.
7. Селиванов М. Н., Фридман А. Э., Кудряшова Ж. Ф. Качество измерений: Метрологическая справочная книга. Л.: Лениздат, 1987. 295 с.
8. Поверка средств электрических измерений: Справочная книга / Л. И. Любимов, И. Д. Форсилова, Е. З. Шапиро. Л.: Энергоатомиздат, Ленингр. отд-ние, 1987. 296 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Составители: **Муркин Леонид Павлович**
Мышкина Наталья Владимировна

Редактор Т. К. Кретинина
Техн. редактор Г. А. Усачева
Корректор Н. С. Куприянова

Сдано в набор 25.02.92 г. Подписано в печать 10.04.92 г.
Формат 60×84 1/16. Бумага оберточная.
Гарнитура литературная. Печать высокая.
Усл. печ. л. 1,4. Усл. кр.-отт. 1,5. Уч.-изд. л. 1.45.
Тираж 2000 экз. Заказ 115. Бесплатно.

Самарский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт имени академика С. П. Королева.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Тип. ЭОЗ Самарского авиационного института.
443001 Самара, ул. Ульяновская, 18.