МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

ТЕОРИЯ ГРАФОВ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Электронный учебно-методический комплекс
по дисциплине в LMS Moodle

Работа выполнена по мероприятию блока 1 «Совершенствование
образовательной деятельности» Программы развития СГАУ
на 2009 – 2018 годы по проекту «Разработка контента для системы электронного и дистанционного
обучения по основным образовательным программам факультета информатики»
Соглашение № 1/34 от 3.06.2013 г.

САМАРА
2013

УДК 510
Т 338

Автор-составитель: **Додонова Наталья Леонидовна**

Теория графов и ее приложения [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс по дисциплине в LMS Moodle / Мин-во образования и науки РФ, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т); авт.-сост. Н.Л. Додонова. - Электрон. текстовые и граф. дан. - Самара, 2013. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

В состав учебно-методического комплекса входят:

1.Лекционный материал
2.Задачи для практических занятий
3.Индивидуальные домашние задания
4.Варианты контрольных работ
5.Задания для самостоятельной работы
6.Вопросы к экзамену
7.Примерные задачи к экзамену
8.Тесты для промежуточного и итогового контроля знаний
9.Рабочая программа.

УМКД «Теория графов и ее приложения» предназначен для студентов факультета информатики, обучающихся по специальности 090303.65 «Информационная безопасность автоматизированных систем» в 5 семестре.

УМКД разработан на кафедре прикладной математики.

«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. академика С.П. Королева
(национально исследовательский университет)» (СГАУ)

Факультет информатики
кафедра «Прикладная математика»

Конспект лекций по дисциплине
ТЕОРИЯ ГРАФОВ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ
для специальности «Информационная безопасность автоматизированных систем»

Составитель Додонова Н.Л.

Самара 2013

СОДЕРЖАНИЕ

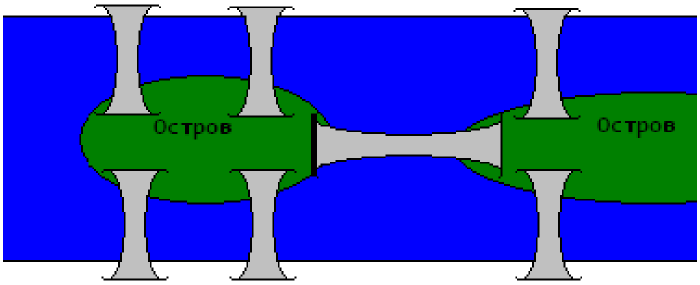
Введение
I. Начальные понятия
§ 1. Определение графа
§ 2. Элементы графа
§ 3. Смежность и инцидентность
§ 4. Операции над графами
§ 5. Изоморфизм графов
§ 6. Виды графов
II. МАРШРУТЫ, ЦЕПИ, ЦИКЛЫ
§ 1. Определение маршрута
§ 2. Метрические характеристики графов
§ 3. Маршруты заданной длины
§ 4. Кратчайшие маршруты
§ 5. Алгоритм Дейкстры
III. СВЯЗНОСТЬ
§ 1. Связные графы, компоненты связности
§ 2. Связность в орграфах
§ 3. Матрицы достижимости и транзитивное замыкание
§ 4. Алгоритм Уоршолла
§ 5. Вершинная и реберная связность
IV. ДЕРЕВЬЯ
§ 1. Определение и свойства свободных деревьев
§ 2. Центры и центроиды
§ 3. Кодирование свободных деревьев
§ 4. Остовные деревья
§ 5. Ориентированные деревья
§ 6. Упорядоченные деревья
§ 7. Кодирование упорядоченных деревьев
§ 8. Бинарные деревья
§ 9. Сбалансированные деревья

ВВЕДЕНИЕ

Теория графов — раздел дискретной математики, изучающий свойства графов. В общем смысле граф представляется как множество вершин (узлов), соединённых рёбрами. Стройная система специальных терминов и обозначений теории графов позволяет просто и доступно описывать сложные и тонкие вещи.

Теория графов находит применение, например, в геоинформационных системах. Существующие или вновь проектируемые дома, сооружения, кварталы, железнодорожные станции и т. п. рассматриваются как вершины, а соединяющие их дороги, инженерные сети, линии электропередач и т. п. — как рёбра. Применение различных вычислений, производимых на таком графе, позволяет, например, найти кратчайший объездной путь или ближайший продуктовый магазин, спланировать оптимальный маршрут.

История возникновения теории графов. Теория графов берет начало с решения знаменитым математиком Л. Эйлером задачи о Кенигсбергских мостах в 1736 году. Задача возникла в прусском городе на реке Прегал. Жителям нравилось гулять через реку через семь мостов, и они интересовались, могут ли они, начав путь с одного участка суши, обойти все мосты, посетив каждый лишь однажды, вернуться в точку начала пути, не переплывая реки.



Теория графов многократно переоткрывалась разными авторами при решении различных прикладных задач.

1. ***Задача о Кенигсбергских мостах.*** Обойти все четыре части суши, пройдя по каждому мосту один раз, и вернуться в исходную точку (рис. 1). Эта задача была решена Эйлером в 1736 году.

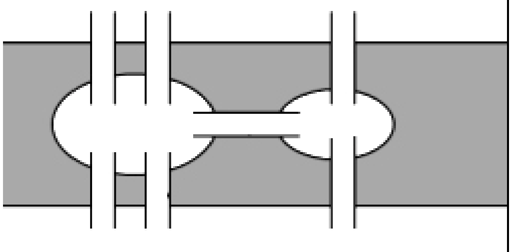
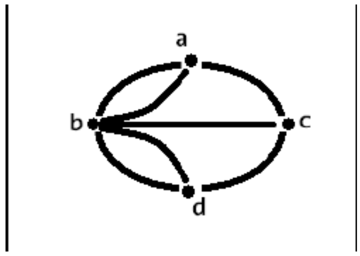


Рис. 1. Иллюстрация к задаче о Кенигсбергских мостах

Для решения этой задачи Эйлер построил граф:



2. ***Задача о трех домах и трех колодцах.*** Имеется три дома и три колодца. Провести от каждого дома к каждому колодцу тропинку так, чтобы тропинки не пересекались (рис.2). Эта задача была решена Куратовским в 1930 году.

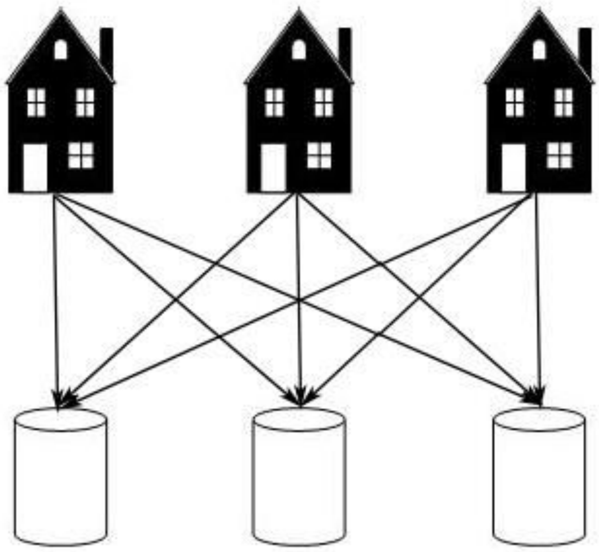


Рис. 2. Иллюстрация к задаче о трех домах и трех колодцах

Предметом первых задач теории графов были различные конфигурации, состоящие из точек и соединяющих их линий. При этом несущественно, являются ли эти линии прямыми или кривыми, длинными или короткими, тонкими или толстыми, важно только то, какие точки они соединяют. Таким образом, граф – это абстрактное математическое понятие.

Изображение графов на плоскости. При изображении графов чаще всего используется следующая система обозначений: каждой вершине сопоставляется точка на плоскости, и если между вершинами существует ребро, то соответствующие точки соединяются отрезком.

Не следует путать изображение графа с собственно графом (абстрактной структурой), поскольку одному графу можно сопоставить не одно графическое представление. Изображение призвано лишь показать, какие пары вершин соединены рёбрами, а какие — нет. Часто на практике бывает трудно ответить на вопрос, являются ли два изображения моделями одного и того же графа или нет. В зависимости от задачи, одни изображения могут давать более наглядную картину, чем другие.

I. НАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ

§ 1. Определение графа

Пусть V — непустое конечное множество, элементы этого множества будем называть вершинами.

Пусть $V^{(2)}$ — множество всевозможных пар *различных* элементов множества V: $V^{(2)} = \{(x, y) | x \in V, y \in V, x \neq y\}$.

Неориентированным графом (*графом*) G называется пара (V, E), где V – множество вершин, E – множество ребер, $E \subseteq V^{(2)}$.

Обычно граф изображают в виде диаграммы, на которой вершины обозначаются точками, а ребра, соединяющие две вершины – линиями между этими точками. Если (x, y) – ребро, тогда вершины x и y называются концами (вершинами) ребра (x, y).

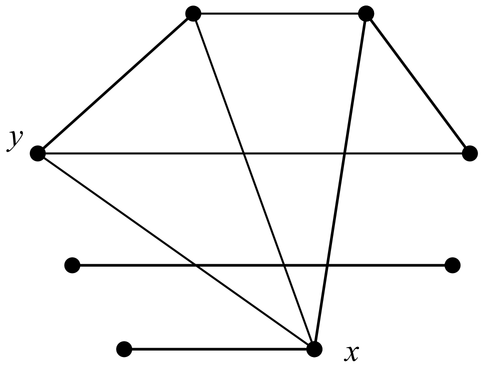


Рис.1.1 Неориентированный граф

Пусть $\tilde{V}^{(2)}$ — *мультимножество* всевозможных пар *различных* элементов множества V: $\tilde{V}^{(2)} = \{(x, y) | x \in V, y \in V, x \neq y\}$.

Мультиграфом (*графом с кратными* ребрами) G называется пара (V, E), где V – множество вершин, E – мультимножество ребер, $E \subseteq \tilde{V}^{(2)}$.

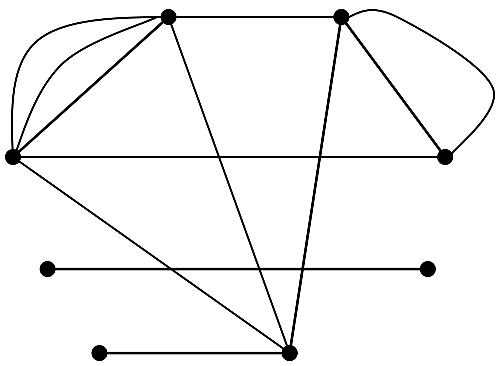


Рис. 1.2 Мультиграф

Пусть $\bar{V}^{(2)}$ – мультимножество *всевозможных* пар элементов множества V: $\bar{V}^{(2)} = \{(x, y) | x \in V, y \in V\}$.

Псевдографом (*графом с петлями*) G называется пара (V, E), где V – множество вершин, E – мультимножество ребер, содержащее элементы вида

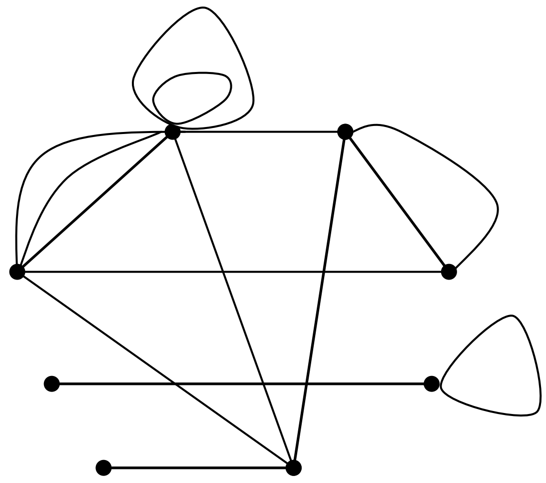


Рис. 1.3 Псевдограф

(x, x), $E \subseteq \overline{V}^{(2)}$.

Пусть $V^{[2]}$ — множество всевозможных *упорядоченных* пар *различных* элементов множества V: $V^{[2]} = \{(x_1, x_2) | x_1 \in V, x_2 \in V, x_1 \neq x_2\}$.

Ориентированным графом (*орграфом*) G называется пара (V, E), где V – множество вершин (*узлов*), E – множество ребер (*дуг*), $E \subseteq V^{[2]}$.

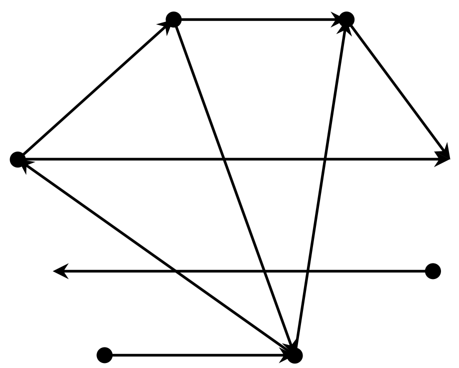


Рис. 1.4 Ориентированный граф

Аналогично определяются ориентированные мульти- и псевдографы.

Далее под понятием «граф» (если не оговорены дополнительные условия) будем понимать неориентированный граф без петель и кратных ребер.

Граф, состоящий из одной вершины, называется *тривиальным*.

Граф G (V, E) называется *пустым* (или *ноль-графом*), если он не содержит ни одного ребра, E=∅.

Граф называется *полным*, если любые две его вершины соединены ребром. Полный граф, содержащий p вершин, будем обозначать K_p .

§ 2. Элементы графа

Пусть дан граф G (V, E).

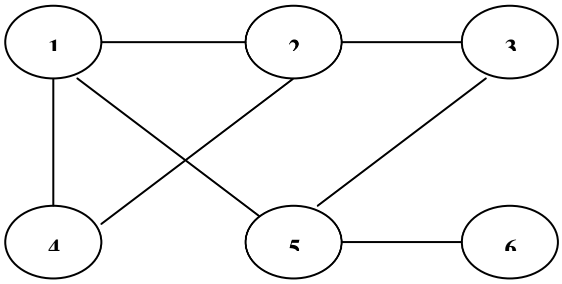


Рис. 2.1 Граф $G(V, E)$

Частью графа G (V, E) назовем пару (V', E'), такую что $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$.

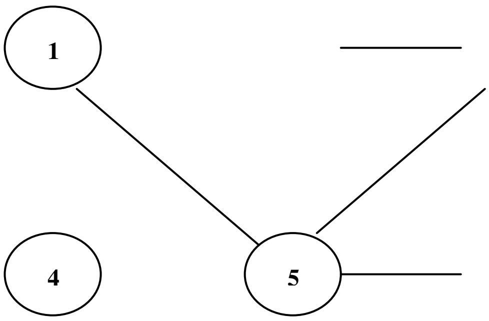


Рис. 2.2 Часть графа $G(V, E)$

Часть графа (V', E') назовем *подграфом* $G'(V', E')$ графа $G(V, E)$, если $E' = \{(x, y) \in E | \, x, y \in V'\}$.

Подграф $G'(V', E')$ назовем *правильным*, если для любых вершин $x, y \in V'$, $(x, y) \in E'$ тогда и только тогда, когда $(x, y) \in E$.

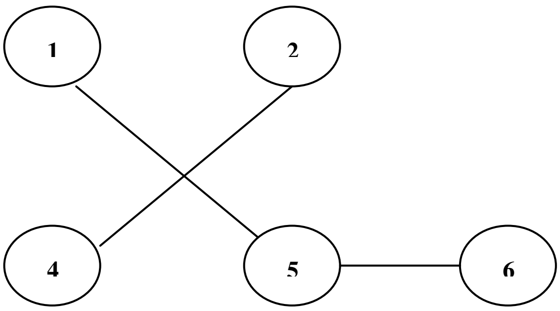


Рис. 2.3 Подграф графа $G(V, E)$

Правильный подграф определяется подмножеством вершин V' и, содержит те и только те ребра, которые соединяют выбранные вершины в графе $G(V, E)$.

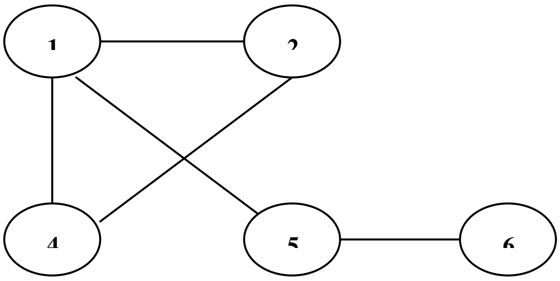


Рис. 2.4 Правильный подграф графа $G(V, E)$

Подграф $G'(V', E')$ назовем *суграфом*, если $V' = V$. Суграф содержит все вершины исходного графа, но (может быть) не все его ребра.

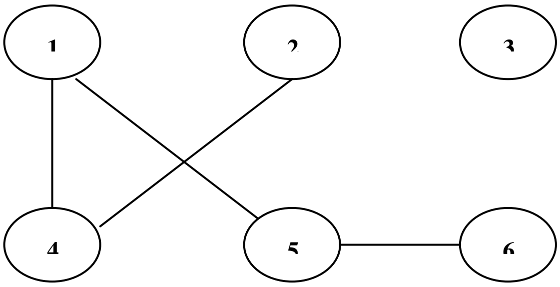


Рис. 2.5 Суграф графа $G(V, E)$

§ 3. Смежность и инцидентность

Пусть вершины x и y графа $G(V, E)$ соединены ребром $(x, y) \in E$, $(x, y) = e$.

Две вершины x и y назовем *смежными*. Вершины x и y назовем *инцидентными* ребру e, а ребро *e инцидентным* вершине x и вершине y. Два ребра, инцидентные одной вершине, назовем *смежными*.

Заметим, что смежность есть отношение между однородными элементами графа, тогда как инцидентность является отношением между разнородными элементами.

Вершину, инцидентную единственному ребру, назовем *висячей*. Вершину, не инцидентную ни одному ребру, назовем *изолированной*.

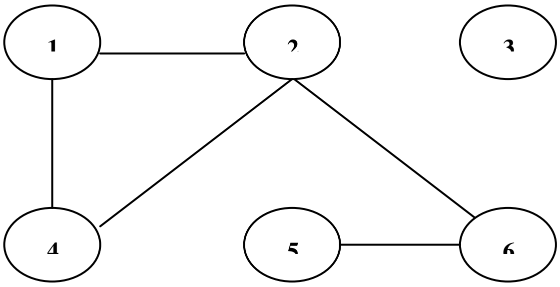


Рис. 3.1 Смежность и инцидентность

На рисунке 3.1:

вершины 1 и 2 смежны; 4 и 5 – не смежны;
ребра (4,2) и (2,6) – инцидентны; (4,2) и (5,6) – не инцидентны;
вершина 5 – висячая; вершина 3 – изолированная.

Множество вершин, смежных с вершиной x, назовем *множеством смежности* или *окрестностью* вершины x и будем обозначать $\Gamma(x)$.

Количество ребер, инцидентных вершине x, назовем *степенью* вершины x. Обозначим степень вершины $d(x)$.

На рисунке 3.1: $d(1)=2$, $d(2)=3$, $d(3)=0$, $d(4)=2$, $d(5)=1$, $d(6)=2$.

Граф, в котором все вершины имеют одинаковую степень k, назовем *регулярным* степени k. Степень регулярности графа G обозначим $r(G)$.

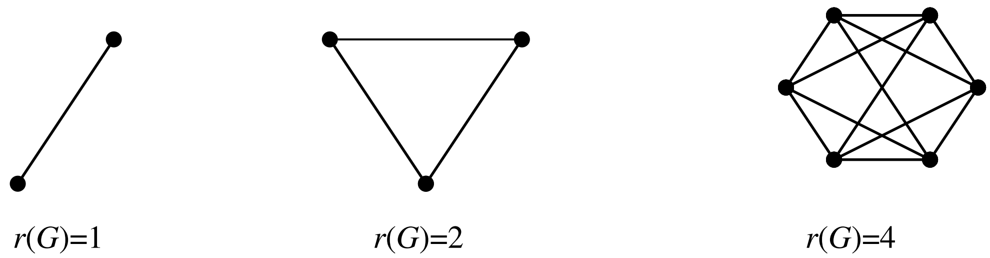


Рис. 3.2 Регулярные графы

Теорема (лемма о рукопожатиях). Сумма степеней вершин графа равна удвоенному количеству ребер.

$$\sum_{x \in V} d(x) = 2q,$$

где V – множество вершин, а $q=|E|$ - количество ребер.

Доказательство. Поскольку каждое ребро графа имеет две инциндентных вершины, то в сумме степеней всех вершин каждое ребро учитывается дважды.

Следствие. В любом графе количество вершин нечетной степени четно.

Рассмотрим теперь ориентированный граф $G(V, E)$.

Так же как и в неориентированном графе, вершины x и y назовем *смежными*, если они соединены ребром, т.е. $(x, y) \in E$. Заметим сразу, что в орграфе понятие смежности не симметрично. На рис. 3.3, вершина 1 смежна с вершиной 2, однако вершина 2 несмежна с вершиной 1.

Будем говорить, что ребро (x, y) инцидентно вершинам x и y.

Количество ребер, исходящих из вершины x, назовем *полустепенью исхода* и обозначим $d^-(x)$. Количество ребер, входящих в вершину x, назовем *полустепенью захода* и обозначим $d^+(x)$. Сумму полустепеней исхода и захода назовем степенью вершины x: $d^-(x) + d^+(x) = d(x)$.

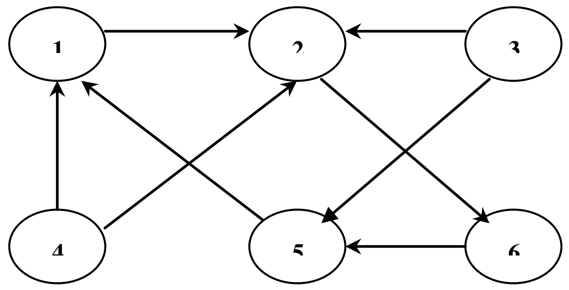


Рис. 3.3 Орграф $G(V, E)$

На рисунке 3.3

$d^-(1)=1,\ d^+(1)=2,\ d(1)=3;$

$d^-(2)=1,\ d^+(2)=3,\ d(2)=4;$

$d^-(3)=2,\ d^+(3)=0,\ d(1)=2;$

$d^-(4)=2,\ d^+(4)=0,\ d(1)=2;$

$d^-(5)=1,\ d^+(5)=2,\ d(1)=3;$

$d^-(6)=1,\ d^+(6)=1,\ d(1)=2.$

Информацию о графах удобно представлять в виде матриц смежности и инцидентности.

Пусть дан граф $G(V, E)$.

Матрица смежности – квадратная матрица, порядка n, где n – количество вершин графа, такая что $M(G)=(m_{ij})$ и

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если } (i,\ j)\in E\\ 0, & \text{если } (i,\ j)\notin E\end{cases}$$

Заметим, что для неориентированного графа матрица смежности всегда будет симметричной. Для орграфа это утверждение, в общем случае, неверно.

Матрица инцидентности – прямоугольная матрица, в которой число строк равно количеству вершин, а число столбцов – количеству ребер, причем $H(G)=(h_{ij})$ и

$$h_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если вершина } i \text{ и ребро } j \text{ инцидентны}\\ 0, & \text{если вершина } i \text{ и ребро } j \text{ неинцидентны}\end{cases}$$

Для орграфа матрица инцидентности имеет свои особенности:

$$h_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если ребро } j \text{ заходит в вершину } i,\\ -1, & \text{если ребро } j \text{ исходит из вершины } i,\\ 0, & \text{если ребро } j \text{ и вершина } i \text{ неинцидентны}\end{cases}$$

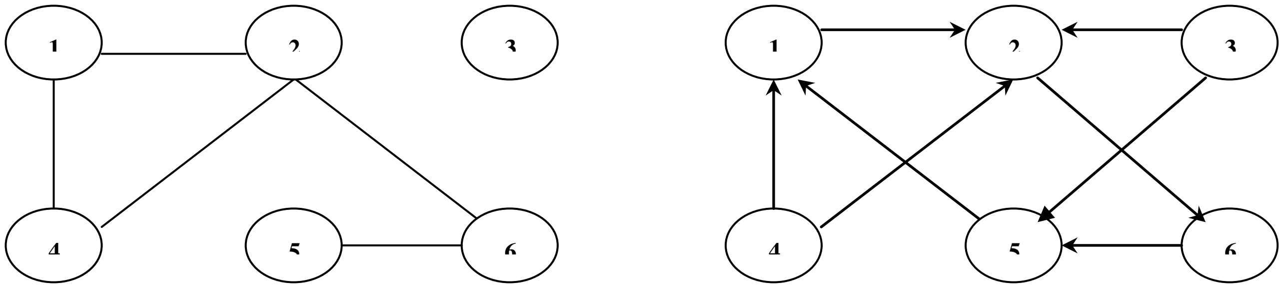


Рис. 3.3 Граф *G*, орграф *D*

Составим матрицы смежности и инцидентности для графов, изображенных на рисунке 3.3.

$$M(G)=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0&0\\1&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&1&0\end{pmatrix},\qquad M(D)=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&1&0\\1&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$H(G)=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc}(1,2)&(1,4)&(2,4)&(2,6)&(5,6)\end{array}\\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{array} & \begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\1&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}\end{array}$$

$$H(D)=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc}(1,2)&(2,6)&(3,2)&(3,5)&(4,1)&(4,2)&(5,1)&(6,5)\end{array}\\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{array} & \begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}\end{array}$$

§ 4. Операции над графами

Дополнение графа

Граф $\overline{G}(\overline{V},\overline{E})$ называется *дополнением* графа $G(V,E)$, если $\overline{V}=V$, а $\overline{E}=\{(x,y)|\ x,y\in V,(x,y)\notin E\}$. Дополнение графа содержит все вершины исходного графа, а вершины в нем смежны тогда и только тогда, когда они не смежны в исходном графе.

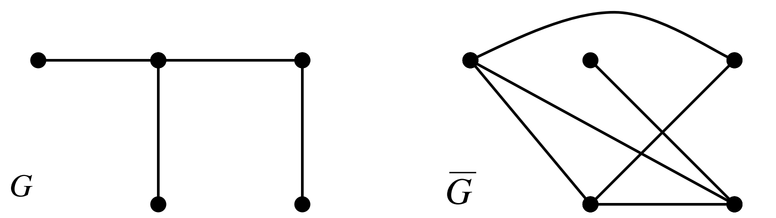


Рис.4.1 Дополнение графа

Объединение (наложение) графов

Граф $H(V,E)$ называется *объединением* графов $G_1(V_1,E_1)$ и $G_2(V_2,E_2)$, $H=G_1\cup G_2$, если $V=V_1\cup V_2$ и $E=E_1\cup E_2$. Если $V_1\cap V_2=\varnothing$, объединение называется дизъюнктным.

Рис.4.2 Дизъюнктное объединение графов

Сложение (соединение) графов

Граф $H(V,E)$ называется *суммой* графов $G_1(V_1,E_1)$ и $G_2(V_2,E_2)$, $H=G_1+G_2$, если $V=V_1\cup V_2$ и $E=E_1\cup E_2\cup\{(x,y)|\ x\in V_1,\ y\in V_2\}$. Сумма двух графов содержит все вершины и все ребра исходных графов, к тому же каждая вершина первого графа смежна с каждой вершиной второго.

Рис.4.3 Сложение графов

Произведение графов

Граф $H(V,E)$ называется *произведением* графов $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$, $H = G_1 \times G_2$, если $V = V_1 \times V_2$, а множество ребер определяется следующим образом: вершины (x_1, x_2) и (y_1, y_2) смежны тогда и только тогда, когда либо $x_1 = y_1$ и $(x_2, y_2) \in E_2$, либо $x_2 = y_2$ и $(x_1, y_1) \in E_1$.

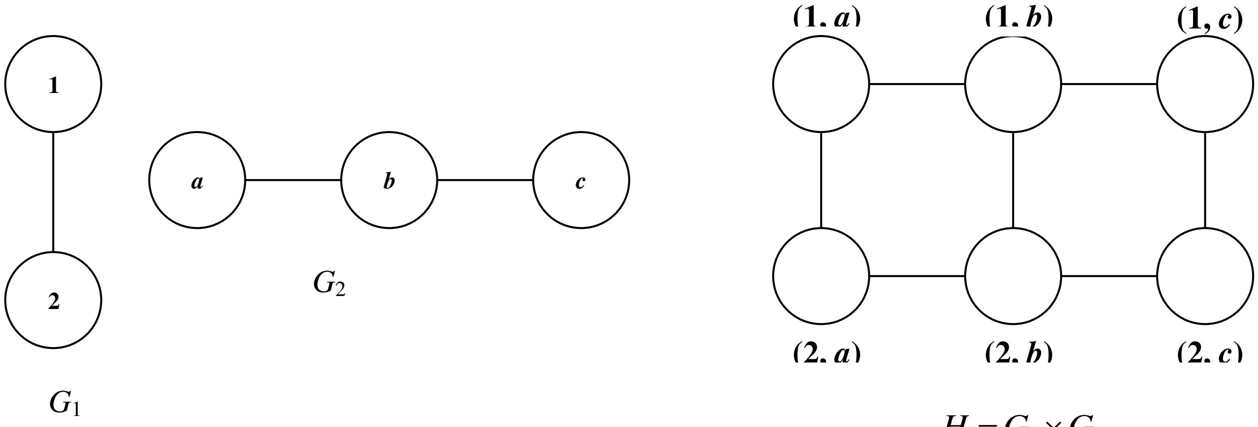


Рис. 4.1 Произведение графов $H = G_1 \times G_2$

Удаление вершины.

При удалении вершины из графа удаляются и все, смежные с ней ребра.

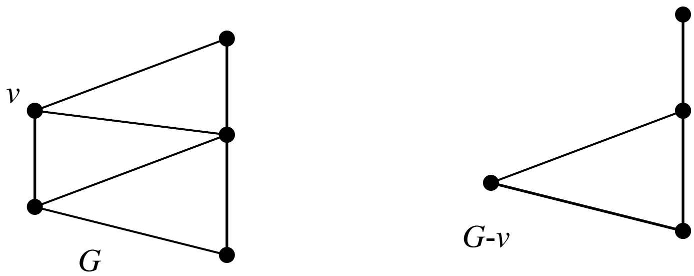


Рис.4.4 Удаление вершины

Добавление вершины

При добавлении вершины к графу множество ребер не изменяется. Добавленная вершина – изолированная.

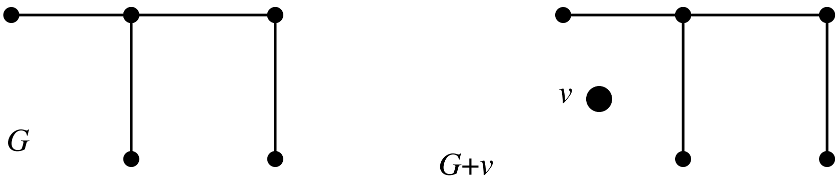


Рис.4.5 Добавление вершины

Удаление ребра

При удалении ребра из графа множество вершин не изменяется.

Рис.4.6 Удаление ребра

Добавление ребра

При добавлении ребра к графу множество вершин не меняется, а новое ребро соединяет две вершины исходного графа.

Рис.4.7 Добавление ребра

Слияние вершин

Пусть x и y вершины графа G. Граф $H = G - x - y$ получен из графа G удалением вершин x и y. К графу H присоединим новую вершину v и соединим с каждой вершиной, смежной с вершиной x и вершиной y. Говорят, что построенный граф получен из графа G слиянием вершин x и y.

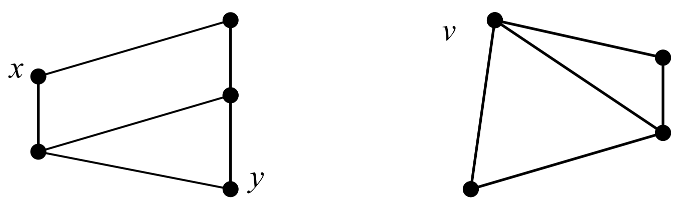


Рис.4.8 Слияние вершин x и y

Стягивание ребра (x, y)

Данная операция означает слияние смежных вершин x и y.

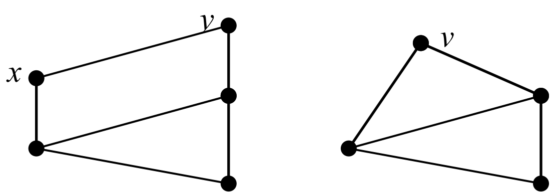


Рис.4.9 Стягивание ребра

Стягивание к подграфу

Данная операция – результат последовательного выполнения стягивания ребер.

§ 5. Изоморфизм графов

Граф порядка n называется помеченным, если его вершинам присвоены некоторые метки, например, номера 1, 2, ..., n.

Легко подсчитать число всех помеченных графов с фиксированным множеством вершин V. Эти графы различаются своими ребрами, и потому их число равно количеству подмножеств во множестве всевозможных пар вершин: $V^{(2)} = \{(x, y) | \, x \in V, \, y \in V, \, x \neq y\}$. Если $|V|=n$, то число подмножеств множества $V^{(2)}$ равно $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Однако эти графы не всегда следует различать. Как в применениях теории графов, так и в самой этой теории чаще существенно лишь то, что есть объекты (вершины графа) и связи между объектами (ребрами). С этих позиций графы, которые получаются один из другого изменением наименований вершин, разумно не различать.

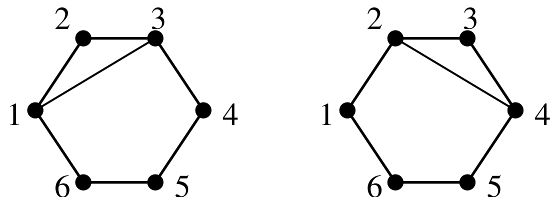


Рис. 5.1. Помеченные графы

Оформим эти соображения в виде следующего определения.

Графы $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ назовем *изоморфными*, если существует биективное отображение $\varphi : V_1 \to V_2$, сохраняющее отношение смежности, т.е.

$$(x, y) \in E_1 \Leftrightarrow (\varphi(x), \varphi(y)) \in E_2 .$$

На рис 5.2 изображено 8 различных помеченных графов, из них графы *б*, *в*, *г* изоморфны между собой, а так же графы *д*, *е*, и *ж* изоморфны.

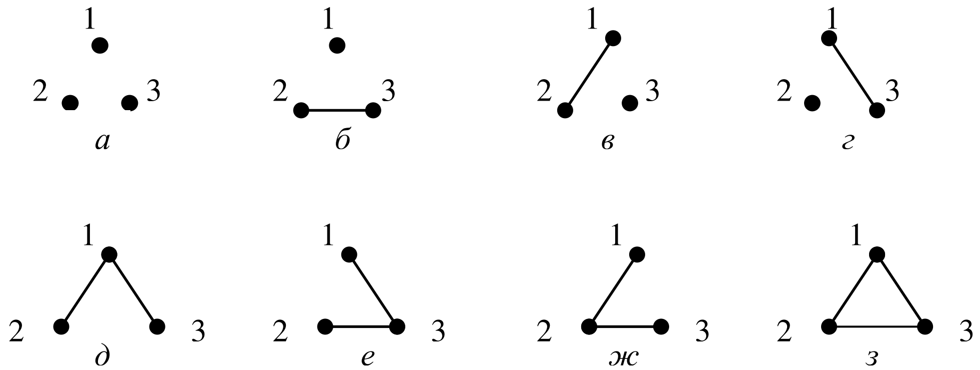
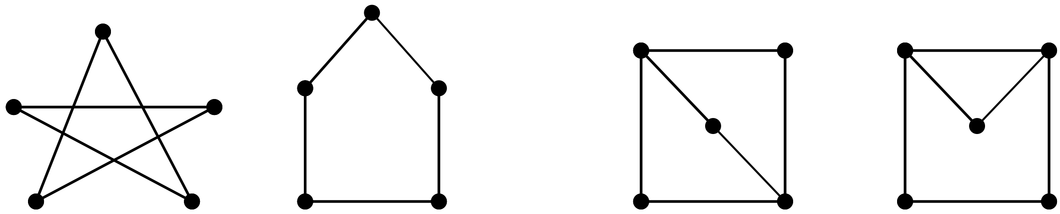


Рис. 5.2. Помеченные графы

Если отбросить нумерацию вершин, то на рис. 5.2 лишь 4 различных, непомеченных графа – *а*, *б*, *д* и *з*.

На рис. 5.3(*а*) графы изоморфны, а на рис 5.3(*б*) – не изоморфны. Почему?



а *б*

Рис. 5.3 Непомеченные графы

Изоморфные графы будем называть *равными, с точность до изоморфизма*.

§ 6. Виды графов

Выше были определены следующие виды графов:
тривиальный – граф, состоящий из одной вершины;
пустой – граф, не содержащий ребер;
полный – граф, в котором любые две вершины соединены ребром,
регулярный – граф, в котором все вершины имеют одинаковую степень.
Рассмотрим еще несколько типичных видов графов.

Двудольные графы

Граф $G(V, E)$ называется *двудольным*, если множество его вершин может быть разбито на два непересекающихся множества $V_1, V_2, V_1 \cup V_2 = V, V_1 \cap V_2 = \varnothing$, причем любое ребро графа инцидентно и вершине из V_1 и вершине из V_2. Множества V_1 и V_2 называются долями двудольного графа.

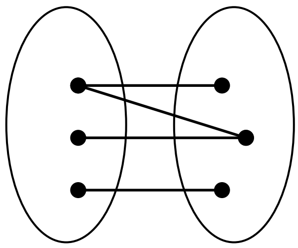
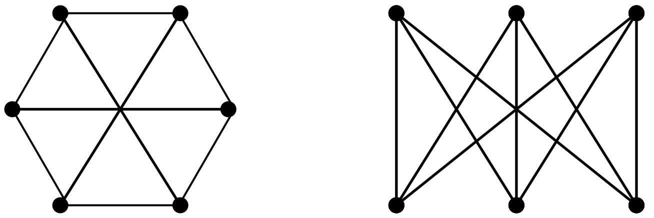


Рис. 6.1 Двудольный граф

Если каждая вершина из V_1 смежна с каждой вершиной из V_2, граф называют *полным двудольным* и обозначают, $K_{n,m}$ $n = |V_1|, m = |V_2|$.

Граф, представленный на рис. 6.2(*а*) является полным двудольным графом, т.к. его можно представить в виде 6.2.(*б*).



а *б*

Рис. 6.2 Полный двудольный граф

Двудольный граф, одна из долей которого содержит единственную вершину, называют *звездой* и обозначают, $K_{1,m}$, $m = |V_2|$.

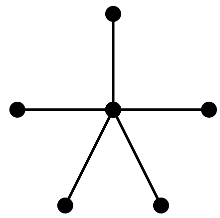
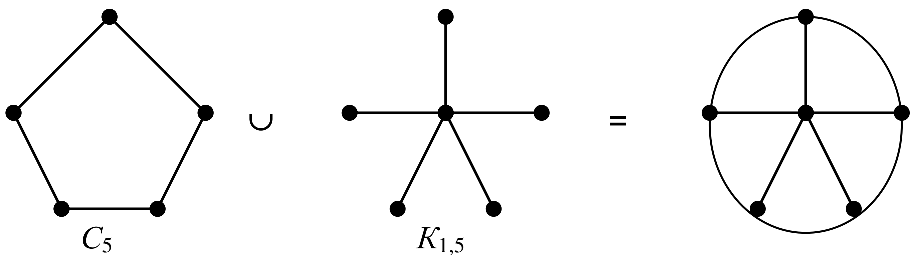


Рис. 6.3 Двудольный граф $K_{1,5}$ (звезда)

Регулярный граф, в котором каждая вершина имеет степень 2, называется *циклом*. Цикл порядка *n* обозначается C_n .

Объединение цикла C_n и звезды $K_{1,n}$ называют *колесом* и обозначают W_n .



C_5 $\cup$ $K_{1,5}$ =

Рис. 6.4 Граф W_5 (колесо)

Определим еще один интересный граф – граф Петерсена, см. рис 6.5.

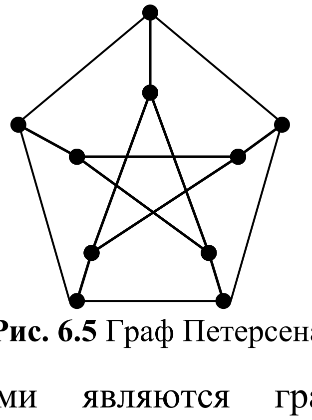


Рис. 6.5 Граф Петерсена

Красивыми примерами являются графы пяти платоновых тел (правильных многогранников): тетраэдра, куба, октаэдра, додекаэдра, икосаэдра (рис. 6.6).

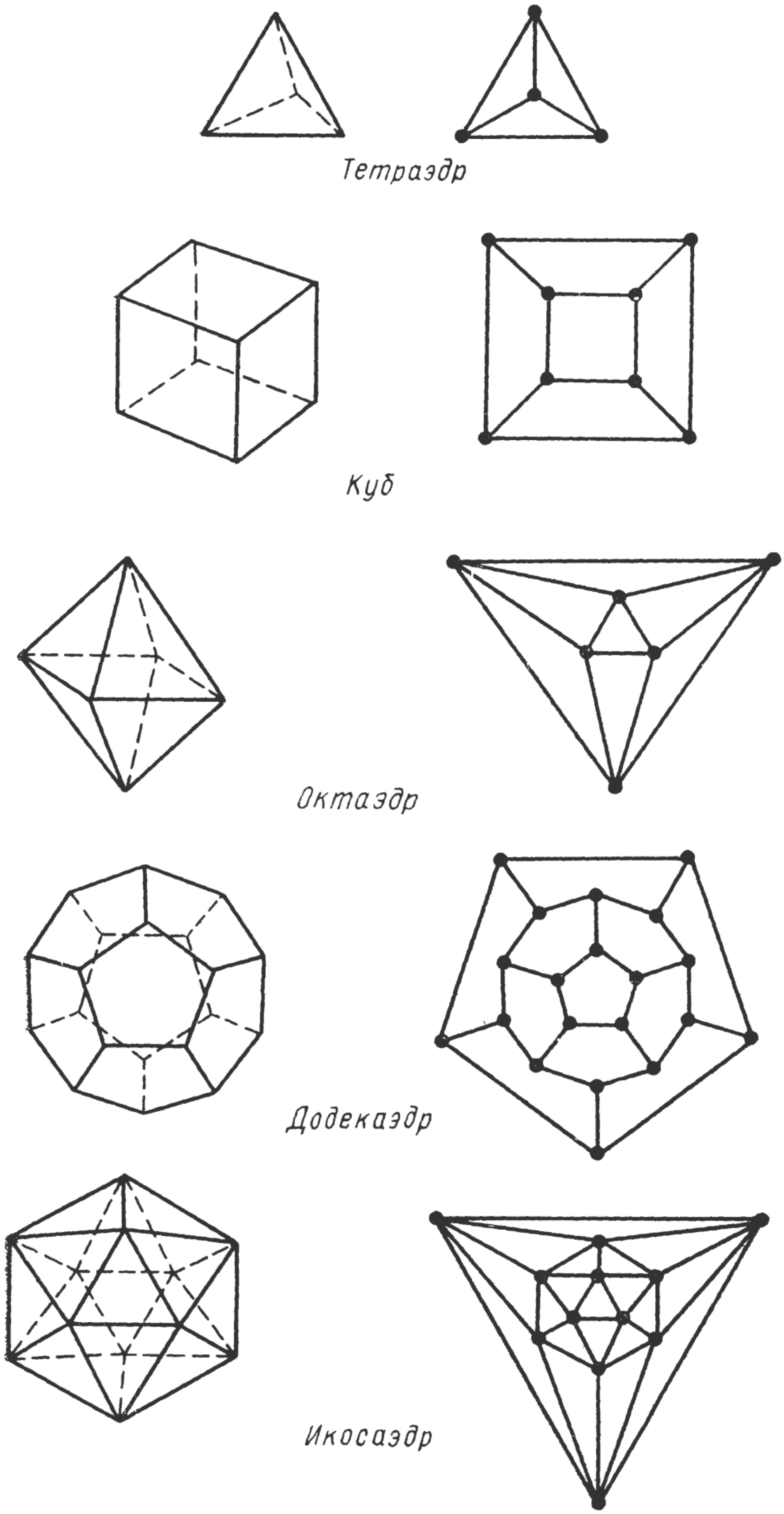


Рис.6.6 Правильные многогранники

II. МАРШРУТЫ, ЦЕПИ, ЦИКЛЫ

§ 1. Определение маршрута

Маршрутом в графе назовем чередующуюся последовательность вершин и ребер $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_n, v_n$, начинающуюся и заканчивающуюся вершиной, в которой любые два соседних элемента инцидентны. Количество ребер в маршруте назовем его *длиной*.

Маршрут, все ребра которого различны, назовем *цепью*.

Цепь, все вершины которой различны, назовем *простой*.

Маршрут, в котором начальная и конечная вершины совпадают, назовем *замкнутым*.

Замкнутую цепь назовем *циклом*.

Простую замкнутую цепь назовем *простым циклом*.

В орграфе маршрутом так же назовем последовательность вершин и ребер $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots v_{i-1}, e_i, v_i, \ldots, e_n, v_n$, начинающуюся и заканчивающуюся вершиной, в которой для любого ребра e_i предшествующая вершина $v_{i\text{-}1}$ является началом, а последующая вершина v_i – концом.

Цепь в орграфе назовем *путем*, цикл – *контуром*.

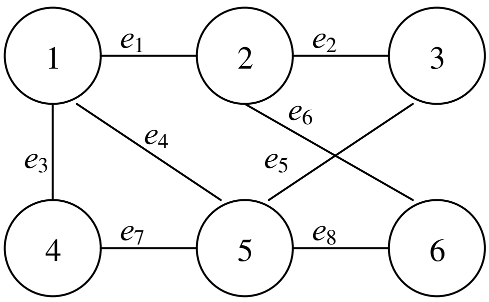


Рис.1.1 Маршруты в графе

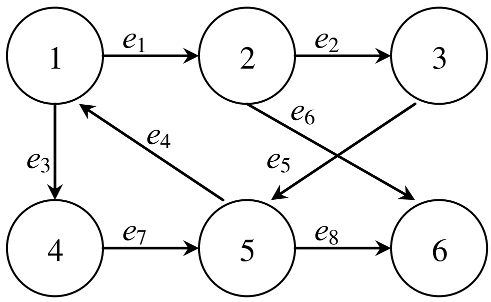


Рис.1.2 Маршруты в орграфе

На рис.1.1

$1e_12e_23e_55e_41e_12e_66$ – маршрут, но не цепь;

$1e_12e_23e_55e_41e_34e_75e_86$ – цепь, но не простая;

$1e_12e_23e_55e_86$ – простая незамкнутая цепь;

На рис.1.2

$1e_12e_23e_55e_41e_12e_66$ – маршрут, но не цепь;

$1e_12e_23e_55e_41e_34e_75e_86$ – цепь, но не простая;

$1e_12e_23e_55e_86$ – простая незамкнутая цепь;

$1e_12e_66e_85$ – последовательность, не являющаяся маршрутом.

Цепь, соединяющей вершины u и v, будем обозначать $\langle u, v\rangle$.

Легко заметить, что если две вершины соединены цепью, то существует соединяющая их *простая* цепь.

Вершины графа называются связными, если они соединены цепью (простой цепью). Граф назовем *связным*, если любые две его вершины связны.

§ 2. Метрические характеристики графов

Расстоянием между вершинами u и v назовем длину кратчайшей цепи, соединяющей эти вершины. Расстояние между вершинами обозначим $d(u, v)$.

Если $\left|\langle u, v\rangle\right|$ – длина цепи $\langle u, v\rangle$, то $d(u, v) = \min\limits_{\{\langle u, v\rangle\}} \left|\langle u, v\rangle\right|$.

Кратчайшую цепь, соединяющую две вершины, иногда называют *геодезической*.

Эксцентриситетом $e(v)$ вершины v в связном графе $G(V, E)$ назовем максимальное расстояние от вершины v до остальных вершин графа G:

$$e(v) = \max_{x \in V} d(v, x).$$

Радиусом $R(G)$ назовем наименьший из эксцентриситетов графа, а *диаметром* $D(G)$ – наибольший.

Вершину назовем *центральной*, если ее эксцентриситет равен радиусу. Множество центральных вершин назовем *центром графа*. Вершины, не принадлежащие центру, назовем *периферийными*.

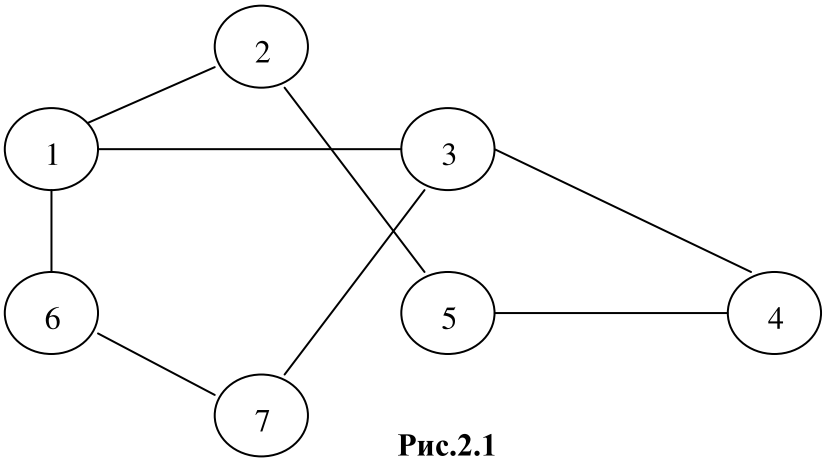


Рис.2.1

Найдем эксцентриситеты вершин, радиус и диаметр графа, изображенного на рисунке 2.1. Кратчайшие расстояния между вершинами занесем в таблицу

№ вершины	1	2	3	4	5	6	7	e (v)
1	0	1	1	2	2	1	2	*2*
2	1	0	2	2	1	2	3	*3*
3	1	2	0	1	2	2	1	*2*
4	2	2	1	0	1	3	2	*2*
5	2	1	2	1	0	3	3	*3*
6	1	2	2	3	3	0	1	*3*
7	2	3	1	2	3	1	0	*3*

Радиус графа $R(G)=2$; диаметр графа $D(G)=3$; центр графа $\{1,3,4\}$

§ 3. Маршруты заданной длины

Существует большое разнообразие задач, связанных с путями и маршрутами в графе, начиная от стандартных задач на существование, пересчет и перечисление и кончая задачами поиска путей, отвечающих определенным требованиям. Такими требованиями могут быть: требования максимальности (минимальности) длины, пропускной способности или надежности пути; требования к множеству вершин (ребер), принадлежащих (не принадлежащих) пути, и т. п.

При этом сами графы могут иметь различные свойства, например, быть или не быть ориентированными, циклическими, взвешенными и т. д. Наконец, один и тот же граф может быть описан по-разному. Поэтому даже одна и та же задача для различных по своим характеристикам и способу описания графов может решаться по-разному.

Рассмотрим задачи о нахождении всех маршрутов заданной длины (содержащие заданное количество ребер).

Пусть $\Gamma^-(v_i)$ — множество вершин, являющихся концами дуг, выходящих из v_i, а $\Gamma^+(v_j)$ — множество вершин, являющихся началами дуг, входящих в v_j. Тогда пересечение $\Gamma^-(v_i) \cap \Gamma^+(v_j)$ представляет собой

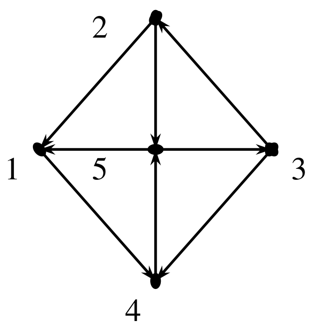


Рис. 3.1

множество промежуточных вершин, принадлежащих цепям длиной в *две дуги* между вершинами v_i и v_j, а $|\Gamma^-(v_i) \cap \Gamma^+(v_j)|$ — число таких цепей.

Например, на рис. 3.1,

$$\Gamma^-(3) = \{2, 4\},\ \ \Gamma^+(1) = \{2, 5\},\ \ \Gamma^-(3) \cap \Gamma^+(1) = \{2\},\ \ \left|\Gamma^-(3) \cap \Gamma^+(1)\right| = 1$$

Поскольку единичные элементы i-ой строки матрицы смежности соответствуют элементам множества $\Gamma^-(v_i)$, а единичные элементы j-го столбца этой матрицы — элементам множества $\Gamma^+(v_j)$, то $|\Gamma^-(v_i) \cap \Gamma^+(v_j)| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot a_{kj}$.

Заметим, что если $A = (a_{ij})$ – матрица смежности графа, то $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot a_{kj}$ есть элемент матрицы A^2, стоящий в i-ой строке и j-ом столбце.

Таким образом, задача определения числа цепей (маршрутов) длины 2 между всеми парами вершин графа может быть решена простым возведением в квадрат его матрицы смежности. Аналогично, количество маршрутов длины 3 может быть получено из матрицы A^3 и вообще количество маршрутов длины l между вершинами v_i и v_j равно элементу a_{ij} матрицы A^l. Наконец, количество маршрутов длины не более p между всеми парами вершин определяется с помощью матрицы, представляющей собой сумму

$$A + A^2 + \ldots + A^p.$$

Рассмотрим граф, изображенный на рис. 3.1. Его матрица смежности имеет вид

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Тогда, количество маршрутов длины 2 можно определить с помощью матрицы

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Откуда видно, например, что между 1-ой и 5-ой вершинами одна цепь длины 2, между 3-ей и 5-ой – две цепи, а между 4-ой и 2-ей нет цепи длины 2.

Количество же всех маршрутов длины 2 в этом графе равно 12 (сумме всех элементов матрицы A^2.

Замечание. Аналогичным образом можно определить количество всех маршрутов и в неориентированном графе.

Пусть теперь наряду с количеством маршрутов заданной длины нас интересуют и сами указанные маршруты. Для их нахождения поступим следующим образом, модернизируем матрицу смежности, вместо единиц выписывая «имя» ребра, соединяющего соответствующие вершины.

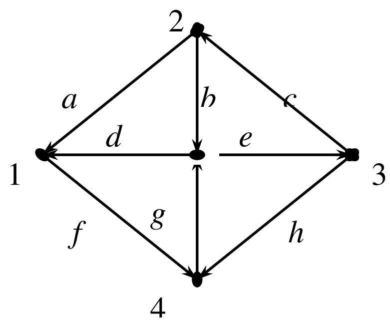


Рис. 3.1

Если в графе, изображенном на рис. 3.1, обозначить ребра (см. рис. 3.2), то модернизированная матрица будет иметь вид

$$A_m = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & f & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g \\ d & 0 & e & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Тогда все маршруты длины l можно получить с помощью матрицы A_m^l.

Например, все маршруты длины два для графа (рис.3.2) указаны в матрице

$$A_m^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & fg \\ bd & 0 & be & af & 0 \\ ca & 0 & 0 & 0 & cb+hg \\ gd & 0 & ge & 0 & 0 \\ 0 & ec & 0 & df+eh & 0 \end{pmatrix}$$

(маршруты указаны перечислением ребер).

К сожалению, определяется число *маршрутов*, связывающих пару вершин, а не число *путей*, которые представляют наибольший интерес. Количество путей можно определить, если найти все маршруты и отбросить те из них, где есть повторяющиеся ребра.

Кроме того, заметим, что

1) отличные от нуля диагональные элементы матрицы A^l (A_m^l) указывают на присутствие в графе соответствующего количества циклов длины l;

2) поскольку длина *пути* в графе не может превышать n—1 (n – количество вершин в графе), не имеет смысла возводить матрицу A в более высокую степень.

§ 4. Кратчайшие маршруты

Рассмотрим задачу нахождения кратчайшего пути в графе между двумя заданными вершинами. Понятно, что любой участок кратчайшего пути сам является кратчайшим путем между парой его концевых вершин. Значит, если найден кратчайший путь из вершины s в вершину t, который проходит через вершины, образующие множество V', то фактически решена задача отыскания кратчайших путей из вершины s во все вершины множества V'. Поэтому представляется естественным следующее обобщение сформулированной выше задачи.

Найти кратчайшие пути между заданной начальной вершиной s и всеми остальными вершинами графа.

Пусть граф задан своей матрицей смежности. Под кратчайшим путем между выбранными вершинами будем понимать цепь, содержащую наименьшее количество ребер.

Эффективное решение задачи получается с помощью простой процедуры, в результате которой каждая обработанная вершина получает метку, равную расстоянию от выбранной вершины s. Процесс начинается с того, что все вершины, смежные с s, $v \in \Gamma(s)$, получают метку, равную единице. На второй итерации все вершины, достижимые из s с помощью маршрута, содержащего два ребра, $v \in \Gamma^2(s)$, помечаются двойкой, затем все $v \in \Gamma^3(s)$ помечаются тройкой, и вообще на i итерации для всех $v \in \Gamma^i(s)$ имеем $l(v)=i$. Процесс завершается, когда помеченной оказывается вершина t либо, когда новые вершину перестают получать метки (это возможно, если граф несвязный и не существует пути между выбранными вершинами)

Описанная процедура расстановки меток называется *поиском в ширину.*

Рассмотрим реализацию такого вида поиска на примере.

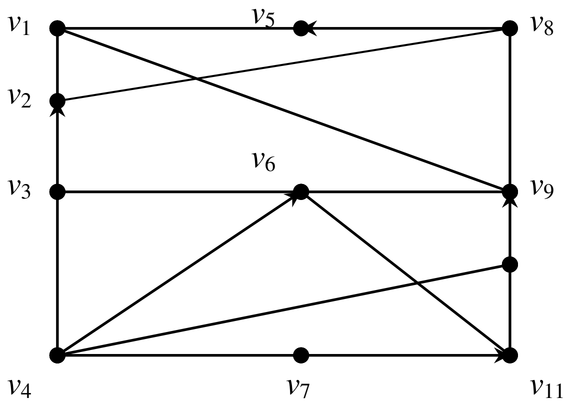


Рис.4.1

Найдем кратчайший путь между вершинами v_5 и v_7 в графе, представленном на рис. 4.1.

Составим матрицу смежности, дополнив ее строкой $l(v_i)$ для меток.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}
v_1		1			1				1		
v_2	1							1			
v_3		1		1		1					
v_4			1			1	1			1	
v_5	1										
v_6			1						1		1
v_7				1							1
v_8		1			1				1		
v_9	1					1		1			
v_{10}				1					1		1
v_{11}						1				1	
$l(v)$	1	2	4	5	0	3	6	3	2	5	4

Вершину v_5 пометим нулевым значением. На первой итерации просматриваем 5-ю строку, в ней одна единица в 1-ом столбце, вершина v_1 получает метку $l(v_1)=1$.

На i-ой итерации рассматриваем строчку, получившую метку на предыдущей, (i-1)-ой, итерации и присваиваем непомеченным смежным вершинам метку i.

На 2-ой итерации метки получают вершины v_2 и v_9: $l(v_2)=l(v_9)=2$. Вершина v_5 тоже смежна с v_1, но уже имеет метку.

На 3-ей итерации метки получают вершины, смежные с вершинами v_2 и v_9: $l(v_8)=3$, $l(v_6)=3$.

На 4-ой итерации отметим вершины, смежные с v_6 и v_8: $l(v_3)=l(v_{11})=4$.

На 5-ой итерации – вершины, смежные с v_3 и v_{11}: $l(v_4)=l(v_{10})=5$.

На 6-ой итерации – вершины, смежные с v_4 и v_{10}: $l(v_7)=6$.

Вершина v_7 помечена, алгоритм прекращает свою работу.

Кратчайший путь из v_5 в v_7 состоит из 6 ребер.

Остается найти сам путь, т. е. множество составляющпх его дуг (ребер), или что тоже самое, последовательность проходимых вершин.

Поиск начинаем с v_7. Будем переходить от вершины к вершине, так чтобы метка каждый раз уменьшалась на единицу, пока не достигнем вершины v_5 причем обработку выполняем по столбцам матрицы.

В седьмом столбце имеется только одна единица в четвертой строке. Значит, предпоследней вершиной пути является v_4 с пометкой 5.

В четвертом столбце единицы находятся в третьей, седьмой и десятой строках. Соответствующие вершины имеют метки $l(v_3)=4$, $l(v_7)=6$, $l(v_{10})=5$. Из них подходящей является только v_3, ее метка на единицу меньше предыдущей. Это и есть третья от конца вершина пути.

Содержимое третьего столбца указывает на вершины v_4 и v_6. По значению метки ($l(v_4)=5$, $l(v_6)=3$) подходит только v_6.

Действуя аналогичным образом, находим еще две промежуточные вершины пути v_9 и v_1.

Окончательно получаем, что кратчайший путь из v_5 в v_7 проходит через вершины $v_5 \to v_1 \to v_9 \to v_6 \to v_3 \to v_4 \to v_7$.

Описанный метод может применяться для нахождения кратчайших путей и в не ориентированном графе.

§ 5. Алгоритм Дейкстры

Пусть теперь каждому ребру графа приписано некоторое числовое значение. Такой граф назовем *взвешенным*, он задается весовой матрицей, в которой на пересечении i-ой строки и j-го столбца указан вес ребра или стоит прочерк, если ребра между соответствующими вершинами не существует. Под кратчайшим путем между выбранными вершинами будем понимать цепь, у которой сумма весов составляющих ее дуг (ребер) минимальна.

Если вес каждого ребра в графе неотрицательный, то для нахождения кратчайшего пути между вершинами можно воспользоваться алгоритмом Дейкстры.

Этот алгоритм называют алгоритмом меток. На первом этапе вершинам графа присваиваются метки: начальная вершина получает метку ноль, все остальные – бесконечность. Метки различают двух типов: постоянные и временные. Суть метки – оценка (сверху) расстояния от начальной вершины. Временная метка может быть уменьшена, постоянная метка есть искомое кратчайшее расстояние. На каждом шаге точно одна временная метка (наименьшая) получает статус постоянной.

Вычисление метки производится по следующему правилу:

$$l(v_i) = \min\{l^*(v_i); l(v^*) + d(v^*, v_i)\},$$

где $l(v)$ – метка вершины; $l^*(v)$ – предыдущая метка вершины; v^* – вершина, получившая на предыдущем этапе постоянную метку; $d(v^*, v_i)$ – длина дуги (v^*, v_i), если вершины v^* и v_i не смежны, то $d(v^*, v_i)$ считается бесконечно большой величиной.

Действительно, если до вершины v^* кратчайший путь найден – $l^*(v)$, то путь до смежных с ней вершин будет равен $l(v^*) + d(v^*, v_i)$. Если известна более точная оценка, то найденной оценкой пренебрегаем и оставляем предыдущую (меньшую). Кроме того, так постоянная метка в ходе работы *не возрастает*, наименьшее ее значение гарантирует значение кратчайшего пути до соответствующей вершины.

Рассмотрим работу алгоритма на примере.

Найдем кратчайшие пути от вершины v_1 до остальных вершин графа, изображенного на рис. 4.2.

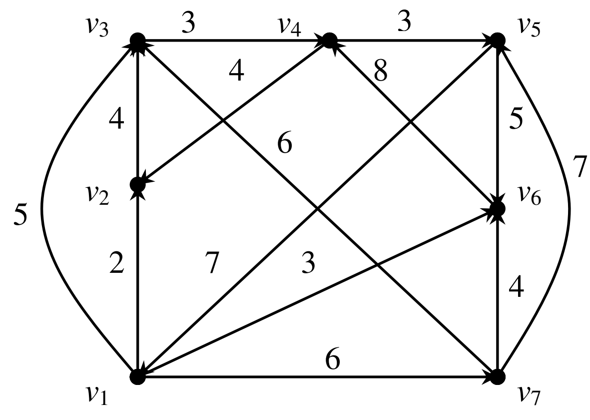


Рис.4.2

Работу алгоритма отобразим в таблице.

<u>На 1-ом шаге</u> вершина v_1 получает метку 0, а остальные вершины – метку ∞. Наименьшая метка $l(v_1)$=0, поэтому вершина v_1 получает постоянную метку $v^*=v_1$ (постоянные метки в таблице будем выделять серым цветом).

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v^*	$l(v^*)$
1	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	v_1	0
2		2	5	∞	∞	3	6	v_2	2
3			5	∞	∞	3	6	v_6	3
4			5	11	∞		6	v_3	5
5				8	∞		6	v_7	6
6				8	13			v_4	8
7					11			v_5	11

На 2-ом шаге скорректируем метки вершин, достижимых из вершины $v^*=v_1$, а именно, вершин v_2, v_3, v_6 и v_7.

$l(v_2)=\min\{\infty, 0+2\}=2$; $l(v_3)=\min\{\infty, 0+5\}=5$;

$l(v_6)=\min\{\infty, 0+3\}=3$; $l(v_7)=\min\{\infty, 0+6\}=6$.

Остальные метки не изменяются, так как $l(v_4)=\min\{\infty, 0+\infty\}=\infty=l(v_5)$.

Наименьшая метка $l(v_2)=2$, поэтому вершина v_2 получает постоянную метку $v^*=v_2$.

На 3-ем шаге скорректируем метки вершин, достижимых из вершины $v^*=v_2$, а именно, вершины v_3.

$l(v_3)=\min\{5, 2+4\}=5$ метка остается прежней.

Остальные метки так же не изменяются:

$l(v_4)=\min\{\infty, 0+\infty\}=\infty=l(v_5)$, $l(v_6)=\min\{3, 0+\infty\}=3$, $l(v_7)=\min\{6, 0+\infty\}=6$.

Наименьшая метка $l(v_6)=3$, поэтому вершина v_6 получает постоянную метку $v^*=v_6$.

На 4-ом шаге рассчитаем метки вершин, достижимых из вершины $v^*=v_6$, а именно, вершины v_4.

$l(v_4)=\min\{\infty, 3+8\}=11$.

Остальные метки не изменяются.

Наименьшая метка $l(v_3)=5$, поэтому вершина v_3 получает постоянную метку $v^*=v_3$.

На 5-ом шаге рассчитаем метки вершин, достижимых из вершины $v^*=v_3$, а именно, вершин v_4 и v_7.

$l(v_4)=\min\{11, 5+3\}=8$, $l(v_7)=\min\{6, 5+6\}=6$.

Остальные метки не изменяются.

Наименьшая метка $l(v_7)=6$, поэтому вершина v_7 получает постоянную метку $v^*=v_7$.

На 6-ом шаге необходимо рассчитать метки вершин, достижимых из вершины $v^*=v_7$, а именно, вершин v_3, v_6 и v_5, но вершины v_3, v_6 уже имеют постоянные метки, поэтому они не изменятся.

$l(v_5)=\min\{\infty, 6+7\}=13$.

Постоянной же меткой станет наименьшая метка $l(v_4)=8$, $v^*=v_4$.

На 7-ом шаге все вершины, кроме v_5 имеют постоянные метки, а следовательно не изменяются. Вершина v_5 достижима из $v^*=v_4$, поэтому пересчитаем ее метку

$l(v_5)=\min\{13, 8+3\}=11$.

Эта метка и становится постоянной.

Постоянной же меткой станет наименьшая метка $l(v_4)$=8, $v^*=v_4$.

Каждая вершина получила постоянную метку, кратчайшие расстояния от вершины v_1 до остальных вершин графа определены.

Нахождение кратчайшего пути начинается с конечной вершины v_n. Предшествующая ей вершина v_n выбирается таким образом, что

$$l(v_{n-1}) = l(v_n) - d(v_{n-1}, v_n).$$

Найдем кратчайший путь между вершинами v_1 и v_5.

Вершина v_5 достижима из вершин v_4 и v_7, при этом, $l(v_5)$=11, $l(v_4)$=8, $l(v_7)$=6, а длины дуг $d(v_4, v_5)$=3, $d(v_7, v_5)$=7. Так как $l(v_4) = l(v_5) - d(v_4, v_5)$, предыдущая вершина – v_4. Аналогично находим все остальные вершины пути (рис.4.3): $v_1 \to v_3 \to v_4 \to v_5$.

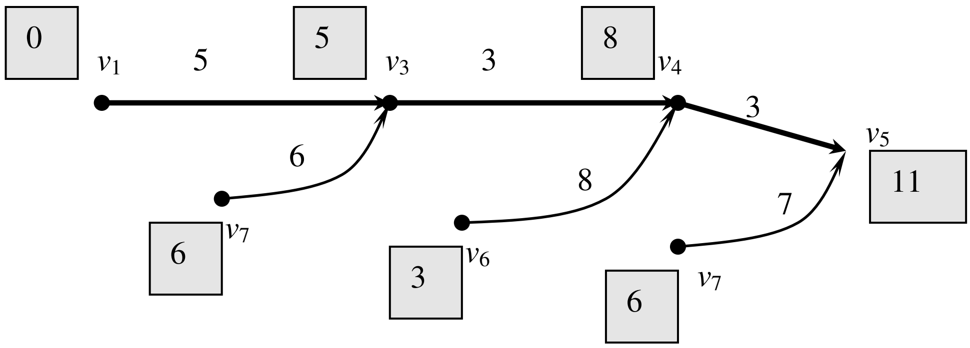


Рис.4.3

С помощью алгоритма Дейкстры можно находить кратчайшие пути и в неориентированном графе, если только граф не содержит ребер с отрицательным весом.

III. СВЯЗНОСТЬ

§ 1. Связные графы, компоненты связности

Нетрудно показать, что отношение связности является отношением *эквивалентности* (рефлексивно, симметрично, транзитивно).

Классы эквивалентности по отношению связности назовем *компонентами связности.* Число компонент связности графа G обозначим $k(G)$. Граф G является связным тогда и только тогда, когда $k(G)=1$. Если $k(G)>1$, то граф G – *несвязный*. Граф, состоящий только из изолированных вершин, назовем *вполне несвязным*.

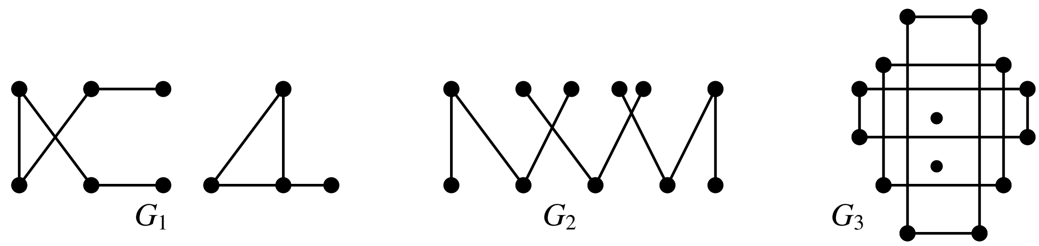


Рис. 1.1 Несвязные графы

На рис.1.1 приведены примеры несвязных графов, причем в графе G_1 – две компоненты связности, графе G_2 – три компоненты связности, а графе G_3 – пять компонент связности.

Для определения связности графа можно воспользоваться следующим простым алгоритмом.

1. Вершины графа считаем непомеченными. Число компонент связности считаем равным 1, k:=1. В список внесем все вершины графа.
2. Выберем вершину из списка, пометим ее и из списка удалим.
3. Если вершина из списка смежна с какой-либо помеченной вершиной, присвоим ей метку и из списка удалим.
4. Если список пуст, то граф имеет k компонент связности и алгоритм закончил работу. Иначе, k:= k+1 и перейти к шагу 2.

Поскольку количество вершин графа конечно, то алгоритм закончит работу за конечное число шагов.

Пусть граф $G(V, E)$ содержит p вершин, q ребер и k компонент связности. Оказывается, данные величины не являются независимыми. Справедлива следующая теорема.

Теорема. В неориентированном графе $G(V, E), |V|=p, |E|=q, k(G)=k$ без петель и кратных ребер выполняется неравенство

$$p-k \le q \le \frac{(p-k)(p-k+1)}{2}.$$

Доказательство теоремы можно найти в [1].

§ 2. Связность в орграфах

В ориентированном графе понятие связности вершин (узлов) несимметрично, поэтому определение связности будет немного отличаться.

Вершины v_1 и v_2 *сильно связаны* в орграфе G, если существует путь (ориентированная цепь) как из v_1 в v_2 так и из v_2 в v_1. Вершины v_1 и v_2 *односторонне связаны* в орграфе, если существует путь (ориентированная цепь) либо из v_1 в v_2, либо и из v_2 в v_1. Вершины v_1 и v_2 *слабо связаны* в орграфе, если они связны в графе G', полученном из орграфа G отбрасыванием направления дуг.

Орграф G назовем *сильно связным* (односторонне связным, слабо связным), если любые две его вершины сильно связны (односторонне связны, слабо связны).

Компонентой сильной связности орграфа назовем его максимальный сильно связный подграф.

Отыскание сильных компонент

Будем говорить, что вершина v_1 *достижима* из вершины v_2, если существует путь из v_1 в v_2. Считаем, что вершина v_1 *достижима* из вершины v_1.

Пусть $R(v)$ — множество вершин орграфа, достижимых из вершины v.

Пусть $\Gamma^n(v)$ является множеством вершин, достижимых из v с использованием путей длины n, $n = 1, 2, \ldots$

Тогда $R(v)$ можно представить в виде

$$R(v) = \{v\} \cup \Gamma^1(v) \cup \Gamma^2(v) \ldots \Gamma^p(v).$$

Операции объединения выполняются последовательно слева направо до тех пор, пока множество $R(v)$ не перестанет увеличиваться. Количество операций зависит от графа, но, очевидно, что p не превосходит количества вершин графа.

Пусть $Q(v)$ — множество вершин орграфа, из которых достигается вершина v.

Пусть $\Gamma^{-n}(v)$ — множество вершин орграфа, из которых v достигается с использованием путей длины n, $n = 1, 2, \ldots$

Тогда $Q(v)$ можно представить в виде

$$Q(v) = \{v\} \cup \Gamma^{-1}(v) \cup \Gamma^{-2}(v) \ldots \Gamma^{-p}(v)$$

Здесь операции объединения выполняются, как и в предыдущем случае, последовательно слева направо до тех пор, пока множество $Q(v)$ не перестанет увеличиваться, а число этих операций p не превосходит количества вершин графа.

Если $R(v)$ — это множество вершин, достижимых из v, а $Q(w)$ — множество вершин, из которых достижима w, то $R(v) \cap Q(w)$ является множеством вершин, принадлежащих всем путям, идущим из v в w. В том случае, когда $v=w$ пересечение $R(v)\cap Q(v)$ определяет множество (включая v) взаимно достижимых веріин и, следовательно, некоторую сильную компоненту графа.

С учетом изложенного, можно предложить следующую процедуру отыскания всех сильных компонент графа $G(V, E)$:

1. Формируем описание графа в виде $\Gamma^{n}(v_i)$ и $\Gamma^{-n}(v_i)$ для всех вершин $v_i \in V$.

2. Выбираем некоторую вершину v и находим $R(v)$ и $Q(v)$.

3. Получаем $VS = R(v)\cap Q(v)$. Вершинно-порожденный на множестве вершин VS подграф графа G представляет сильную компоненту.

4. Если множество $V\setminus VS$ пусто, то все сильные компоненты найдены, в противном случае строим вершинно-порожденный подграф на $V\setminus VS$ и переходим к п.1.

Разберем использование описанного подхода на примере.

Найдем сильные компоненты графа $G(V, E)$, изображенного на рис. 2.1.

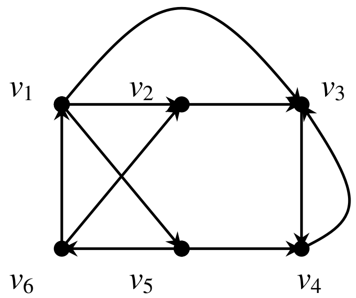


Рис.2.1

Найдем множества $\Gamma^{n}(v_i)$ и $\Gamma^{-n}(v_i)$ для всех вершин $v_i \in V$.

$\Gamma^1(v_1)=\{v_2, v_3, v_5\}$, $\Gamma^2(v_1)=\{v_3, v_4, v_6\}$, $R(v_1)=V$
$\Gamma^1(v_2)=\{v_3\}$, $\Gamma^2(v_2)=\{v_4\}$, $\Gamma^3(v_2)=\{v_3\}$, $R(v_2)=\{v_2, v_3, v_4\}$,
$\Gamma^1(v_3)=\{v_4\}$, $\Gamma^2(v_3)=\{v_3\}$, $\Gamma^3(v_3)=\{v_4\}$, $R(v_3)=\{v_3, v_4\}$,
$\Gamma^1(v_4)=\{v_3\}$, $\Gamma^2(v_4)=\{v_4\}$, $\Gamma^3(v_4)=\{v_3\}$, $R(v_4)=\{v_3, v_4\}$,
$\Gamma^1(v_5)=\{v_4, v_6\}$, $\Gamma^2(v_5)=\{v_1, v_2, v_3\}$, $R(v_5)=V$
$\Gamma^1(v_6)=\{v_1, v_2\}$, $\Gamma^2(v_6)=\{v_2, v_3, v_5\}$, $\Gamma^3(v_6)=\{v_3, v_4\}$, $R(v_6)=V$.

$\Gamma^{-1}(v_1)=\{v_6\}$, $\Gamma^{-2}(v_1)=\{v_5\}$, $\Gamma^{-3}(v_1)=\{v_1\}$, $Q(v_1)=\{v_1, v_5, v_6\}$,
$\Gamma^{-1}(v_2)=\{v_1, v_6\}$, $\Gamma^{-2}(v_2)=\{v_5, v_6\}$, $\Gamma^{-3}(v_2)=\{v_1, v_5\}$, $Q(v_2)=\{v_1, v_2, v_5, v_6\}$,
$\Gamma^{-1}(v_3)=\{v_1, v_2, v_4\}$, $\Gamma^{-2}(v_3)=\{v_1, v_5, v_6\}$, $Q(v_3)=V$,
$\Gamma^{-1}(v_4)=\{v_3, v_5\}$, $\Gamma^{-2}(v_4)=\{v_1, v_2, v_4\}$, $\Gamma^{-3}(v_4)=\{v_1, v_3, v_6\}$, $Q(v_4)=V$,
$\Gamma^{-1}(v_5)=\{v_1\}$, $\Gamma^{-2}(v_5)=\{v_6\}$, $\Gamma^{-3}(v_5)=\{v_5\}$, $Q(v_5)=\{v_1, v_5, v_6\}$,
$\Gamma^{-1}(v_6)=\{v_5\}$, $\Gamma^{-2}(v_6)=\{v_1\}$, $\Gamma^{-3}(v_6)=\{v_6\}$, $Q(v_6)=\{v_1, v_5, v_6\}$.

Находим множества $R(v)$, $Q(v)$ и $R(v)\cap Q(v)$ для произвольно выбранной вершины, например для v_1:

$R(v_1)=V$, $Q(v_1)=\{v_1, v_5, v_6\}$, $R(v)\cap Q(v)=\{v_1, v_5, v_6\}$.

$VS_1 = R(v)\cap Q(v)=\{v_1, v_5, v_6\}$ – множество вершин первой сильной компоненты графа.

$V \setminus VS_1 \neq \varnothing$, поэтому рассмотрим подграф, порожденный вершинами $V \setminus VS_1 = \{v_2, v_3, v_4\}$ (см. рис.2.2)

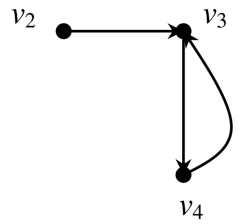


Рис.2.2

Найдем множества $\Gamma^n(v_i)$ и $\Gamma^{-n}(v_i)$ для всех его вершин $v_i \in V$.

$\Gamma^1(v_2)=\{v_3\}$, $\Gamma^2(v_2)=\{v_4\}$, $R(v_3)=\{v_2, v_3, v_4\}$,
$\Gamma^1(v_3)=\{v_4\}$, $\Gamma^2(v_3)=\{v_3\}$, $R(v_3)=\{v_3, v_4\}$,
$\Gamma^1(v_4)=\{v_3\}$, $\Gamma^2(v_4)=\{v_4\}$, $R(v_4)=\{v_3, v_4\}$,

$\Gamma^{-1}(v_2)=\varnothing$, $Q(v_2)=\{v_2\}$,
$\Gamma^{-1}(v_3)=\{v_2, v_4\}$, $\Gamma^{-2}(v_3)=\{v_3\}$, $Q(v_3)=\{v_2, v_3, v_4\}$,
$\Gamma^{-1}(v_4)=\{v_3\}$, $\Gamma^{-2}(v_4)=\{v_2, v_4\}$, $Q(v_4)=\{v_2, v_3, v_4\}$.

Находим множества $R(v)$, $Q(v)$ и $R(v)\cap Q(v)$ для произвольно выбранной вершины, например для v_3:

$R(v_3)=\{v_3, v_4\}$, $Q(v_3)=\{v_2, v_3, v_4\}$, $R(v)\cap Q(v)=\{v_3, v_4\}$.

$VS_2 = R(v)\cap Q(v)=\{v_3, v_4\}$ – множество вершин второй сильной компоненты графа.

$(V \setminus VS_1) \setminus VS_2 \neq \varnothing$, поэтому рассмотрим подграф, порожденный вершинами $(V \setminus VS_1) \setminus VS_2 = \{v_2\}$. Это вполне несвязный граф и он является последней сильной компонентой графа $G(V, E)$.

И так, граф, изображенный на рис.3.1 имеет три сильные компоненты связности: $VS_1=\{v_1, v_5, v_6\}$, $VS_2=\{v_3, v_4\}$, $VS_3=\{v_2\}$.

§ 3. Матрицы достижимости и транзитивное замыкание

Для графа $G(V, E)$ определим *матрицу (прямых) достижимостей* $R = (r_{ij})$ как квадратную матрицу порядка $|G|$, в которой

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ } \textit{если } v_j \textit{ достижима из } v_i \\ 0, \text{ } \textit{если } v_j \textit{ не достижима из } v_i \end{cases}$$

Поскольку каждая вершина достижима из самой себя, диагональные элементы в R равны 1.

Матрица достижимостей может быть получена следующим способом. Отыскиваем множества $R(v_i)$ для всех вершин графа и полагаем $r_{ij} = 1$, если $v_j \in R(v_i)$, в противном случае $r_{ij} = 0$.

Для графа, представленного на рис. 2.1, матрица достижимостей будет иметь вид

$$R=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&1&1&0&0\\0&0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0&0\\1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

Матрицу обратных достижимостей $Q=(q_{ij})$ определим как квадратную матрицу порядка $|G|$, в которой

$$q_{ij}=\begin{cases}1, \text{если } v_i \text{ достижима из } v_j\\0, \text{если } v_i \text{ не достижима из } v_j\end{cases}$$

Диагональные элементы в Q, так же как и в R, равны 1.

Для графа, представленного на рис. 4.1, матрица обратных достижимостей будет иметь вид

$$Q=\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&1\\1&1&0&0&1&1\\1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\\1&0&0&0&1&1\\1&0&0&0&1&1\end{pmatrix}.$$

Из определения ясно, что $Q=R^T$.

Теперь процедура нахождения сильных компонент может быть представлена более наглядно и эффективно. Если составить матрицу $R\otimes Q=(r_{ij}\cdot q_{ij})$ с помощью операции почленного умножения элементов матриц R и Q, то она будет нести информацию обо всех сильных компонентах графа:

$$R\otimes Q=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&1&1&0&0\\0&0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0&0\\1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&1\\1&1&0&0&1&1\\1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\\1&0&0&0&1&1\\1&0&0&0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&1\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0&0\\1&0&0&0&1&1\\1&0&0&0&1&1\end{pmatrix}$$

С помощью перестановки строк и столбцов приведем матрицу $R\otimes Q$ к блочно-диагональному виду, когда каждая диагональная подматрица соответствует сильной компоненте и состоит из одних единиц, а все остальные элементы – нули:

$$\begin{array}{c} \\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\\ v_6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array}\\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \\ v_1\\ v_5\\ v_6\\ v_2\\ v_3\\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_5 & v_6 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|c|cc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array}.$$

Откуда видно, что граф имеет три компоненты сильной связности: $\{v_1, v_5, v_6\}$, $\{v_2\}$, $\{v_3, v_4\}$.

Рассмотрим еще один способ нахождения матрицы достижимостей R графа $G(V, E)$, $|V|=n$, $|E|=q$.

Заметим, что матрицу смежности A можно рассматривать как матрицу достижимости при длине пути, равной 1. Тогда матрица $A^2 = A \times A = \left(a_{ij}\right)$, где $a_{ij} = \max\limits_{k=1}^{n}\left(a_{ik} \cdot a_{kj}\right)$ будет матрицей достижимости при длине пути 2. Соответственно матрицы A^3, A^4, A^5 и т. д. можно рассматривать как матрицы достижимости при длине путей 3,4, 5 и т. д.

Так как произвольная вершина графа достижима сама из себя, а длина пути между вершинами не превышает количества ребер в графе, то матрицу достижимости можно получить следующим образом:

$$R = I + A + A^2 + \ldots + A^q,$$

где I – единичная матрица и «+» -операция булевского сложения (взятие максимума).

Более эффективное решение задачи нахождения матрицы достижимости основано на использовании *транзитивного замыкания* графа. Граф называется транзитивным, если при наличии дуг вида (v_i, v_k) и (v_k, v_j) в нем обязательно есть и дуга вида (v_i, v_j). Пример транзитивного графа дан на рисунке 5.1.

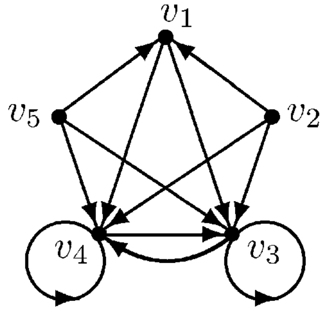


Рис.3.1.

Транзитивным замыканием графа G называют транзитивный граф G_t, полученный путем добавления к G минимального количества дуг, необходимого для обеспечения транзитивности. Из определения следует, что если в транзитивном графе имеется цепь, связывающая вершину v с вершиной

w, то существует также и дуга (v, w). Поэтому, если G_t является графом транзитивного замыкания графа G, то его матрица смежности практически совпадает с матрицей достижимости графа G, отличаясь только элементами главной диагонали, соответствующими одновершинным сильным компонентам графа G.

Следовательно, для нахождения R можно использовать алгоритмы отыскания транзитивного замыкания. Рассмотрим один из таких алгоритмов.

§ 4. Алгоритм Уоршолла

Пусть G_0 — орграф с множеством вершин $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Алгоритм Уоршолла позволяет получить граф транзитивного замыкания G_0 путем построения последовательности графов G_i, $i = 1, 2, \dots, n$, таких, что G_{i-1} является подграфом G_i и G_n – транзитивное замыкание графа G_0.

Граф G_i получается из G_{i-1} после обработки вершины v_i в соответствии со схемой, представленной на рисунке 4.1.

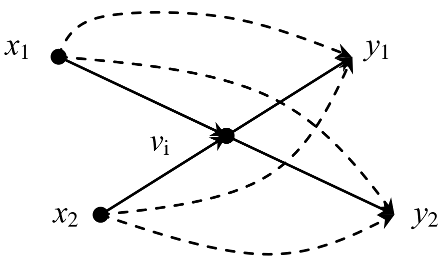


Рис.4.1

Если в графе G_{i-1} существуют дуги и (x, v_i) и (v_j, y), то при обработке вершины v_i каждая такая пара дуг (одна входящая, другая исходящая) "порождает" третью дугу (x, y), которая соединяет начало первой дуги пары с концом второй дуги. В представленный на рисунке граф добавляются четыре дуги (x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2).

Граф, полученный в результате подобной обработки вершины v_i обозначается G_i.

В качестве примера найдем транзитивное замыкание для графа G, представленного на рис 4.2. с матрицей смежности A и матрицей достижимости R.

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \qquad R = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

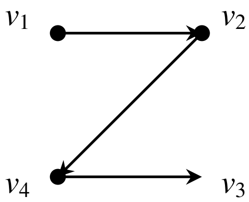


Рис.4.2

Применяя алгоритм Уоршолла, получим следующий ряд матриц, иллюстрирующий процесс формирования матрицы транзитивного замыкания A^*:

$$\underset{A(G_1)}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \Rightarrow \underset{A(G_2)}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \Rightarrow \underset{A(G_3)}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \Rightarrow \underset{A(G_4)}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Соответствующие им графы изображены на рис. 4.3.

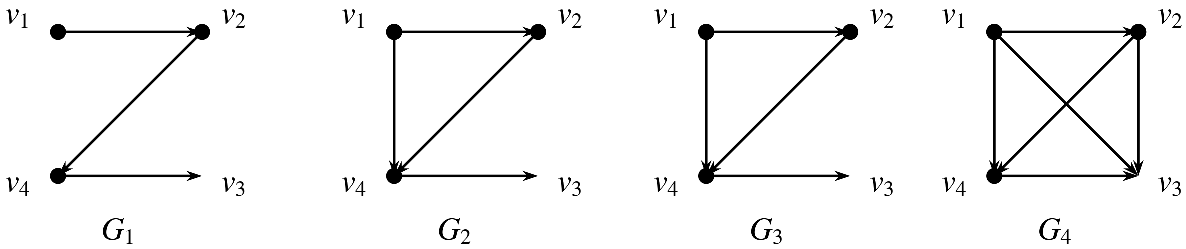


Рис.4.3

Последний из этих графов G_4 является графом транзитивного замыкания для графа G на рис. 4.2. Теперь, чтобы получить матрицу достижимости, достаточно расставить недостающие единицы на главной диагонали в матрице $A^*(G)=A(G_4)$

$$R=A^*(G)+I=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

§ 5. Вершинная и реберная связность

Прежде чем ввести понятия вершинной и рёберной связности, рассмотрим одну математическую модель, возникающую, в частности, при проектировании и анализе сетей ЭВМ. Имеется сеть, состоящая из центров хранения и переработки информации. Некоторые пары центров соединены каналами. Обмен информацией между любыми двумя центрами осуществляется либо непосредственно по соединяющему их каналу, если он есть, либо через другие каналы и центры. Сеть считается исправной, если каждая пара центров в состоянии обмениваться информацией. Такой сети естественно сопоставить граф: вершины – центры, ребра – каналы сети. Тогда исправной сети будет соответствовать связный граф. Важным понятием является надежность (живучесть) сети, под которой обычно подразумевают способность сети функционировать при выходе из строя одного либо нескольких центров или каналов. Ясно, что менее надежной следует считать ту сеть, исправность которой нарушается при повреждении меньшего количества элементов.

Оказывается, надежность сети можно измерять на основе вводимых ниже определений.

Числом *вершинной связности* $\chi(G)$ графа G называется наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному или одновершинному графу.

Числом *реберной связности* $\lambda(G)$ графа G назовем наименьшее число ребер, удаление которых приводит к несвязному графу. Число реберной связности графа будем считать равным нулю, если этот граф одновершинный.

Вершина v графа G называется *точкой сочленения* (или разделяющей вершиной), если граф $G–v$ имеет больше компонент, чем G. В частности, если G связен и v – точка сочленения, то $G–v$ не связен.

Аналогично ребро графа называется *мостом*, если его удаление увеличивает число компонент.

Понятно, что концевая вершина моста является точкой сочленения, если в графе есть другие ребра, инцидентные этой вершине.

Если $\delta(G)$ – минимальная степень вершин графа G, то очевидно, что $\lambda(G)\leq\delta(G)$, поскольку удаление всех ребер, инцидентных данной вершине, приводит к увеличению числа компонент графа. Более того, справедлива теорема.

Теорема. Для любого графа G верны неравенства $\chi(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$.

Следующее утверждение показывает, что эти неравенства нельзя усилить.

Утверждение. Для любых натуральных чисел p, q, r, таких, что $p \leq q \leq r$, существует граф G, у которого $\chi(G) = p$, $\lambda(G) = q$, $\delta(G) = r$.

Граф G называется *k- связным*, если $\chi(G)\geq k$, и *реберно - k- связным*, если $\lambda(G)\geq k$.

Интуитивно очевидно, что граф тем более связен, чем больше существует различных цепей, соединяющих одну вершину с другой, и тем более связен, чем меньше нужно удалить промежуточных вершин, чтобы отделить одну вершину от другой.

Сформулируем теорему, которая придает этим неформальным наблюдениям точный и строгий смысл. Предварительно дадим еще несколько определений.

Говорят, что множество вершин S *разделяет* несмежные вершины a и b связного графа G, если в графе $G — S$ вершины a и b принадлежат различным связным компонентам. Разделяющее множество вершин для a и b обозначим $S(a, b)$.

Две (a, b)-цепи графа G называют *вершинно-непересекающимися*, если у них нет общих вершин, за исключением a и b, и *реберно-непересекающимися*, если у них нет общих ребер. Множество вершинно-непересекающихся (a, b)-цепей обозначим $P(a, b)$.

Очевидно, непересекающиеся цепи являются и реберно-непересекающимися, а обратное, вообще говоря, неверно.

В 1927 году К. Менгер доказал теорему, устанавливающую соотношение между числом непересекающихся простых цепей, соединяющих две несмежные вершины графа, и его связностью.

Теорема Менгера. Наименьшее число вершин разделяющих две несмежные вершины a и b графа G, равно наибольшему числу вершинно-непересекающихся простых (a, b)-цепей этого графа:

$$\min\left| S(a,b)\right| = \max\left| P(a,b)\right| .$$

IV. ДЕРЕВЬЯ

§ 1. Определение и свойства свободных деревьев

Напомним, что циклом называется замкнутая цепь.

Граф, не содержащий циклов, называется *ациклическим*.

Ациклический граф называют *лесом*.

Определение. Связный ациклический граф называется *деревом* (*свободным деревом*).

Таким образом, компонентами связности леса являются деревья.

Основные свойства деревьев сформулируем в виде теоремы

Теорема Для графа G следующие утверждения эквивалентны:

1) G – дерево;
2) Любые две вершины в графе G соединены единственной простой цепью;
3) G – связный граф и $p=q+1$;
4) G – ациклический граф и $p=q+1$;
5) G – ациклический граф, и если любую пару несмежных вершин соединить ребром x, то в графе $G+x$ будет точно один цикл;
6) G – связный граф, отличный от K_p для $p=3$, и если любую пару несмежных вершин соединить ребром x, то в графе $G+x$ будет точно один цикл;
7) G – граф, отличный от $K_1 \cup K_3$ и $K_3 \cup K_2$, $p=q+1$, и если любую пару несмежных вершин соединить ребром x, то в графе $G+x$ будет точно один цикл.

Любое из утверждений теоремы можно использовать в качестве определения дерева.

Следствие

Всякий лес содержит $p-k$ ребер, где k – число компонент связности.

§ 2. Центры и центроиды

Напомним, что *эксцентриситетом* $e(v)$ вершины v в связном графе G называется наибольшее расстояние $d(v,u)$ по всем вершинам u в графе G. *Радиусом* $r(G)$ называется наименьший из эксцентриситетов вершин графа G. *Диаметром* $d(G)$ – наибольший из эксцентриситетов вершин графа G.

Вершина v называется *центральной*, если ее эксцентриситет равен радиусу $e(v)=r(G)$; *периферийной*, если $e(v) \neq r(G)$. *Центр* графа G – множество всех его центральных вершин.

Теорема. Центр дерева состоит из одной вершины, или из двух смежных вершин.

Пусть u – вершина дерева G. Максимальное (по включению) поддерево дерева G, содержащее u в качестве висячей вершины, называется ветвью к вершине u. Очевидно, что число ветвей к вершине u равно степени этой вершины в графе G. Наибольшее число ребер по всем ветвям к вершине u называется весом вершины u.

На рис. 2.1 указаны веса невисячих вершин. Очевидно, что веса висячих вершин в дереве равны числу ребер.

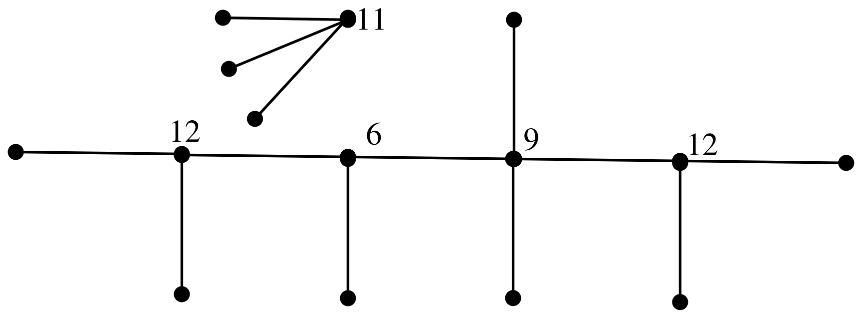


Рис.2.1

Вершина называется *центроидной* вершиной дерева, если она имеет наименьший вес. *Центроид* дерева – это множество всех центроидных вершин.

Теорема. Центроид дерева состоит из одной вершины, или из двух смежных вершин.

§ 3. Кодирование свободных деревьев

Пусть задано свободное дерево с n вершинами. Каждой его вершине присвоим метку – натуральное число от 1 до n, причем разные вершины получают разные метки (существует с $n!$ способов для присвоения таких меток).

Рассмотрим теперь *различные* помеченные свободные деревья с n вершинами. Обозначим через P_n число таких деревьев. Ясно, что $P_1 = P_2 = 1$.

Пусть $n = 3$. Существует одно дерево на 3-х вершинах, однако пометить его можно 3 способами, см. рис 3.1 Помеченное дерево с тремя вершинами полностью определяется своей центральной вершиной.

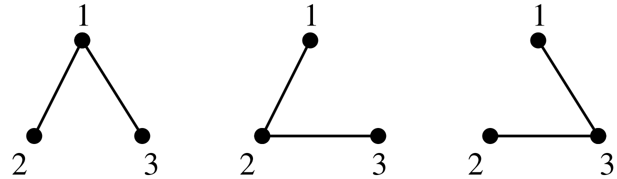


Рис.3.1

Пусть $n = 4$. Существует два дерева на 4-х вершинах (куст и цепь). Пометить их можно следующим образом, см. рис 3.2.

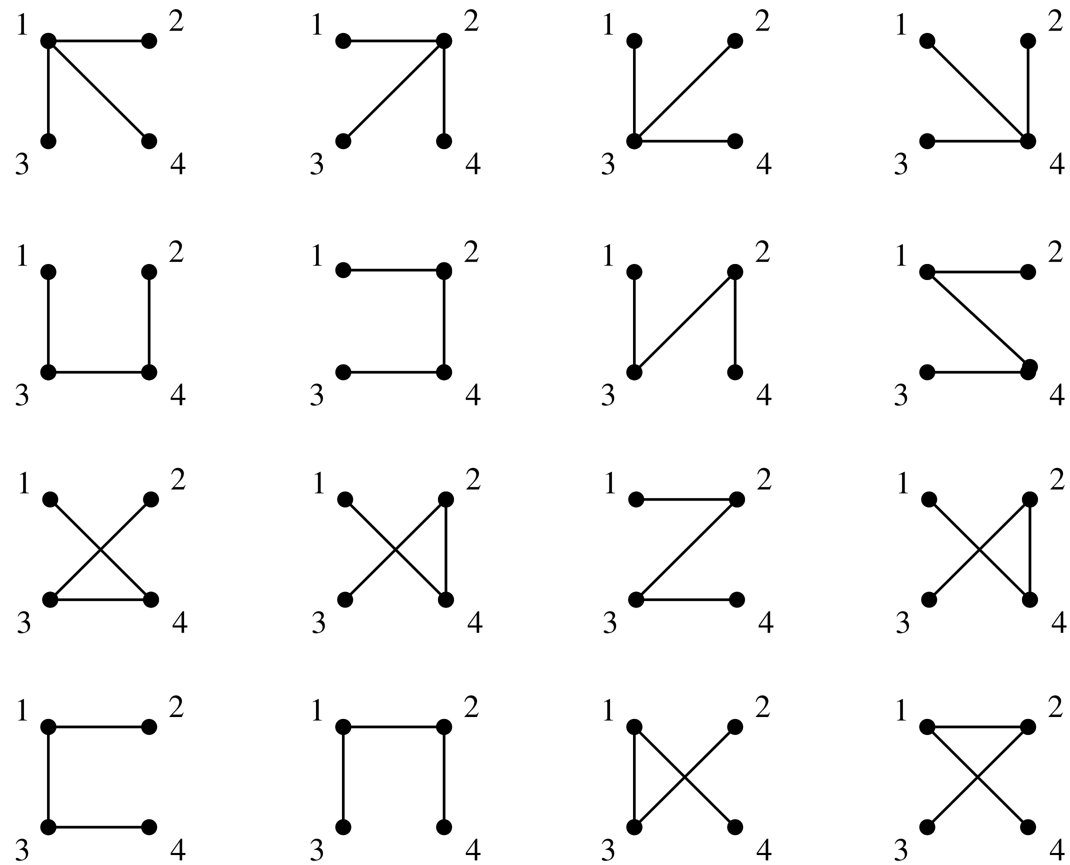


Рис.3.2

Справедлива следующая теорема

Теорема Кэли

Число помеченных деревьев с *n* вершинами равно n^{n-2}.

Доказательство

Покажем, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством помеченных *n*-вершинных деревьев и множеством размещений с повторениями из *n* по *n*-2 элементов. Поскольку число таких размещений $\tilde{A}_n^{n-2} = n^{n-2}$, то теорема будет доказана.

Каждому помеченном дереву с *n* вершинами поставим в соответствие код Прюфера – упорядоченный набор $n-2$ элементов множества $\{1, 2, \ldots n\}$, в котором элементы могут повторяться.

Кодирование дерева выполняется с помощью следующего алгоритма.

1. Пусть $i = 1$.
2. Пусть v_i – висячая вершина дерева с наименьшей меткой, тогда a_i – метка смежной с ней вершины.
3. Удалим из дерева вершину v_i и инцидентное ей ребро. Если в дереве осталось более двух вершин, увеличить i на 1 и перейти к п.2. Иначе – закончить

Очевидно, что разные помеченные деревья будут иметь разные коды.

Декодирование дерева

Пусть $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ – код Прюфера дерева T.

1. Пусть $B_0 = \{1, 2, \ldots n\}$ и b_1 – наименьшее число из B_0, не встречающееся в коде $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$. Тогда b_1 – номер висячей вершины, смежной с a_1, и дерево T содержит ребро (b_1, a_1).
2. Пусть T_1 – дерево, получаемое из дерева T, удалением вершины a_1. Пусть $B_1 = B_0 \backslash \{b_1\}$. Тогда $(a_2, \ldots, a_{n-2})$ – код Прюфера дерева T_1 с метками B_1.

   Выберем наименьшее число b_2 из B_1, не встречающееся в коде $(a_2, \ldots, a_{n-2})$. Тогда b_2 – номер висячей вершины, смежной с a_2, и дерево T_1 (а значит и дерево T) содержит ребро (b_2, a_2). И так далее.

На k-том шаге рассматривается дерево T_{k-1} с множеством меток B_{k-1}. Во множестве меток выбирается наименьшее число b_k, не входящее в код $(a_k, \ldots, a_{n-2})$, и восстанавливается ребро (b_k, a_k).

После $(n-2)$ шагов будут выявлены $(n-2)$ ребра дерева T. При этом множество B_{n-2} будет содержать два числа – метки вершин последнего, $(n-1)$ ребра, включаемого в дерево. Дерево T_{n-2} содержит две вершины, а значит, строится однозначно, и в кодировании не нуждается.

Осталось убедиться в том, что полученный после декодирования граф действительно является деревом. В самом деле, граф T_{k-1} получается из графа T_k добавлением ребра (b_k, a_k), причем вершина b_k не принадлежит графу T_k. Поэтому из ацикличности T_k следует ацикличность T_{k-1}. Поскольку T_{n-2} – дерево, то деревьями являются и графы T_{n-3}, … T_2, T_1, T.

Пример. Дерево, изображенное на рис.3.3 имеет код (2, 4, 1, 2, 4, 4).

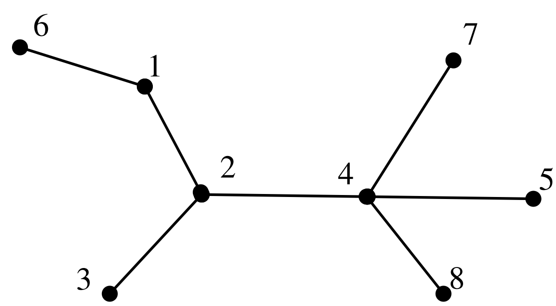


Рис.3.3

По коду (2, 4, 1, 2, 4, 4) восстановим дерево. Процесс декодирования отобразим в таблице

k	B_k	код T_k	(b_k, a_k)
0	$\{1, 2, \underline{3}, 4, 5, 6, 7, 8\}$	$(\underline{2}, 4, 1, 2, 4, 4)$	
1	$\{1, 2, 4, \underline{5}, 6, 7, 8\}$	$(\underline{4}, 1, 2, 4, 4)$	(3, 2)
2	$\{1, 2, 4, \underline{6}, 7, 8\}$	$(\underline{1}, 2, 4, 4)$	(5, 4)
3	$\{\underline{1}, 2, 4, 7, 8\}$	$(\underline{2}, 4, 4)$	(6, 1)
4	$\{\underline{2}, 4, 7, 8\}$	$(\underline{4}, 4)$	(1, 2)
5	$\{4, \underline{7}, 8\}$	$(\underline{4})$	(2, 4)
6	$\{4, 8\}$		(7, 4)
7			(4, 8)

Как и следовало ожидать, получено дерево, изображенное на рис. 3.3.

§ 4. Остовные деревья

Определение. Остовным деревом графа G называется произвольный его подграф, содержащий все вершины графа G и являющийся лесом.

Пример. Пусть задан граф G, см. рис 4.1. Графы G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 являются его остовными деревьями.

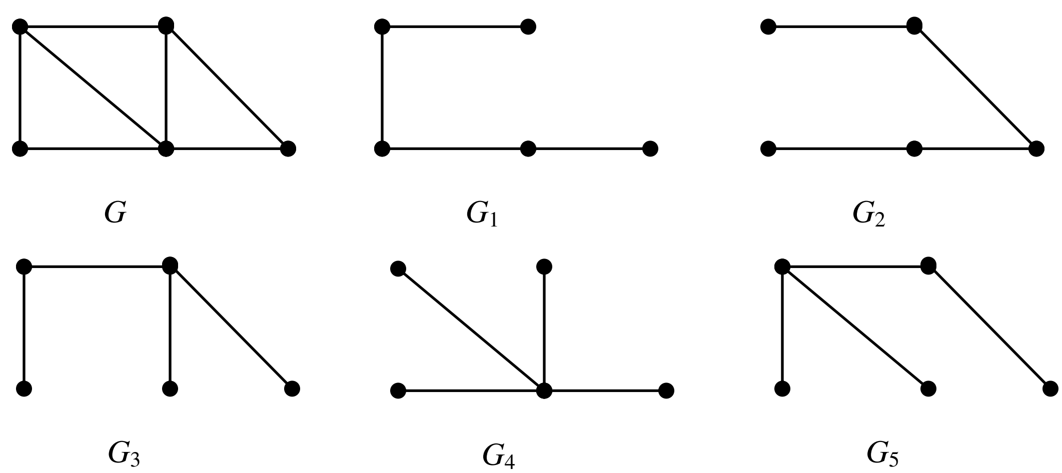


Рис. 4.1

Заметим, что на рис.5 приведены лишь некоторые остовные деревья графа G. Некоторые из них изоморфны.

На вопрос о том, сколько остовных деревьев имеет граф отвечает теорема Киркгофа. Для ее формулировки потребуется понятие матрицы Киркгофа.

Определение. Матрицей Киргкгофа помеченного графа G назовем матрицу $B = (b_{ij})$, где

$$b_{ij} = \begin{cases} -1, \text{ если } i \text{ и } j \text{ смежны} \\ \ \ 0, \text{ если } i \text{ и } j \text{ несмежны} \\ p(i), \text{ если } i = j \end{cases}$$

Теорема Киркгофа

Число остовных деревьев помеченного графа G равно алгебраическому дополнению произвольного элемента его матрицы Киркгофа.

Пример. Пометим граф G, изображенный на рис.4.1, следующим образом (см. рис 4.2.)

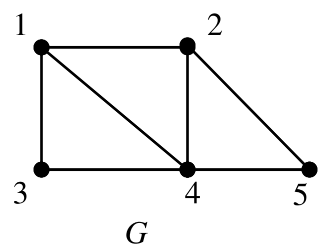


Рис.4.2

Матрица Киркгофа для графа G примет вид

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Алгебраическое дополнение элемента a_{11} равно 21. Следовательно, граф G имеет 21 остовное дерево. Данные деревья различны как помеченные деревья, но среди них могут быть изоморфные.

Пусть теперь дан взвешенный граф, т.е. граф, каждому ребру которого поставлено в соответствие неотрицательное число (вес ребра). Рассмотрим задачу нахождения остовных деревьев экстремальных весов. Существуют эффективные алгоритмы решения данной задачи.

Алгоритм Краскала

Пусть $G = (V, E)$ – заданный взвешенный граф, содержащий p вершин и q ребер, G' – остов наименьшего веса. Для нахождения G' применим алгоритм Краскала.

1. Положим $G' = (V, E_0)$ и $E_0 = \emptyset$. Следующий шаг выполнять для $i = 1, 2, \dots q$, пока $|E_i| < p - 1$

2. Выбрать в графе G ребро e наименьшего веса.

Если при его добавлении в E_i в графе $G' = (V, E_i)$ не образуется циклов, то добавить ребро e в E_i.

Исключить из графа G ребро e.

Пример. Найдем с помощью алгоритма Краскала остов наименьшего веса графа G, изображенного на рис. 4.3.

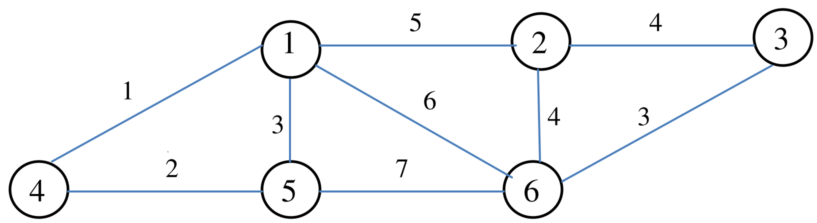


Рис. 4.3

Работу алгоритма проиллюстрируем в таблице.

№ шага	Ребро наименьшего веса	E_i	Примечания
0		$\emptyset$	
1	$w(1,4) = 1$	{(1, 4)}	
2	$w(4,5) = 2$	{(1, 4), (4, 5)}	
3	$w(1,5) = 3$	{(1, 4), (4, 5)}	ребро (1,5) не может быть добавлено, т.к. образуется цикл
4	$w(3,6) = 3$	{(1, 4), (4, 5), (3,6)}	на данном шаге граф G' не является деревом
5	$w(2,3) = 4$	{(1, 4), (4, 5), (3,6), (2,3)}	может быть добавлено ребро (2,6) с тем же весом, будет построен другой остов с тем же весом
6	$w(2,6) = 4$	{(1, 4), (4, 5), (3,6), (2,3)}	ребро (2,6) не может быть добавлено, т.к. образуется цикл
7	$w(1,2) = 5$	{(1, 4), (4, 5), (3,6), (2,3), (1,2)}	$\|E_7\| = 5$ конец работы алгоритма

Искомый остов имеет вид (рис.4.4)

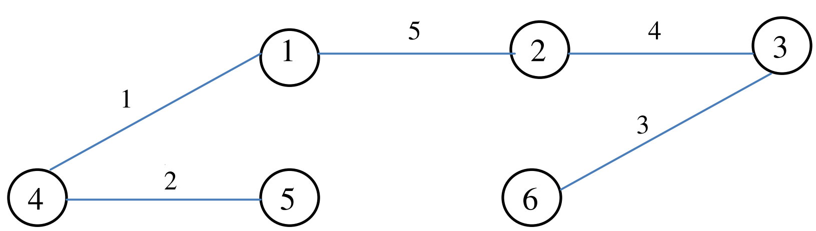


Рис. 4.4

Вес остова равен 15.

Алгоритм Прима

Алгоритм Прима похож на алгоритм Краскала. Основное различие в том, что в ходе работы алгоритма строится разрастающееся дерево.

Пусть $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$ – заданный взвешенный граф, содержащий p вершин и q ребер, G' – остов наименьшего веса. Для нахождения G' применим алгоритм Прима.

1. Пусть $G_1' = (V_1, E_1)$ и $V_1 = \{x_1\}$, где x_1 – произвольная вершина из V, а $E_1 = \emptyset$. Следующий шаг повторять для $i = 2, \dots p$.

2. Получить дерево G_i' из дерева G_{i-1}' добавлением ребра $e = (u, v)$ графа G наименьшего веса (здесь $u \in V_{i-1}$, $v \in G \backslash V_{i-1}$ и $V_i = V_{i-1} \cup \{v\}$). Исключить ребро e из графа G.

Пример. Найдем с помощью алгоритма Прима остов наименьшего веса графа G, изображенного на рис. 4.3.

Работу алгоритма проиллюстрируем в таблице.

№ шага	V_i	E_i
1	{1}	$\emptyset$
2	{1,4}	(1, 4)
3	{1, 4, 5}	(1, 4), (4, 5)
4	{1, 4, 5, 2}	(1, 4), (4, 5), (1, 2)
5	{1, 4, 5, 2, 6}	(1, 4), (4, 5), (1, 2), (2, 6)
6	{1, 4, 5, 2, 6, 3}	(1, 4), (4, 5), (1, 2), (2, 6), (6, 3)

Искомый остов имеет вид (рис.4.5) Вес остова равен 15.

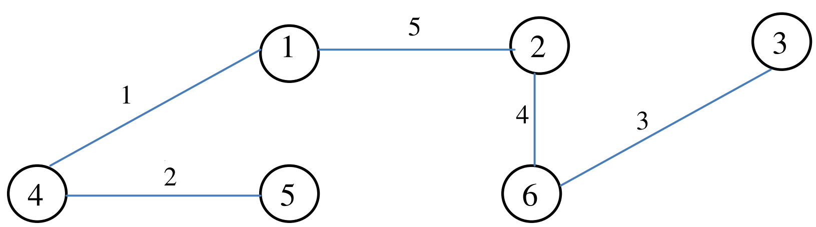


Рис. 4.5

Замечание

Для нахождения остова *наибольшего* веса также используются алгоритмы Краскала и Прима. При этом необходимо заменить условие выбора ребра наименьшего веса, на выбор ребра наибольшего веса.

§ 5. Ориентированные деревья

Определение.

Ориентированным деревом или *ордеревом* называется орграф со следующими свойствами:

1) Существует единственная вершина r, полустепень захода которой равна 0, вершину r называют *корнем*;
2) Полустепень захода всех остальных вершин равна 1;
3) Каждая вершина орграфа достижима из корня.

Приведем примеры всех ордеревьев с тремя вершинами (рис.5.1).

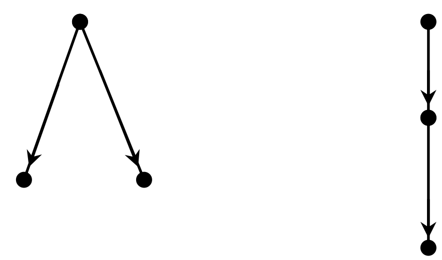


Рис.5.1

Теорема. Ордерево обладает следующими свойствами:

1. $q = p - 1$.
2. Если в ордереве отбросить ориентацию дуг, то получится свободное дерево.
3. В ордереве нет циклов.
4. Для каждой вершины существует единственная цепь, ведущая из корня в эту вершину.
5. Правильный подграф, определяемый некоторой вершиной v и множеством вершин, достижимых из v, является ордеревом с корнем v (такое ордерево называют *поддеревом* вершины v).
6. Если в свободном дереве любую вершину назначить корнем, получится ордерево.

Определение. «Растительная» терминология ордерева

Висячая вершина ордерева называется *листом*.

Множество всех листьев называется *кроной*.

Цепь из корня в лист называется *ветвью*.

Длина (количество ребер) наибольшей ветви называется *высотой* дерева.

Расстояние от корня до вершины называется *уровнем* вершины. Корень имеет уровень 0.

Множество всех вершин одного уровня называется *ярусом*.

Определение. «Генеалогическая» терминология ордерева.

Вершины, достижимые из вершины v *потомками* вершины v.

Если вершина u является потомком вершины v, то v называется *предком* u.

Если в ордереве существует дуга (u, v), то u называется *отцом* v, а v – *сыном* u.

Сыновья одного отца называются *братьями*.

§ 6. Упорядоченные деревья

Рассмотрим еще одно определение ордерева.

Определение.

Ордеревом T называется непустое множество вершин, на котором определено разбиение, обладающее следующими свойствами:

1. В данном разбиении имеется одноэлементное множество $\{r\}$, вершину r называют *корнем*.
2. Оставшиеся вершины содержатся в $k\ (k \geq 0)$ подмножествах $T_1, T_2, \dots T_k$, каждое из которых, в свою очередь, является ордеревом и называется поддеревом T.

$$T = \{\{r\}, T_1, \dots, T_k\}.$$

Определение.

Ордерево $T = \{\{r\}, T_1, \dots, T_k\}$ называется *упорядоченным*, если зафиксирован относительный порядок поддеревьев $T_1, \dots, T_k$ и каждое из них, в свою очередь, является упорядоченным ордеревом.

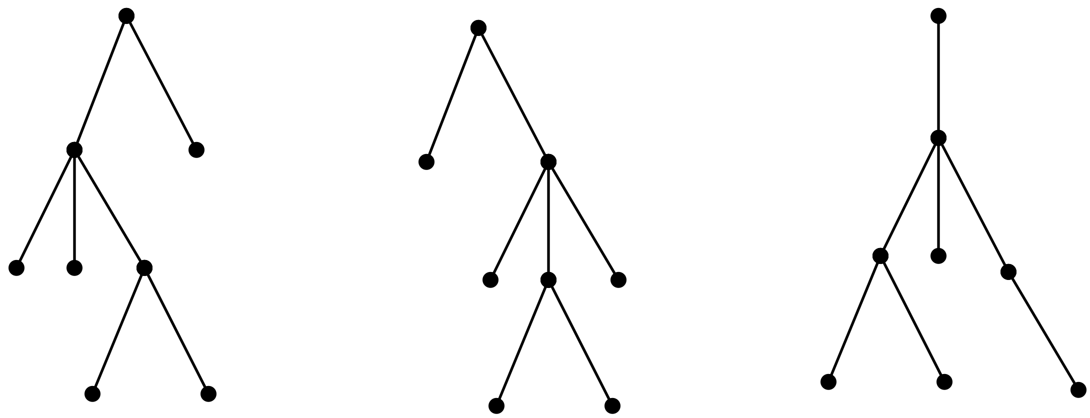
Замечание.

При изображении ордеревьев общепринято соглашение о том, что корень находится вверху, все дуги ориентированы сверху вниз. Если дерево упорядоченно, то считается, что порядок поддеревьев определен слева направо.

Таким образом, изображения свободных, ориентированных и упорядоченных деревьев оказываются графически неразличимы. Поэтому требуется дополнительное уточнение, дерево какого типа изображено на диаграмме. Как правило, это ясно из контекста.

Пример.

Графически заданы три дерева (рис.6.1). Выяснить, сколько среди них различных (с точностью до изоморфизма) деревьев, ордеревьев, упорядоченных деревьев.



(1) (2) (3)

Рис. 6.1

Как свободные деревья, все изображенные деревья изоморфны.

Как ордеревья, изоморфны (1) и (2), но неизоморфны (2) и (3).

Как упорядоченные деревья, все изображенные деревья различны.

Теорема. В упорядоченном дереве с p вершинами существует такая нумерация вершин, что номера потомков больше номеров предков и номера старших братьев больше номеров младших братьев.

Доказательство

В основу доказательства положим обход графа в глубину, начиная с корня, причем обход смежных вершин осуществим в порядке, определенном порядком поддеревьев.

Пример

Для упорядоченного дерева, изображенного на рис.6.2 (слева), вершины получат следующие номера (рис.12, справа)

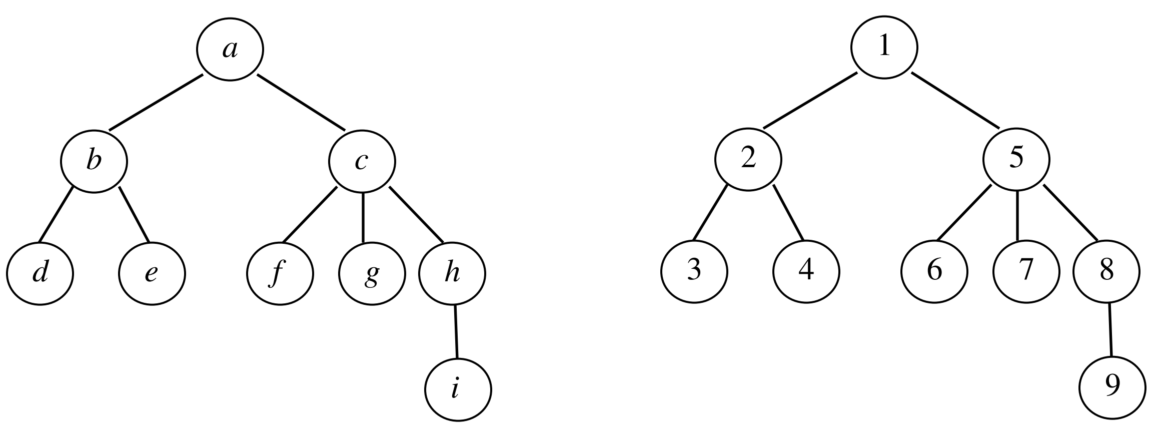


Рис. 6.2

Указанный порядок обхода часто называют *прямым*.

§ 7. Кодирование упорядоченных деревьев

В упорядоченном дереве выделен корень и задан порядок поддеревьев. Данная информация позволяет построить более компактное представление дерева по сравнению с кодом Прюфера для свободных деревьев.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Число упорядоченных деревьев с n вершинами не превосходит числа 4^{n-1}

Доказательство

Каждому дереву однозначным образом поставим в соответствие упорядоченный набор из 0 и 1 длины $2(n-1)$. Поскольку число различных таких наборов равно $2^{2(n-1)} = 4^{n-1}$, то утверждение теоремы будет доказано.

Кодирование упорядоченного дерева

Применим к упорядоченному дереву обход в глубину (прямой обход). Вход в вершину будем обозначать 1, возвращение (выход) – 0. Поскольку при данном обходе каждое ребро будет пройдено дважды, то получим последовательность длины $2q$ (q – количество ребер в дереве). Так как $q = n - 1$, то найденная последовательность будет иметь необходимую длину.

Построенный код называют кодом Прюфера для упорядоченных деревьев.

Пример

Упорядоченное дерево, изображенное на рис 7.1 будет иметь код (1101001101011000)

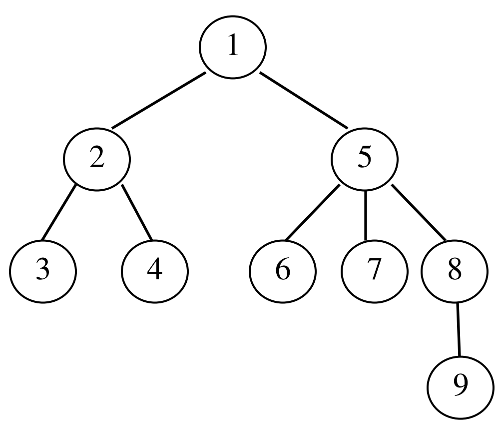


Рис. 7.1

Замечание. В отличие от кода Прюфера для свободных деревьев код упорядоченного дерева не является взаимно однозначным: каждому упорядоченному дереву соответствует единственная последовательность из 0 и 1 длины $2(n-1)$, однако не любая такая последовательность является кодом упорядоченного дерева.

§ 8. Бинарные деревья

Определение.

Бинарное или двоичное дерево – это непустое множество вершин, на котором определено разбиение, обладающее следующими свойствами:

1. В данном разбиении имеется одноэлементное множество $\{r\}$, вершину r называют *корнем*.
2. Оставшиеся вершины содержатся в двух подмножествах $T_{\text{л}}, T_{\text{п}}$ – левом и правом, каждое из которых, в свою очередь, либо пусто, либо является бинарным деревом.

Бинарное дерево не является упорядоченным. Если одно из его поддеревьев пусто, то важно: левое оно или правое. В упорядоченном же дереве важен порядок непустых поддеревьев. На рис. 8.1 изображены два изоморфных упорядоченных дерева, которые различны как бинарные.

Рис.8.1

Всякое свободное дерево можно ориентировать, назначив одну из вершин корнем. Всякое ориентированное дерево можно упорядочить, определив для потомков одного отца отношение старше-младше (левее-правее). Всякое упорядоченное дерево можно представить бинарным, проведя левую связь к старшему сыну, а правую к младшему брату.

На рис. 8.2 приведен пример упорядоченного дерева и соответствующего ему бинарного.

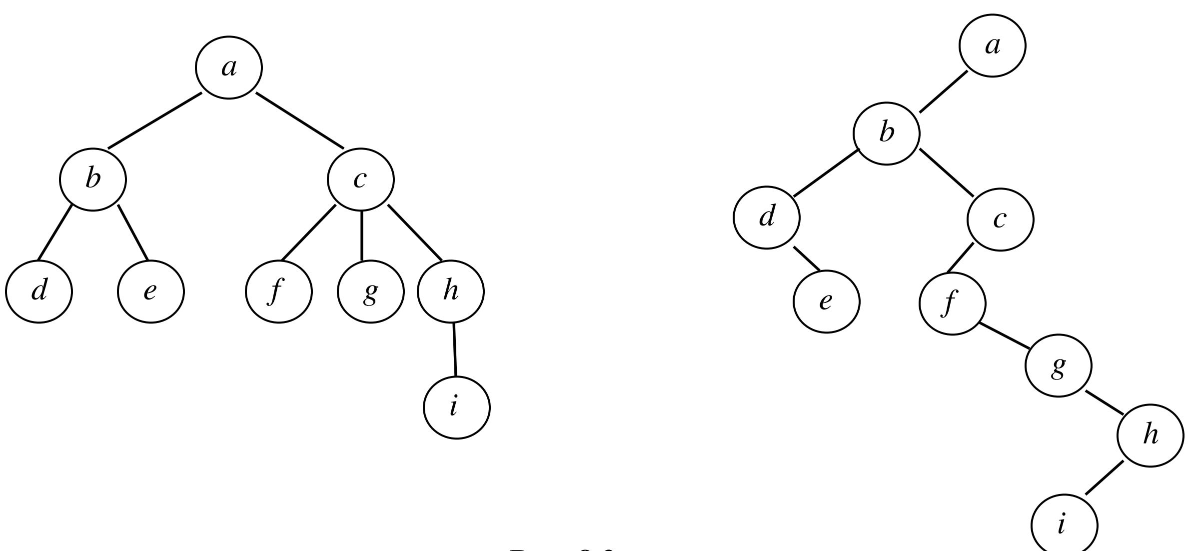


Рис. 8.2

§ 9. Сбалансированные деревья

Определение

Бинарное дерево называется *сбалансированным* по высоте, если для любой его вершины высота левого и правого поддеревьев различается не более, чем на единицу.

Сбалансированные деревья называют *АВЛ*-деревьями (Адельсон-Вельский и Ландис – ученые, занимавшиеся изучением деревьев данного вида).

Пример сбалансированного дерева приведен на рис. 9.1.

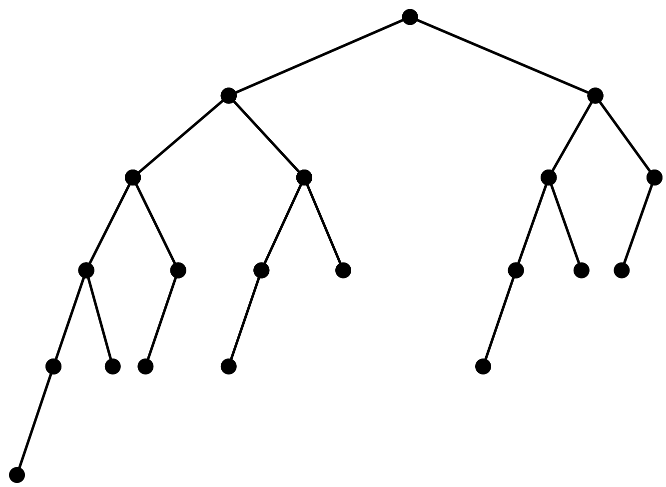


Рис. 9.1

Теорема. Высота сбалансированного дерева, построенного на p вершинах, строго меньше числа $2\log_2 p$.

«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. академика С.П. Королева
(национально исследовательский университет)» (СГАУ)

Факультет информатики
кафедра «Прикладная математика»

Задачи для практических занятий по дисциплине
ТЕОРИЯ ГРАФОВ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ
для специальности «Информационная безопасность автоматизированных систем»

Составитель Додонова Н.Л.

Самара 2013

СОДЕРЖАНИЕ

1. Основные определения теории графов

2. Свободные и ориентированные деревья

3. Связность

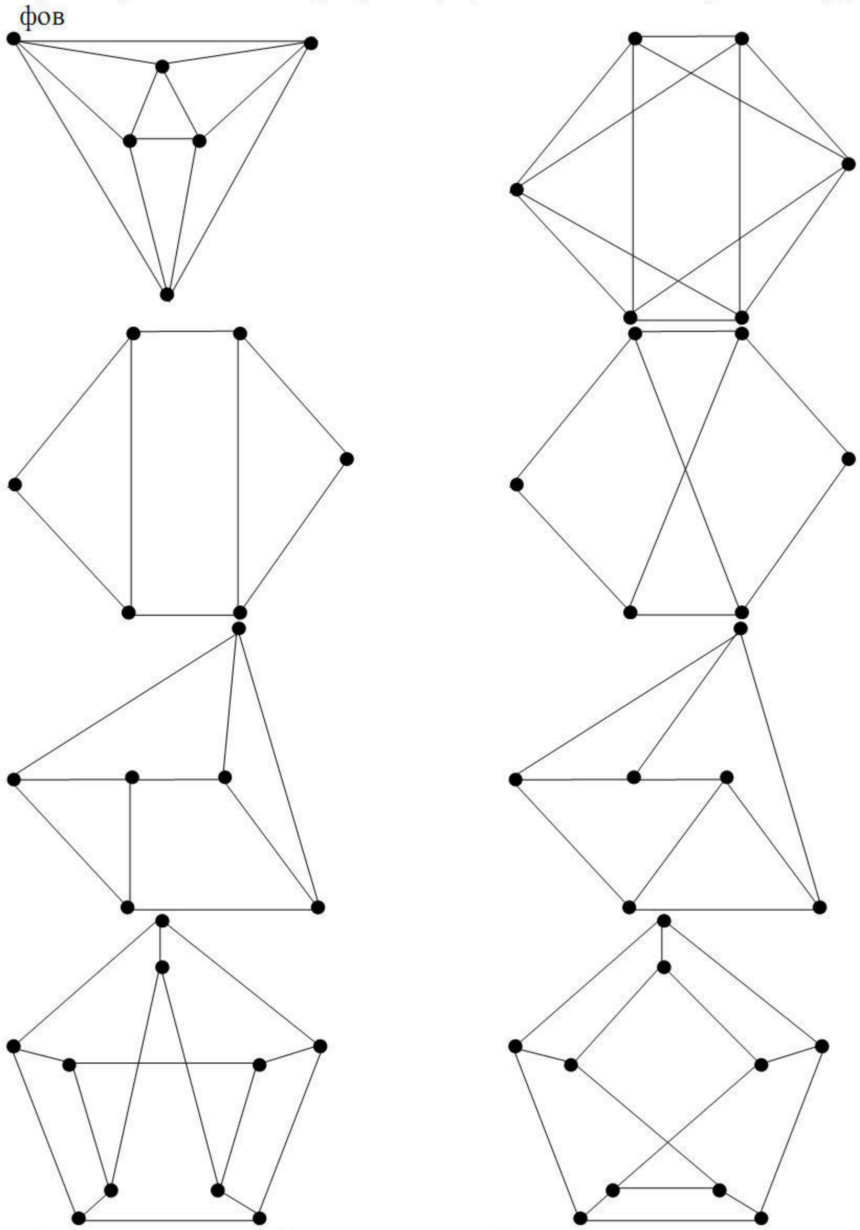
4. Планарные графы

5. Обходы графов

1. Основные понятия и определения теории графов

Задачи

1. Найдите число помеченных (n, m)-графов.
2. Найдите все попарно неизоморфные графы третьего, четвертого порядка.
3. Нарисуйте все попарно неизоморфные кубические графы восьмого порядка.
4. Среди приведенных на рисунке графов найдите все пары изоморфных графов



5. Определите число ребер n- мерного куба.
6. Докажите теорему о суммарной степени вершин.

7. Докажите лемму о рукопожатиях.
8. Докажите, что не существует регулярного графа, порядок и степень которого нечетны.
9. Докажите, что в каждом графе найдутся две вершины с одинаковыми степенями.
10. Докажите, что для связности графа необходимо и достаточно, чтобы в нем для какой-либо фиксированной вершины u и каждой другой вершины v существовал (u, v)-маршрут.
11. Докажите, что каждый граф представляется в виде дизъюнктивного объединения своих связных компонент. Разложение графа на связные компоненты определено однозначно.
12. Докажите, что, для любого графа либо он сам либо его дополнение является связным.
13. Пусть G –связный граф, $e\in E_G$. Тогда докажите:
1) что ребро e принадлежит какому-либо циклу графа G, то граф $G–e$ связен;
2) если ребро e не входит ни в какой цикл графа G, то граф $G–e$ имеет ровно две компоненты связности.
14. Докажите, что в (n, m)- графе, имеющем k компонент связности, выполняется неравенство $n–k\le m\le (n–k)(n–k+1)/2$.
15. Докажите, что при фиксированных n и $k\le n$ среди графов G порядка n с k компонентами связности существует только один граф, а именно $G=O_{k-1}\cup K_{n-k+1}$, с максимальным числом ребер (O_k– пустой граф с k вершинами).
16. Докажите, что для любых натуральных чисел n, m, k, удовлетворяющих условиям $1\le k\le m$, $n–k\le m\le (n–k)(n–k+1)/2$ существует (n, m)-граф, имеющий ровно k компонент связности.
17. Докажите, что если число ребер графа порядка $n>2$ больше, чем $(n−1)(n–2)/2$, то граф связен.
18. Докажите, что в связном графе любые две простые цепи максимальной длины имеют общую вершину.
19. Докажите, что если $\delta(G)\ge(n–1)/2$, то граф G связен.
20. Постройте граф, центр которого:
1) состоит ровно из одной вершины;
2) состоит ровно из трех вершин и не совпадает с множеством всех вершин;
3) совпадает с множеством всех вершин.
21. Докажите, что диаметр графа не превосходит его удвоенного радиуса.

2. Свободные и ориентированные деревья

Теоретические задания

1. Докажите, что каждое дерево является двудольным графом.

2. Докажите, что если в дереве не менее двух ребер, то его радиус меньше диаметра.

3. Докажите, что центр дерева состоит из одной вершины, если его диаметр четное число, и двух вершин в противном случае.

4. Верно ли, что в дереве с нечетным диаметром любые две простые цепи наибольшей длины имеют хотя бы одно общее ребро?

5. Выразите радиус дерева через его диаметр.

6. Пусть n – количество вершин дерева, r – его радиус. Докажите, что $n \geq 2r$.

7. Верно ли, что если диаметр графа равен $k > 2$, то остов графы имеет диаметр k ?

8. Докажите, что диаметр дереваT равен 2 тогда и только тогда, когда T – звезда. (Звезда – полный двудольный граф $K_{1,n}$)

9. Пусть n – число вершин дерева. Докажите, что при больших значениях n вероятность того, что случайным образом выбранная вершина дерева является висячей равна ${}^{1}\!/_{e}$.

10. Сколько листьев имеет дерево с k внутренними вершинами, порядок каждой из которых равен 2? (Вершина называется внутренней, если ее полустепень исхода не равна 0)

11. Некто купил курицу. После того, как она снесла два яйца, ее съели. Из яиц вывелись цыплята. Петухов съедали сразу, а куриц – после того, как они сносили два яйца, и т.д. В какой-то момент вывелись одни петухи и процесс закончился. Сколько куриц было съедено, если съели 97 петухов?

Практические задания

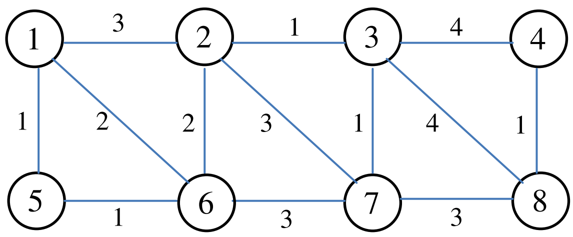
1. Изобразите все, с точностью до изоморфизма, деревья с 7 вершинами. (11)

2. Постройте дерево, в котором центр и центроид состоят из двух вершин и их пересечение пусто.

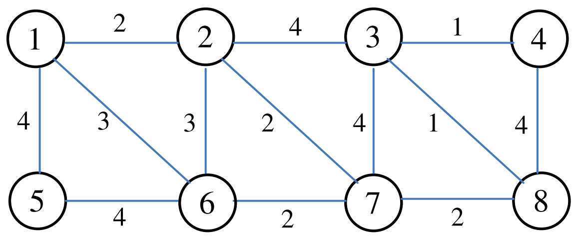
3. Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника 50×600 клеток. Какое наибольшее количество веревочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски?

4. Найдите остовы минимального и максимального весов для графов

a)



b)



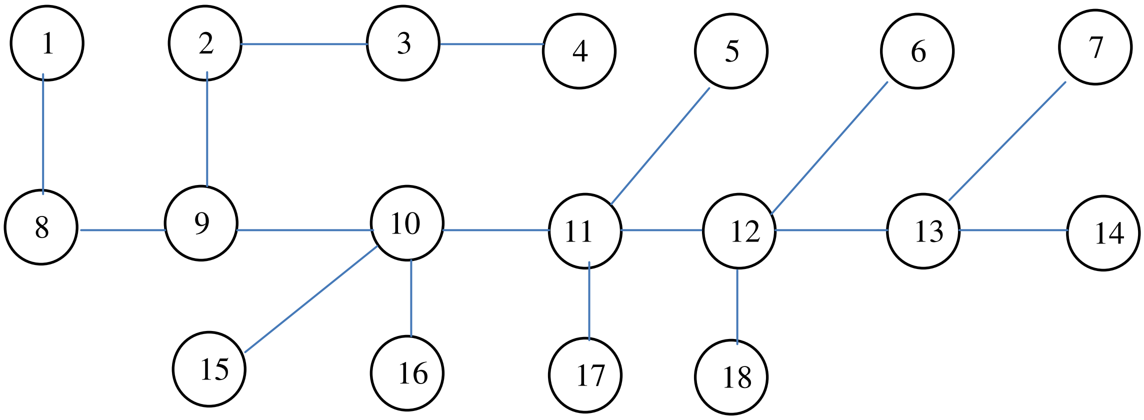
5. Необходимо построить систему нефтепроводов, которые должны соединять семь нефтеочистительных заводов, принадлежащих некоторой компании, с портом П, куда поступает сырая нефть. Известны предполагаемые ежегодные затраты на эксплуатацию нефтепровода между соответствующими пунктами (см. табл.)

	П	1	2	3	4	5	6	7
П	0	5	6	8	2	6	9	10
1	5	0	4	10	5	8	6	10

2	6	4	0	11	8	4	9	10
3	8	10	11	0	10	3	6	7
4	2	5	8	10	0	2	5	9
5	6	8	4	3	2	0	10	5
6	9	6	9	6	5	1	0	8
7	10	10	10	7	9	5	8	0

Найдите систему нефтепроводов, позволяющую осуществлять переброску нефти от порта ко всем заводам с минимальными годовыми эксплуатационными затратами.

6. Составьте код Прюфера для дерева



7. Постройте дерево, для которого код Прюфера имеет вид (3,3,7,4,6,5,2,9,5,3,6)

8. Постройте ордерево, назначив в дереве из задания 6 корнем:

a) 10-ю вершину;

b) 11-ю вершину.

Изоморфны ли полученные деревья?

9. Задано ордерево. Выполните следующие задания:

a) представьте в виде упорядоченного дерева, пронумеровав вершины с помощью прямого обхода;

b) составьте код Прюфера для упорядоченного дерева;

c) постройте соответствующее бинарное дерево;

d) является ли построенное бинарное дерево сбалансированным?

3. Связность

Задачи

1. Докажите, что $\lambda(K_n)=n-1$. (где $\lambda(G)$ – число реберной связности)
2. Докажите, что для всякого кубического графа G справедливо $\chi(G)=\lambda(G)$ (где $\chi(G)$ – число вершинной связности).
3. Докажите, что кубический двудольный граф не имеет мостов.
4. Пусть $|G|\geq 4$ и G – минимально 2-связный граф, т.е. такой, который перестает быть 2-связным при удалении любого ребра. Покажите, что G не содержит треугольников.
5. Покажите, что в минимально 2-связном графе любая вершина смежна с вершиной степени 2.
6. Какое наибольшее число точек сочленения может быть в графе порядка n?

4. Планарные графы

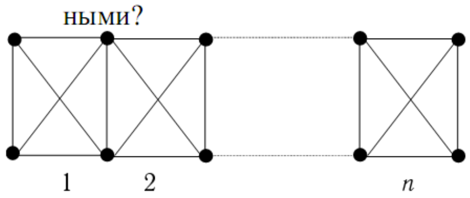
Задачи

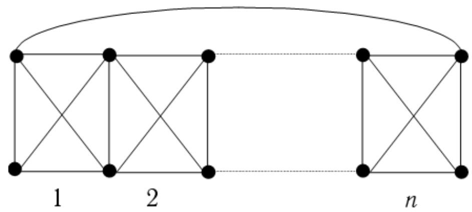
1. Доказать, что K_5 непланарен.

▸ Действительно, для графа K_5 n=5, m=10. Поэтому неравенство $3n–6≥m$ превращается в неверное $9≥10$, т.е. граф K_5 не может быть планарен. ◂

2. Доказать, что $K_{3,3}$ непланарен.

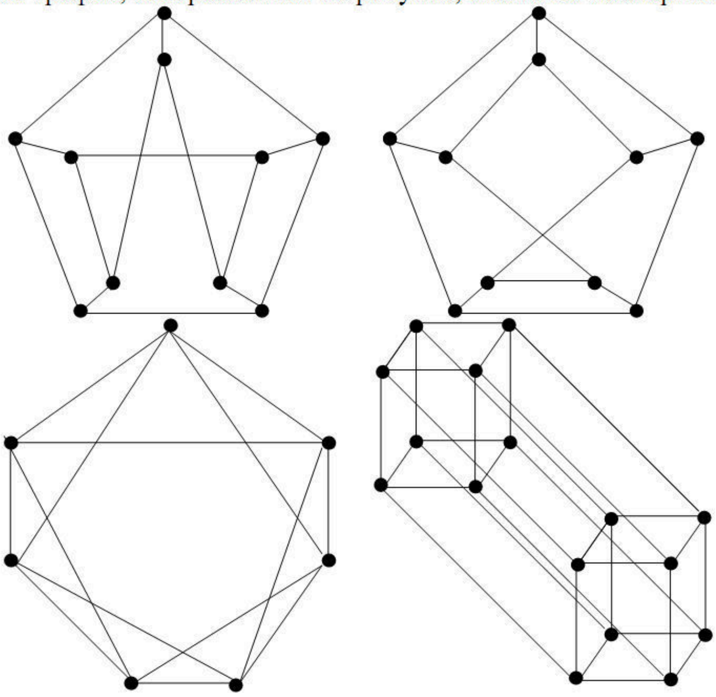
3. Покажите, что формула Эйлера следующим образом обобщается на случай несвязного плоского (n, m)- графа: $n–m+f=k+1$, где k – число компонент связности графа.
4. Для всякого связного планарного (n, m)- графа с $n≥3$, обхват которого равен $h≥3$, верно неравенство $m(h–2)≤h(n–2)$. Используя это соотношение, докажите что граф Петерсена непланарен.
5. Доказать непланарность графа Петерсена, пользуясь теоремой Понтрягина-Куратовского.
6. Доказать, что всякий плоский граф является остовным подграфом некоторой плоской триангуляции.
7. Доказать, что для всякой плоской триангуляции $m=3n–6$, где n – количество вершин графа, а m – количество его ребер.
8. Доказать, что если число вершин плоской триангуляции не меньше четырех, то степень каждой вершины не менее трех.
9. Докажите, что для связного плоского (n, m)-графа с $n≥3$, грани которого не являются треугольниками, верно неравенство $m≤2n–4$.
10. Покажите, что всякая плоская триангуляция с $n≥3$ вершинами имеет ровно $2n–4$ грани.
11. Доказать, что всякий планарный граф с $n≥4$ вершинами имеет по крайней мере 4 вершины со степенями, не превосходящими 5.
12. При каких n графы порядка $2n$, изображенные на рисунке, являются планарными?





13. Докажите, что не существует плоского графа с пятью гранями, обладающего тем свойством, что любые две его грани имеют общее ребро.
14. Пусть G граф с n вершинами, причем $3<n<8$, и $\overline{G}$ – его дополнительный граф, тогда, по крайней мере, один из них планарен.
15. Пусть G граф с n вершинами, причем $n>11$, и $\overline{G}$ – его дополнительный граф, тогда, по крайней мере, один из них непланарен.

16. Какие из графов, изображенных на рисунке, являются планарными?



5. Обходы графов

Задачи

1. Доказать, что связный граф имеет эйлерову цепь тогда и только тогда, когда в нем ровно две вершины нечетной степени.
2. Доказать, что граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда каждый его блок эйлеров.
3. Докажите, что эйлеров граф является объединением реберно-непересекающихся простых циклов.
4. Пусть G – дерево. Когда граф G^2 эйлеров?
5. Покажите, что граф Петерсена не гамильтонов.
6. Найти решение задачи Гамильтона о кругосветном путешествии.
7. Привести примеры графов, в которых:
   1) есть гамильтонов цикл, но нет эйлерова цикла;
   1) есть эйлеров цикл, но нет гамильтонова цикла;
   1) есть и эйлеров, и гамильтонов цикла;
   1) нет ни эйлерова, ни гамильтонова цикла.
8. Доказать, что граф, обладающий гамильтоновым циклом, не имеет точек со-членения.

«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. академика С.П. Королева
(национально исследовательский университет)» (СГАУ)

Факультет информатики
кафедра «Прикладная математика»

Индивидуальные задания по дисциплине
ТЕОРИЯ ГРАФОВ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ
для специальности «Информационная безопасность автоматизированных систем»

Составитель Додонова Н.Л.

Самара 2013

Домашнее задание № 1
ГРАФЫ. НАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ

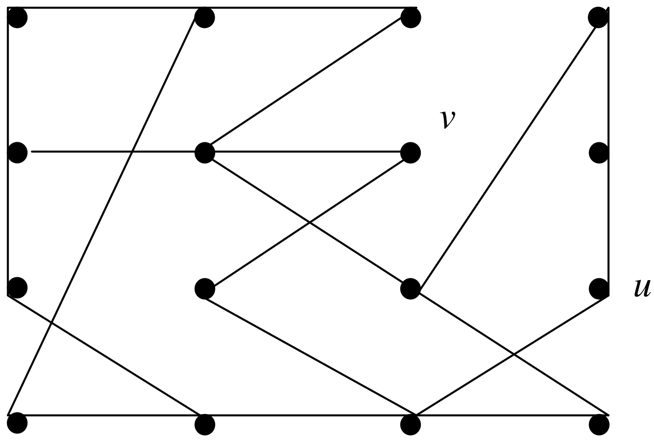
Цель работы – закрепление основных понятий теории графов.
Задачи: усвоить простейшие понятия теории графов,
отработать навыки выполнения операций над графами;
использовать в расчетах программные средства.

Задание 1. Изобразить: граф, содержащий 10 вершин и 20 ребер; псевдограф, содержащий 10 вершин и 20 ребер; мультиграф, содержащий 10 вершин и 20 ребер. Найти матрицы смежности и инцидентности для построенных графов.
Задание 2. Пометить графы G_1, G_2 (см. рис.)

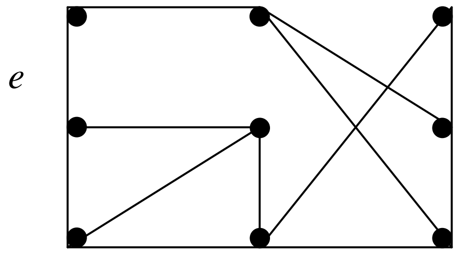
В графе G_1 указать: часть графа, нетривиальный подграф G_1', двудольный подграф G_1'', правильный подграф, суграф.
Задание 3. Выполнить операции над графами:

1) объединение $G_1' \cup G_1''$ (см. задание 2);
2) удаление вершины $G_1 - v$;
3) удаление ребра $G_2 - e$;
4) добавление ребра $G_1 + e$;
5) добавление вершины $G_2 + v_0$;
6) выберите в графе G_1 правильный подграф F, содержащий вершины *u* и *v*, постройте дополнение $\overline{F}$;
7) выполните операцию стягивания графа G_1 к подграфу F
10) выберите в графе G_2 подграф G_2', найдите сумму и произведение графов G_1' и G_2'.

Вариант 1

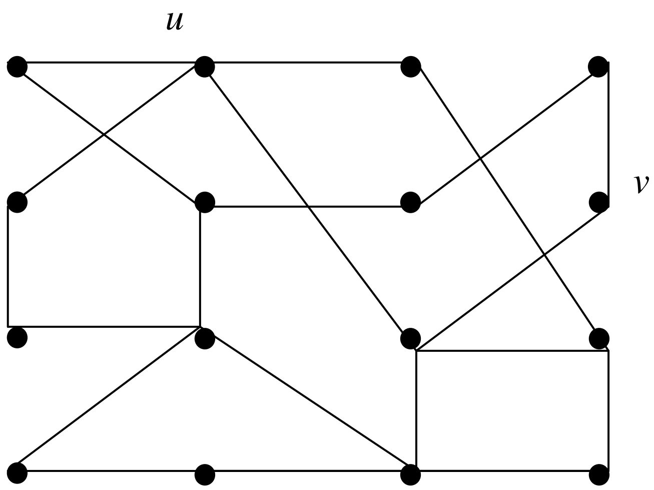


G_1

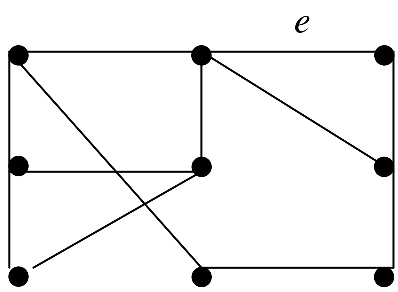


G_2

Вариант 2

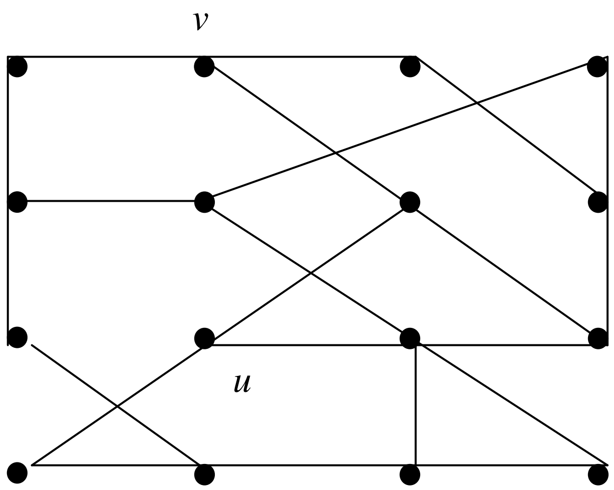


G_1

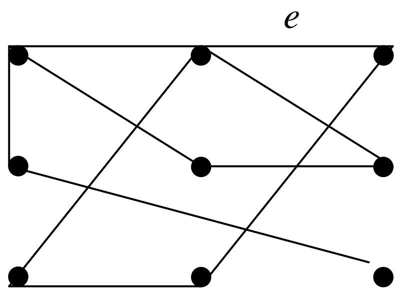


G_2

Вариант 3

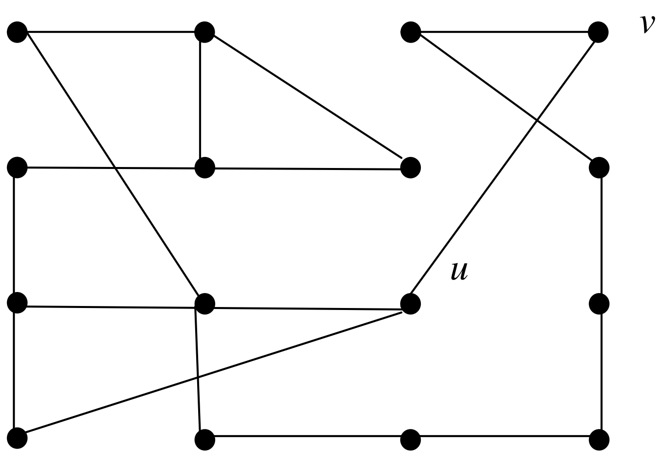


G_1

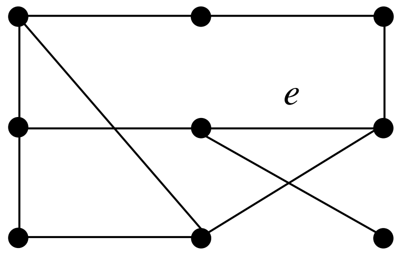


G_2

Вариант 4

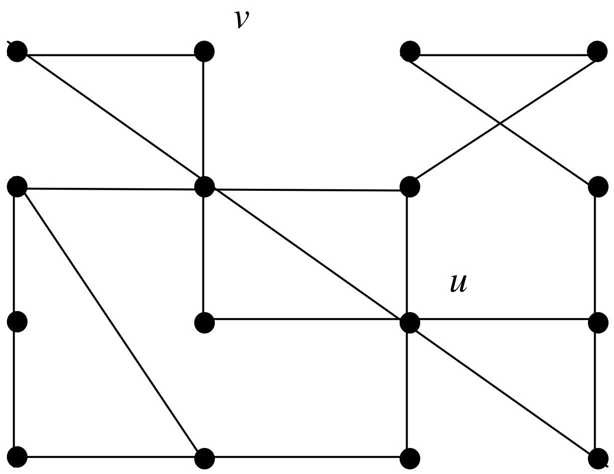


G_1

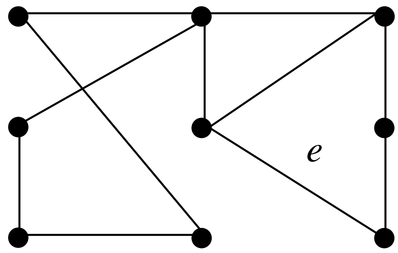


G_2

Вариант 5

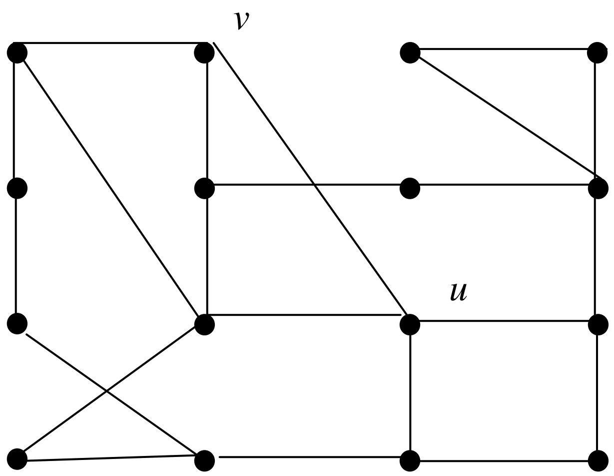


G_1

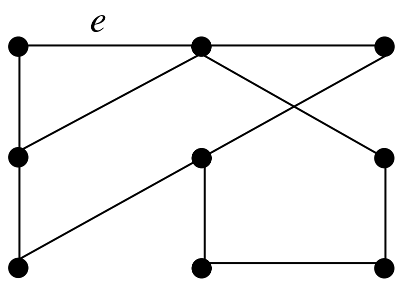


G_2

Вариант 6

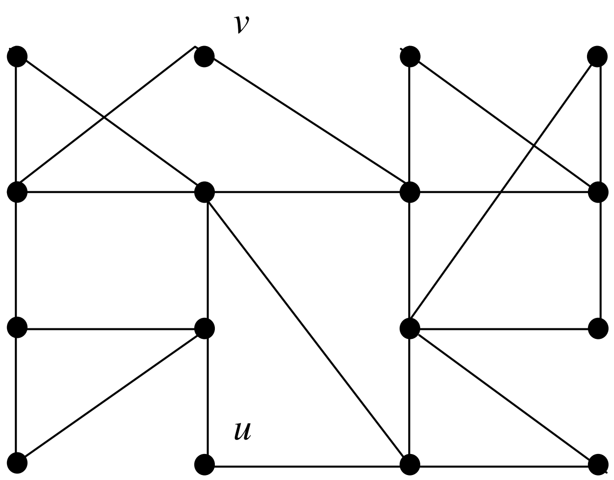


G_1

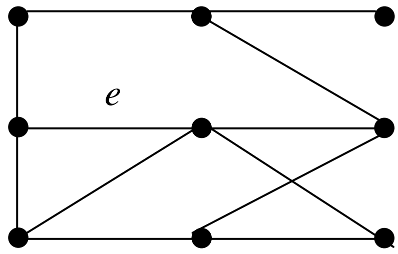


G_2

Вариант 7

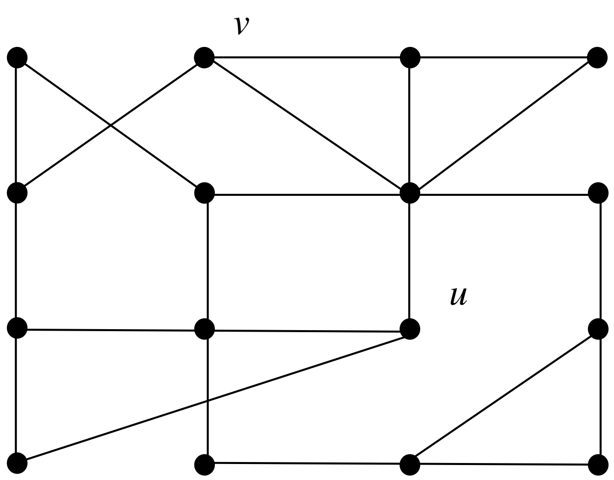


G_1

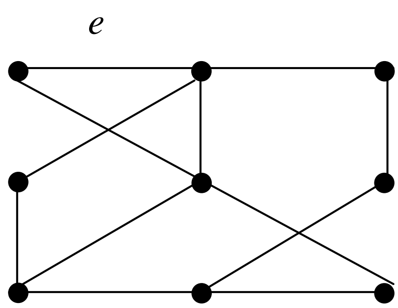


G_2

Вариант 8

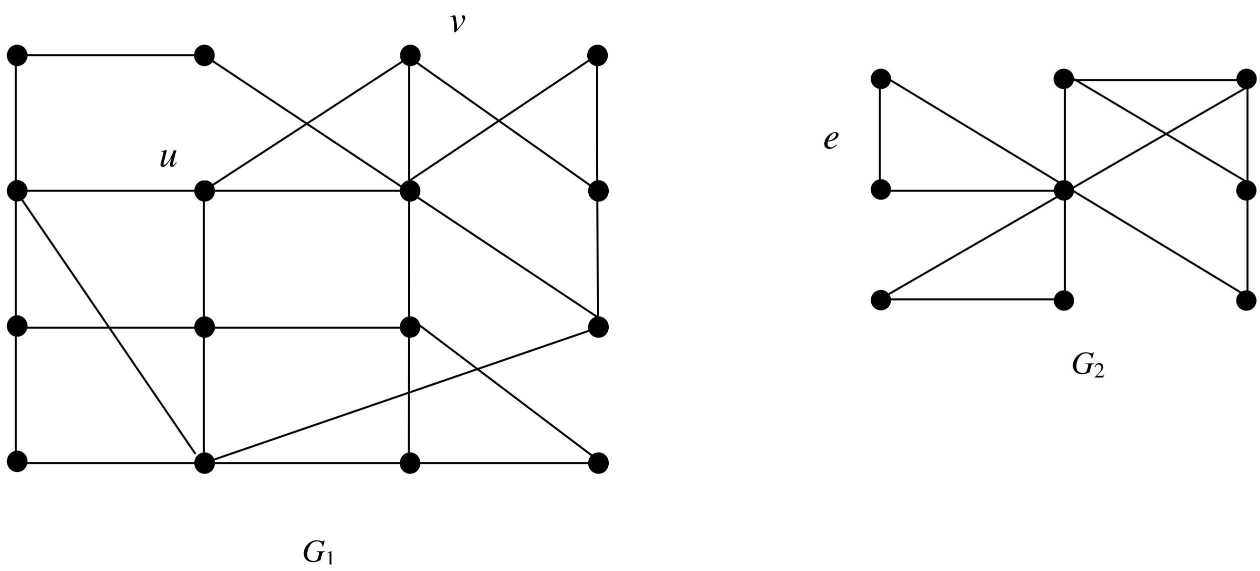


G_1

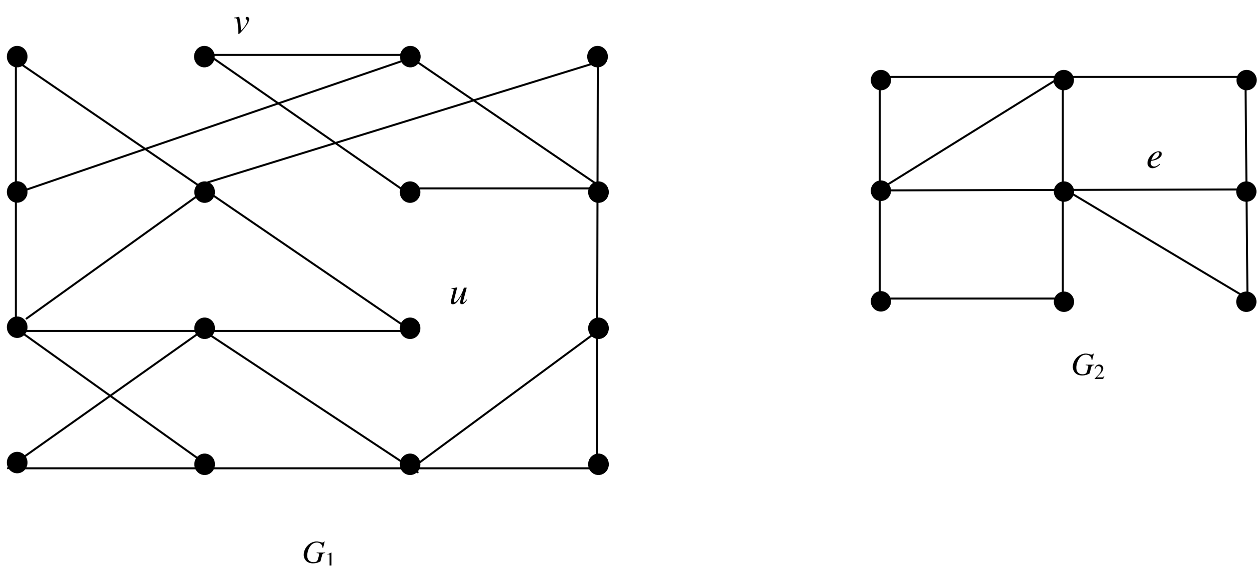


G_2

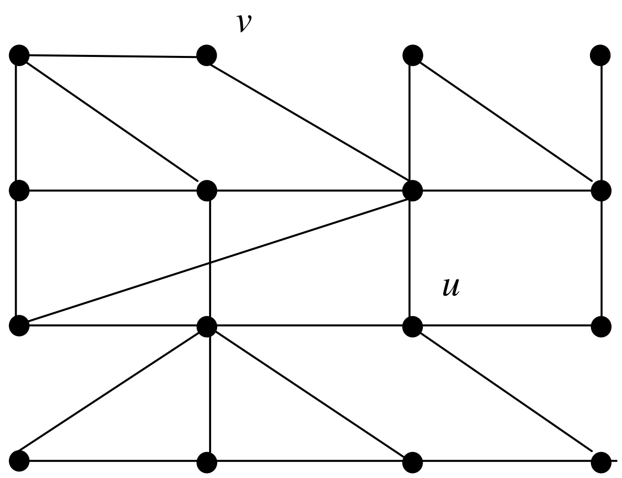
Вариант 9



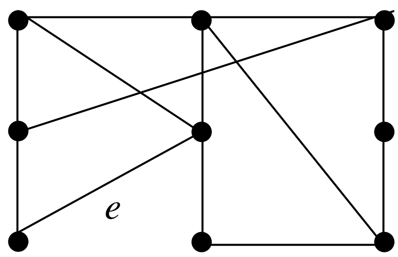
Вариант 10



Вариант 11

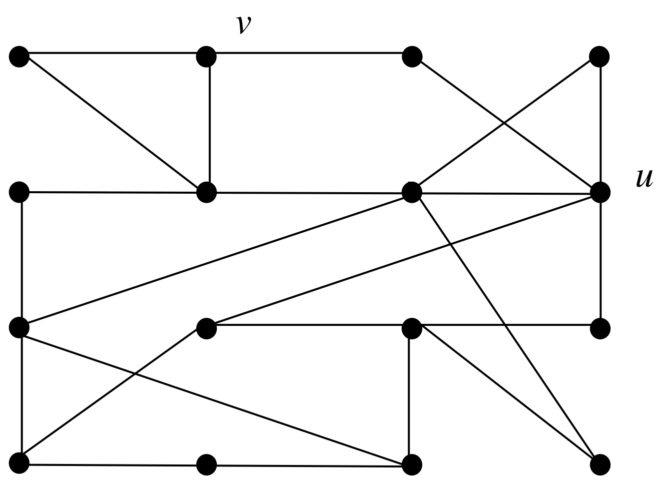


G_1

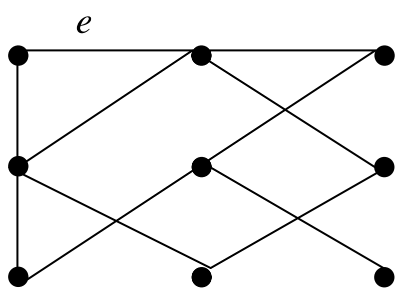


G_2

Вариант 12

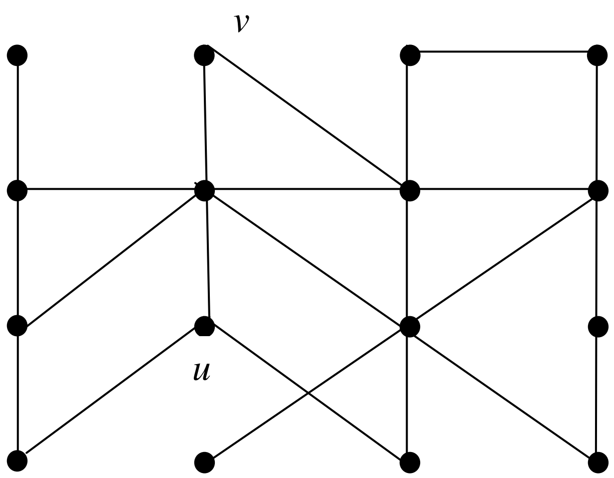


G_1

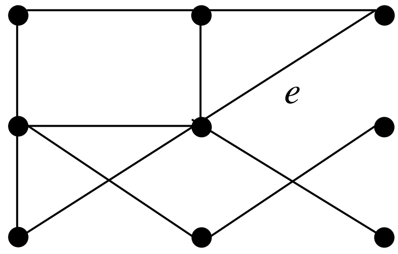


G_2

Вариант 13

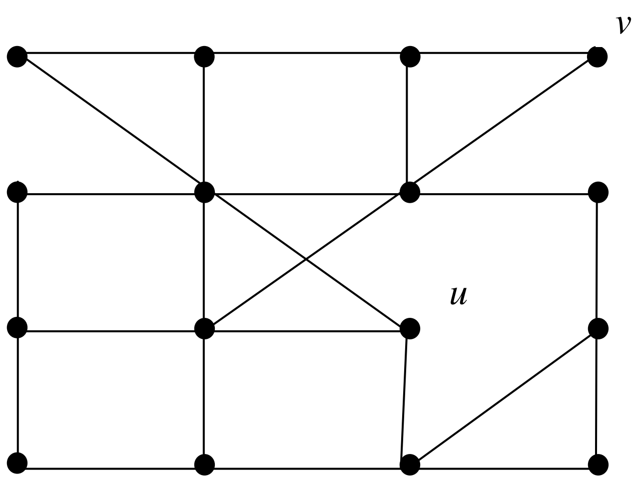


G_1

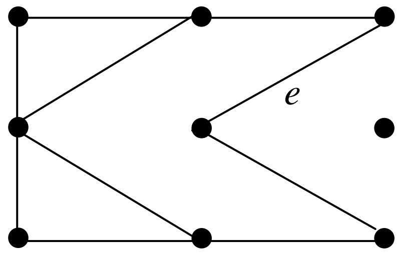


G_2

Вариант 14

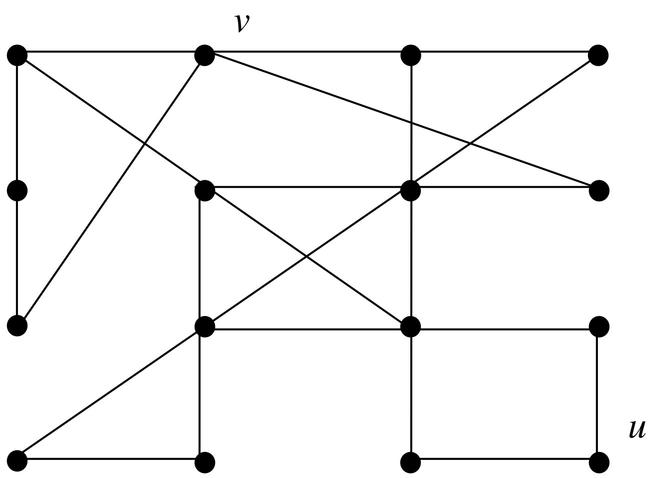


G_1

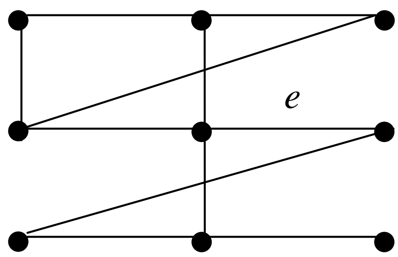


G_2

Вариант 15

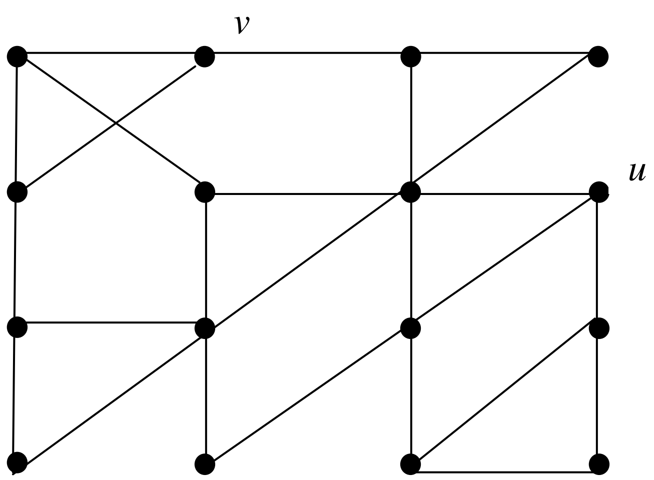


G_1

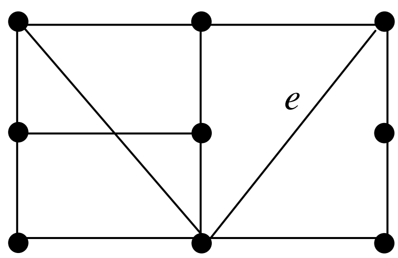


G_2

Вариант 16

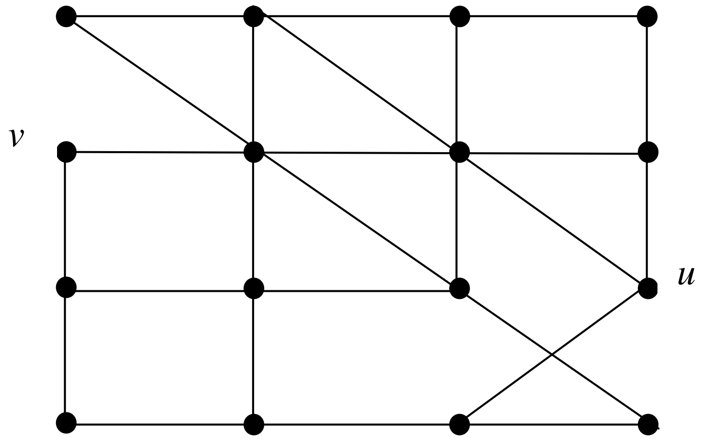


G_1

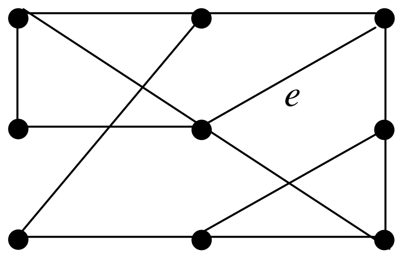


G_2

Вариант 17

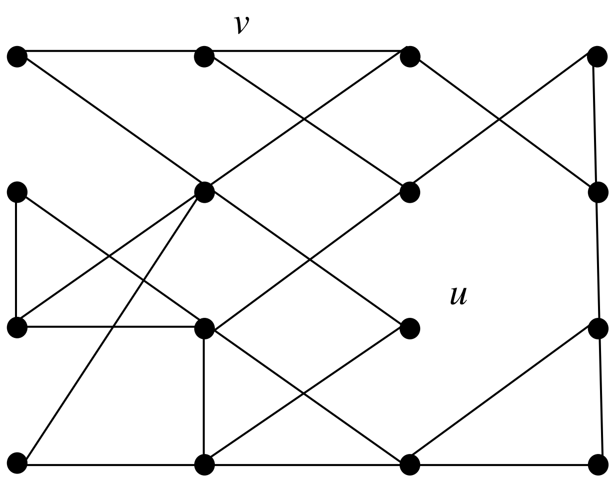


G_1

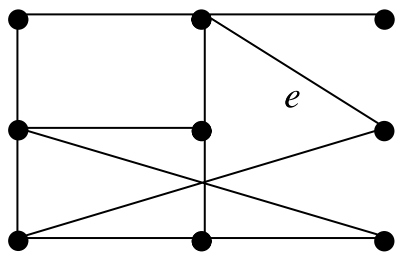


G_2

Вариант 18

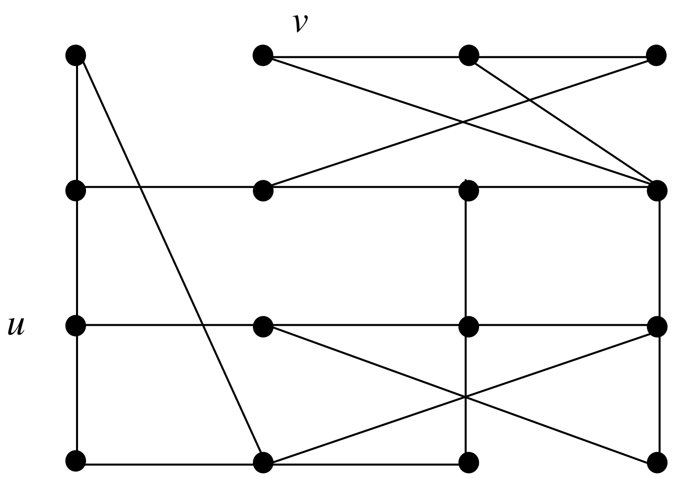


G_1

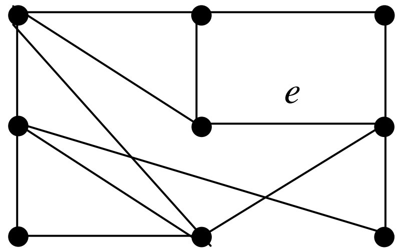


G_2

Вариант 19

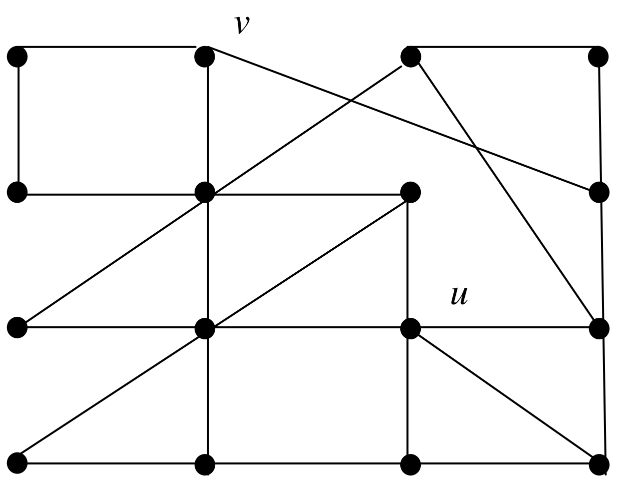


G_1

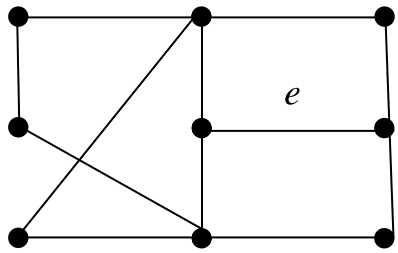


G_2

Вариант 20



G_1



G_2

«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. академика С.П. Королева
(национально исследовательский университет)» (СГАУ)

Факультет информатики
кафедра «Прикладная математика»

Индивидуальные задания по дисциплине
ТЕОРИЯ КОНЕЧНЫХ ГРАФОВ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Составитель Додонова Н.Л

Самара 2013

Домашнее задание № 2
КРАТЧАЙШИЕ МАРШРУТЫ

Цель работы – закрепление основных понятий теории графов.

Задачи: усвоить понятия маршрута, цепи, цикла, радиуса графа, диаметра графа;

усвоить работу алгоритмов определения кратчайших маршрутов в графах,

отработать навыки работы с волновым алгоритмом, алгоритмами Дейкстры и Белмана-Мура;

использовать в расчетах программные средства.

Задание 1.

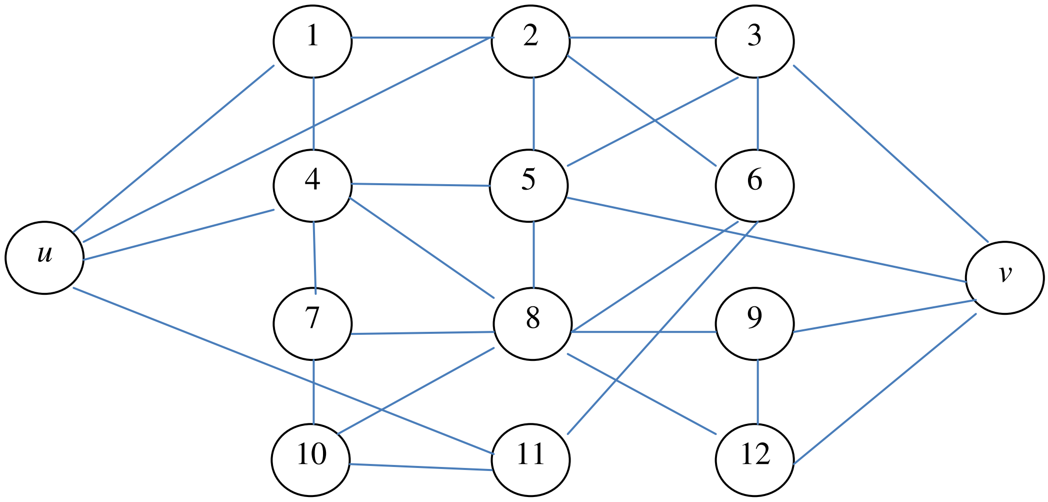
1) В графе указать: маршрут, но не цепь; цепь, но не простую; простую цепь; цикл, но не простой; простой цикл.
2) Определить: диаметральную цепь, длину диаметра; радиус; центр графа; периферийные вершины.
3) Выбрать правильный подграф *F*, содержащий вершины 1-9. В графе *F* найти число всех маршрутов длины 3.
4) Ориентировать граф *F* произвольным образом, найти число всех маршрутов длины 4.
5) С помощью волнового алгоритма в исходном графе определить кратчайшие расстояния (по количеству ребер) от вершин *u* и *v*, до остальных вершин графа.

Задание 2. По заданной матрице весов графа *G* найти путь от вершины x_1 до вершины x_6 минимального веса. Вычислить вес пути.

Задание 3. По заданной матрице весов графа *G* найти путь от вершины x_1 до вершины x_6 (x_7) минимального веса с помощью алгоритма Белламана-Мура. Вычислить вес пути.

Вариант 1

Задание 1.



Задание 2.

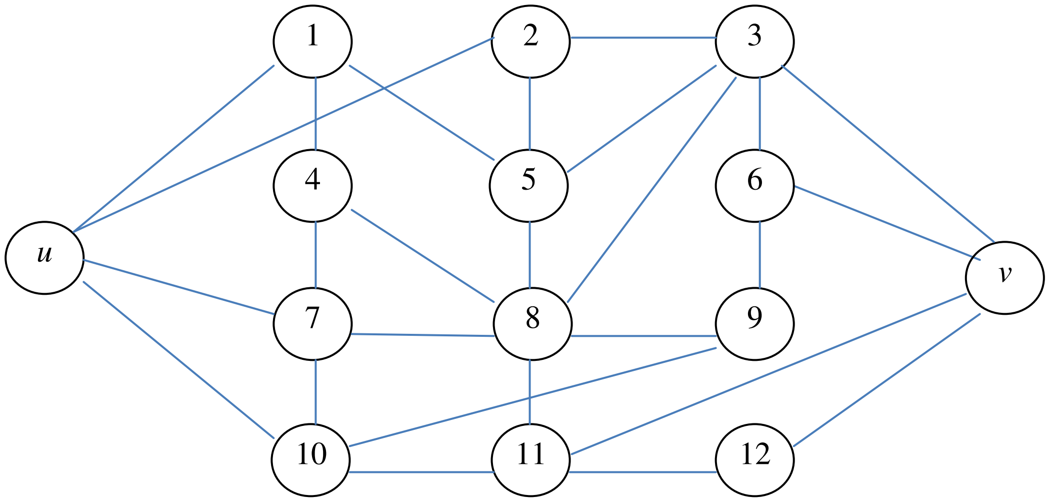
$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 7 & 2 & \infty & 13 & \infty \\ \infty & - & \infty & \infty & 6 & \infty \\ \infty & 2 & - & 1 & 3 & 11 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 3 & - & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

Задание 3.

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 6 & 11 & 5 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 6 & 7 & 6 \\ \infty & -5 & - & \infty & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & -4 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

Вариант 2

Задание 1.



Задание 2.

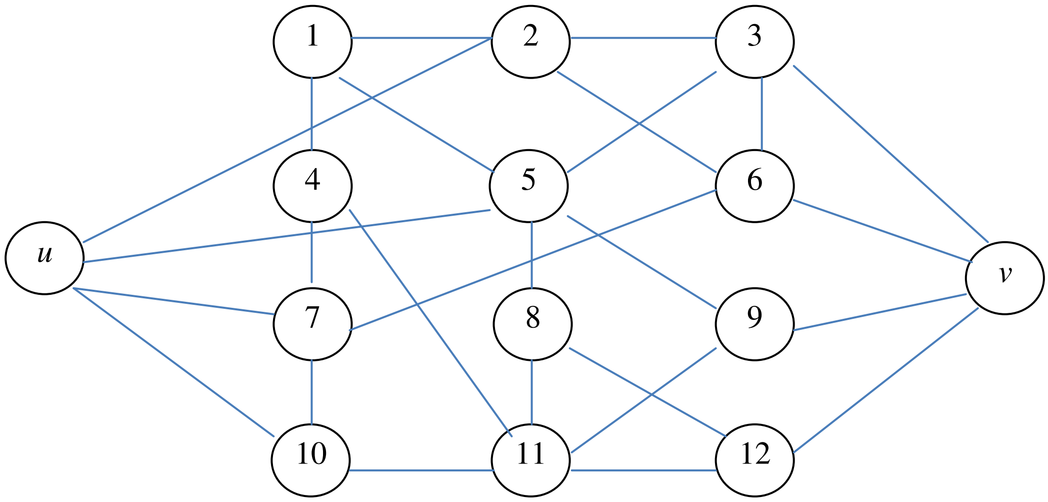
$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\
\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
- & 11 & \infty & 14 & 15 & \infty \\
\infty & - & 13 & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & - & \infty & \infty & 13 \\
\infty & 7 & 11 & - & 9 & \infty \\
\infty & 11 & 10 & \infty & - & 14 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & -
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Задание 3.

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\
\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
- & 7 & \infty & -8 & \infty & \infty \\
\infty & - & 13 & -9 & 10 & \infty \\
\infty & \infty & - & 3 & -4 & -2 \\
\infty & \infty & \infty & - & 9 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & - & 8 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & -
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Вариант 3

Задание 1.



Задание 2.

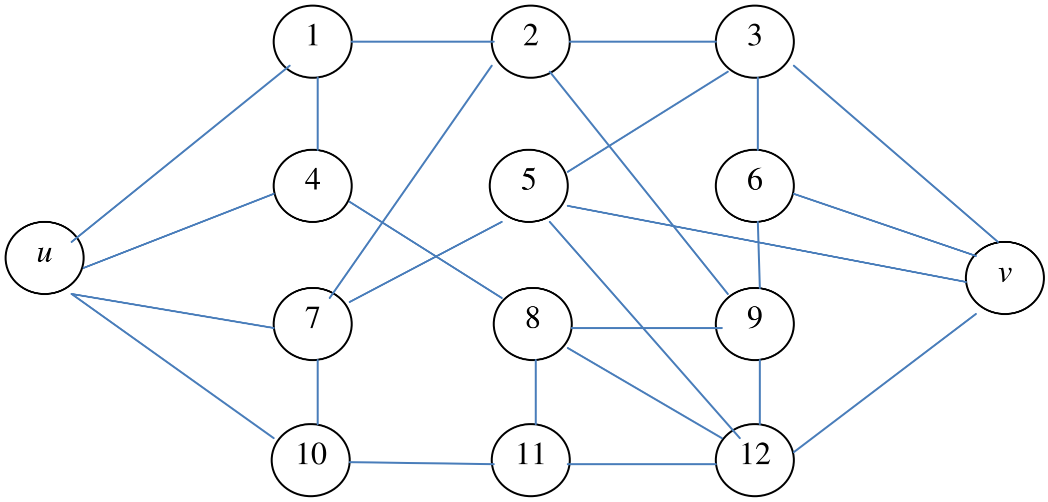
$$\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 5 & 8 & 7 & 18 & \infty \\ x_2 & \infty & - & 11 & \infty & \infty & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 17 \\ x_4 & \infty & 10 & 12 & - & 6 & \infty \\ x_5 & \infty & 7 & 8 & \infty & - & 11 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

Задание 3.

$$\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 8 & 7 & 11 & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & -10 & 7 & \infty & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & \infty & 6 & \infty \\ x_4 & \infty & \infty & 5 & - & \infty & 8 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & -6 & - & 7 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

Вариант 4

Задание 1.



Задание 2.

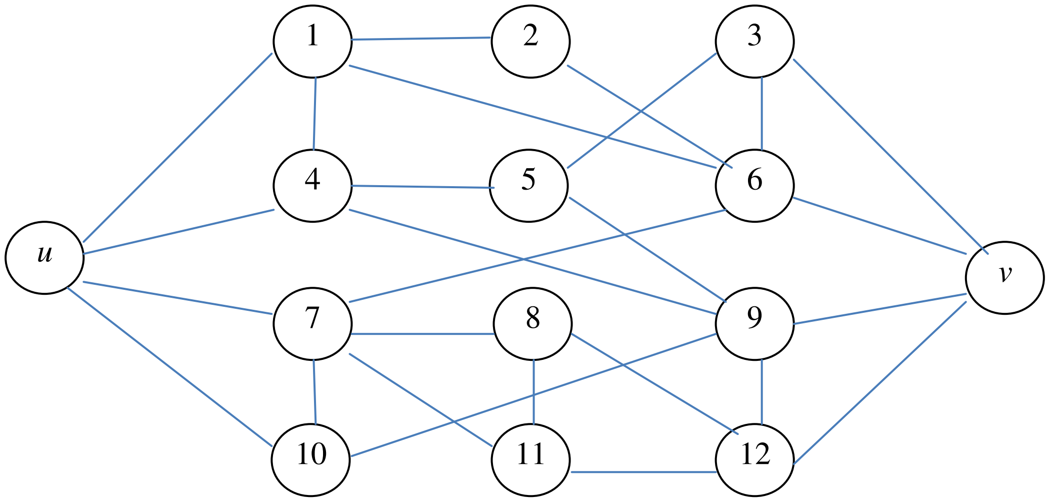
$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 6 & 8 & 11 & 10 & \infty \\ \infty & - & \infty & 9 & 7 & 15 \\ \infty & 8 & - & 7 & 4 & 11 \\ \infty & \infty & \infty & - & 6 & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

Задание 3.

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 6 & 9 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 6 & \infty & \infty \\ \infty & -4 & - & 5 & 8 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & - & -5 & 7 \\ \infty & 2 & \infty & \infty & - & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

Вариант 5

Задание 1.



Задание 2.

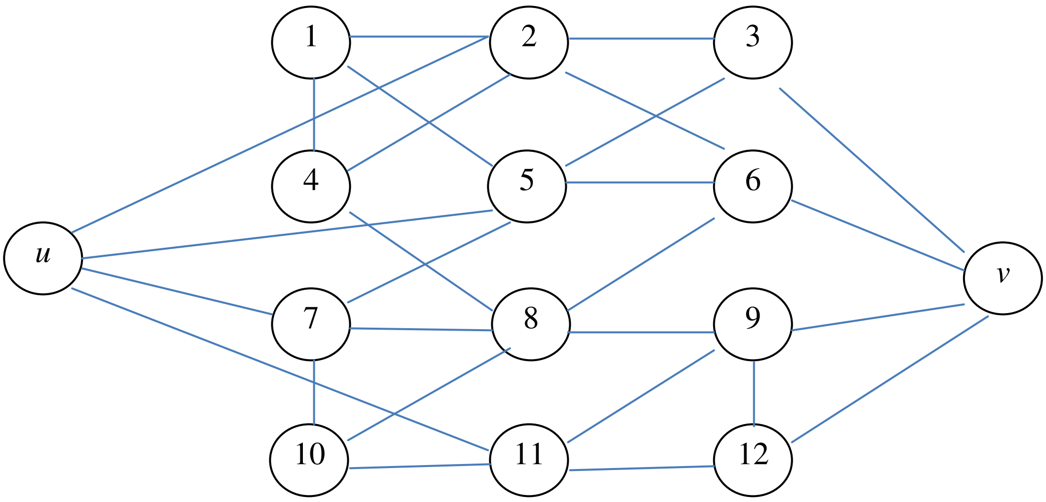
$$
\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
- & 10 & 12 & \infty & \infty & \infty \\
\infty & - & 11 & 9 & \infty & 19 \\
\infty & \infty & - & \infty & 10 & \infty \\
\infty & \infty & 13 & - & 11 & 10 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & -
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Задание 3.

$$
\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
- & 7 & \infty & 6 & \infty & \infty \\
\infty & - & 9 & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & - & \infty & \infty & 8 \\
\infty & -6 & 4 & - & 10 & \infty \\
\infty & 8 & -5 & \infty & - & 6 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & -
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Вариант 6

Задание 1.



Задание 2.

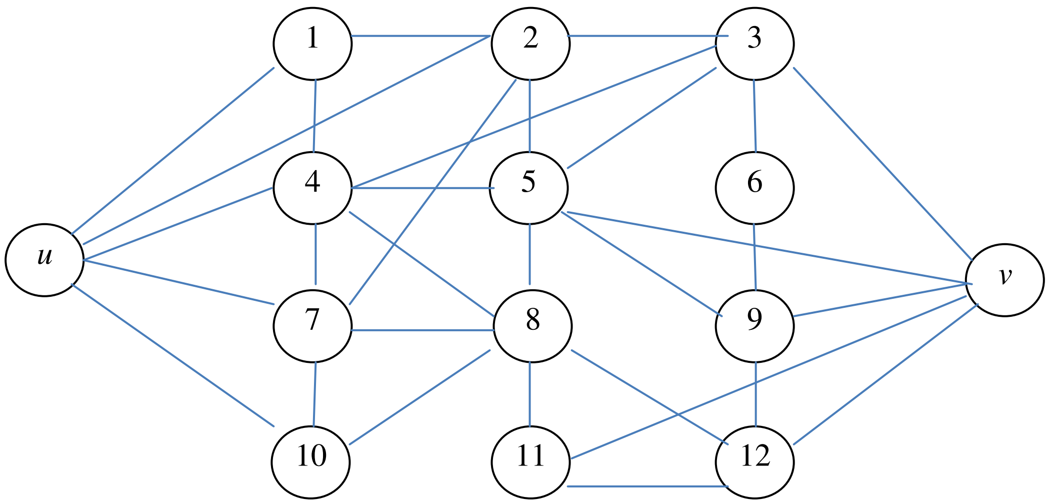
$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 5 & 6 & 9 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 3 & \infty & 14 \\ \infty & 3 & - & 3 & 4 & 16 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 4 \\ \infty & \infty & \infty & 3 & - & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

Задание 3.

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 7 & 5 & \infty & 9 & \infty \\ \infty & - & -8 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & 3 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 8 \\ \infty & \infty & \infty & -4 & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

Вариант 7

Задание 1.



Задание 2.

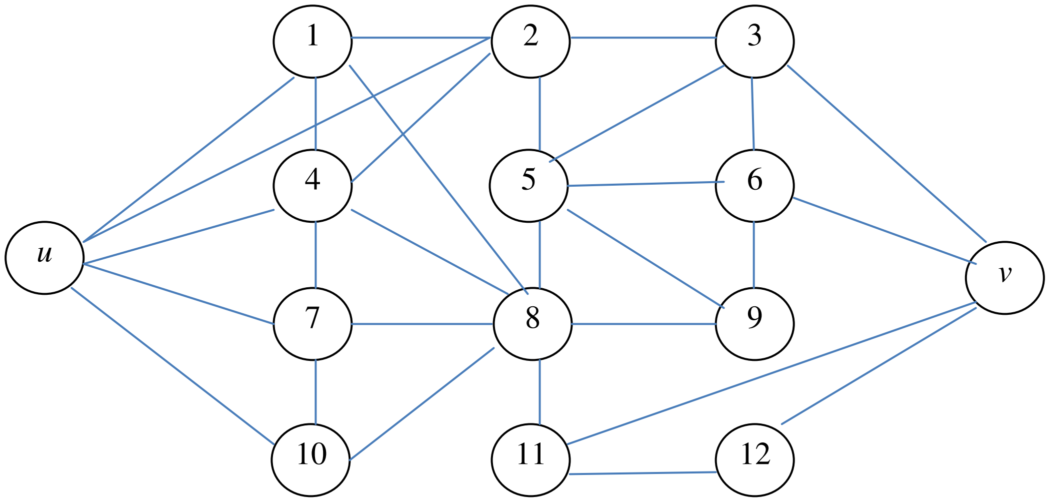
$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 7 & 9 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 6 & \infty & 13 \\ \infty & 6 & - & 5 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 7 \\ \infty & 4 & \infty & 6 & - & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

Задание 3.

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 15 & \infty & 12 & 10 & \infty & \infty \\ \infty & - & 4 & -6 & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & -4 & 2 & -3 \\ \infty & \infty & 10 & - & 7 & \infty & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & -5 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

Вариант 8

Задание 1.



Задание 2.

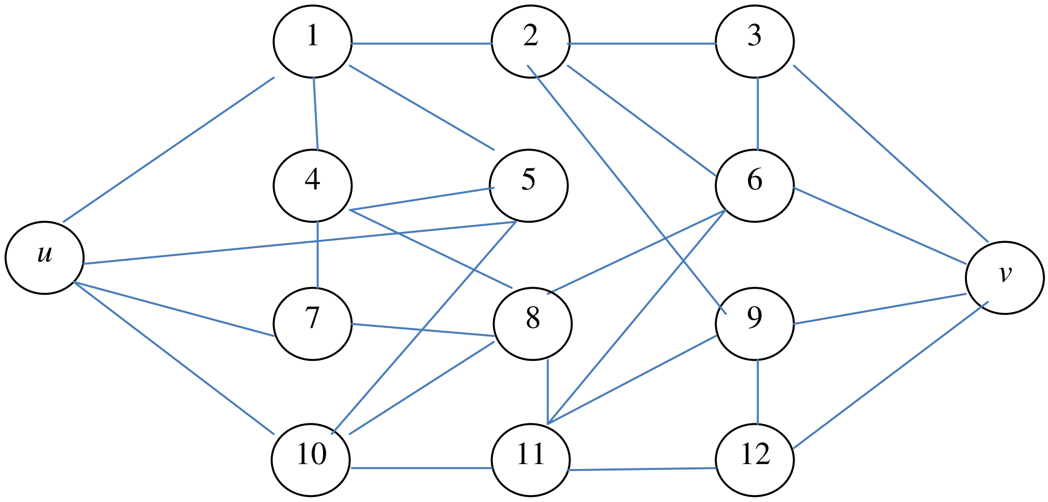
$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 7 & 15 & \infty & 14 & \infty \\ \infty & - & 7 & 16 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & 19 & \infty & 21 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 17 \\ \infty & 13 & 14 & 15 & - & 18 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

Задание 3.

$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 3 & \infty & 7 & \infty & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & 5 & \infty & 5 & 11 & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & -4 & -6 & 5 & \infty \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & 8 & 6 & 4 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 & 10 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & -3 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

Вариант 9

Задание 1



Задание 2.

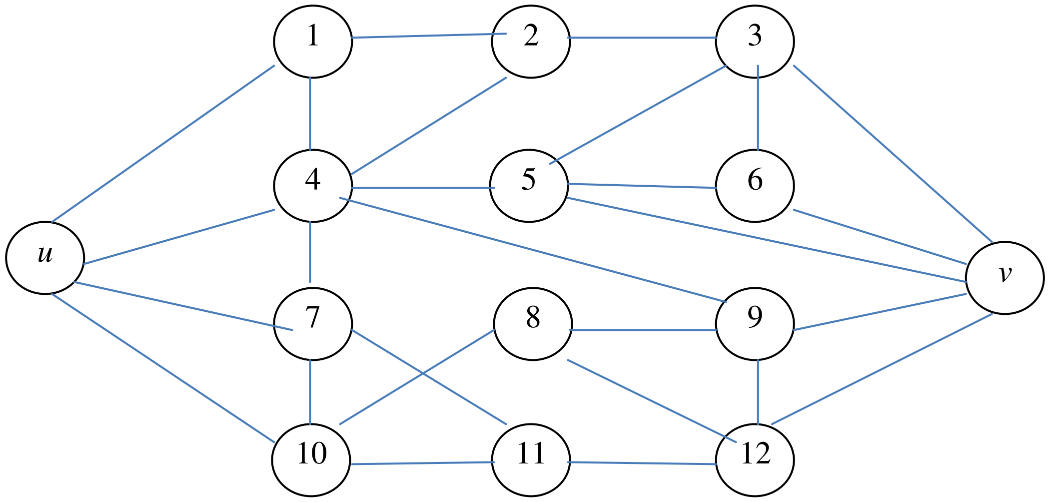
$$
\begin{array}{c}
 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
- & 10 & 11 & 6 & \infty & \infty \\
\infty & - & 13 & 8 & 11 & 17 \\
\infty & \infty & - & 5 & 6 & 15 \\
\infty & \infty & \infty & - & 7 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & - & 9 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & -
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Задание 3.

$$
\begin{array}{c}
 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
- & 2 & \infty & \infty & 4 & \infty & \infty \\
\infty & - & \infty & \infty & \infty & 10 & \infty \\
\infty & 2 & - & 3 & 6 & \infty & \infty \\
\infty & -7 & \infty & - & \infty & \infty & 4 \\
\infty & -4 & \infty & 8 & - & \infty & 11 \\
\infty & \infty & \infty & -3 & -5 & - & 3 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & -
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Вариант 10

Задание 1.



Задание 2.

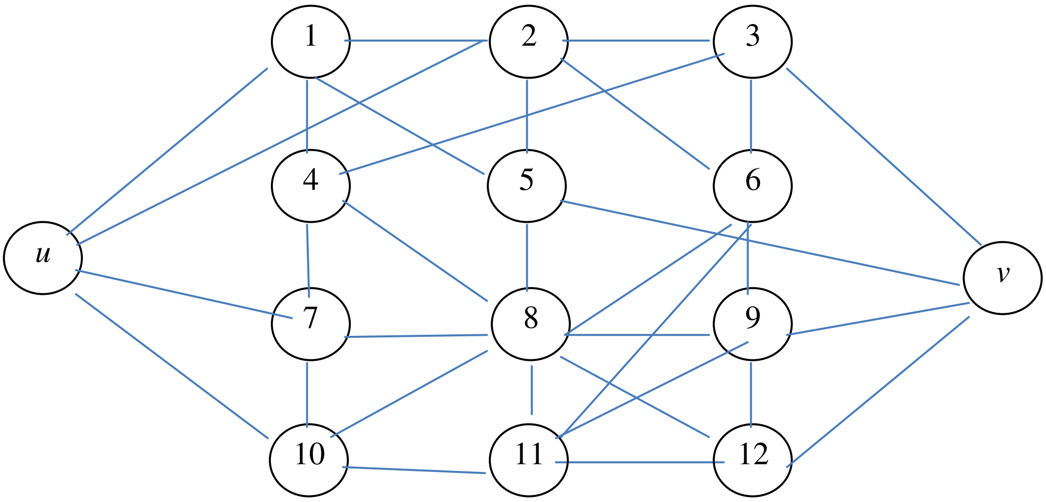
$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
- & \infty & 11 & 15 & 7 & \infty & \infty \\
\infty & - & \infty & \infty & 14 & 18 & \infty \\
\infty & 9 & - & 13 & 7 & 11 & 22 \\
\infty & \infty & \infty & - & \infty & 11 & 16 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & - & 8 & 23 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 19 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & -
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Задание 3.

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
- & 3 & 8 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & - & \infty & 7 & \infty & 10 & \infty \\
\infty & 4 & - & \infty & 7 & 6 & 10 \\
\infty & \infty & -5 & - & \infty & \infty & 4 \\
\infty & -9 & \infty & 12 & - & 6 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & -5 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & -
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Вариант 11

Задание 1.



Задание 2.

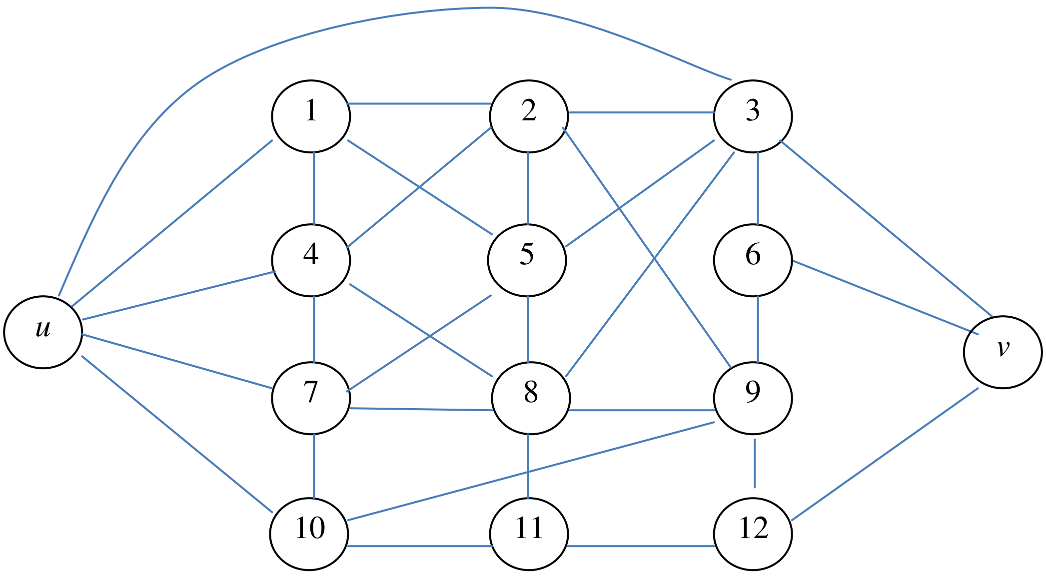
$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 6 & \infty & 9 & 12 & \infty \\ \infty & - & 6 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & \infty & 6 \\ \infty & 4 & 8 & - & 6 & 14 \\ \infty & 7 & 5 & \infty & - & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

Задание 3.

$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & -3 & 7 & \infty & 8 & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & 5 & 11 & \infty & 13 & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & -5 & \infty & \infty & \infty \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & 6 & 4 \\ x_5 & \infty & \infty & 7 & 9 & - & -6 & 12 \\ x_6 & \infty & \infty & 8 & \infty & \infty & - & 5 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

Вариант 12

Задание 1.



Задание 2.

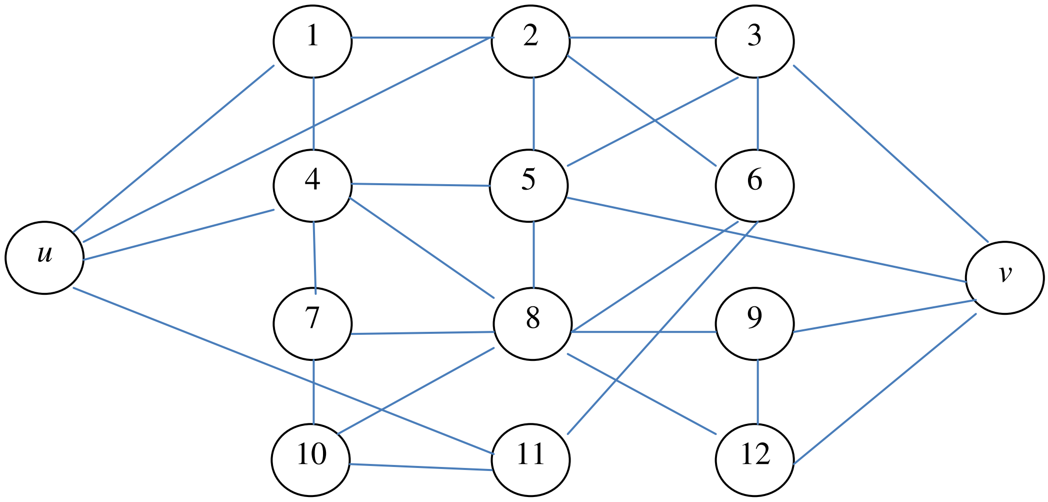
$$\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 4 & 9 & 8 & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & 2 & \infty & \infty & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 3 \\ x_4 & \infty & 2 & 4 & - & 6 & \infty \\ x_5 & \infty & 2 & \infty & \infty & - & 3 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

Задание 3.

$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 4 & 7 & 14 & -6 & 11 & \infty \\ x_2 & \infty & - & -3 & 10 & \infty & \infty & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & \infty & -8 & 7 & 10 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 3 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 5 & \infty \\ x_6 & \infty & 12 & \infty & 5 & \infty & - & 6 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

Вариант 13

Задание 1.



Задание 2.

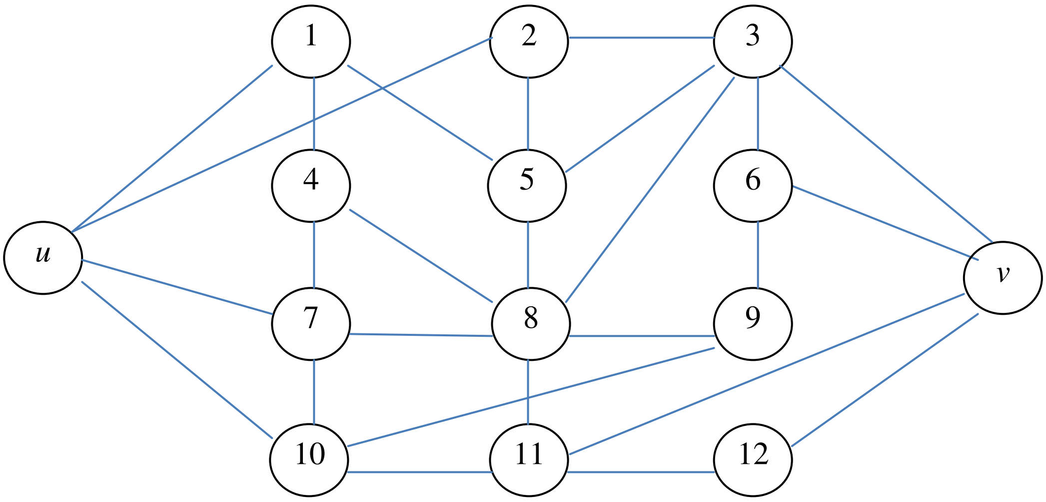
$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\
\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} &
\begin{pmatrix}
- & 7 & 2 & \infty & 13 & \infty \\
\infty & - & \infty & \infty & 6 & \infty \\
\infty & 2 & - & 1 & 3 & 11 \\
\infty & \infty & \infty & - & \infty & 5 \\
\infty & \infty & \infty & 3 & - & 5 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & -
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Задание 3.

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\
\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} &
\begin{pmatrix}
- & 6 & 11 & 5 & \infty & \infty \\
\infty & - & \infty & 6 & 7 & 6 \\
\infty & -5 & - & \infty & 6 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & - & -4 & 5 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & - & 7 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & -
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Вариант 14

Задание 1.



Задание 2.

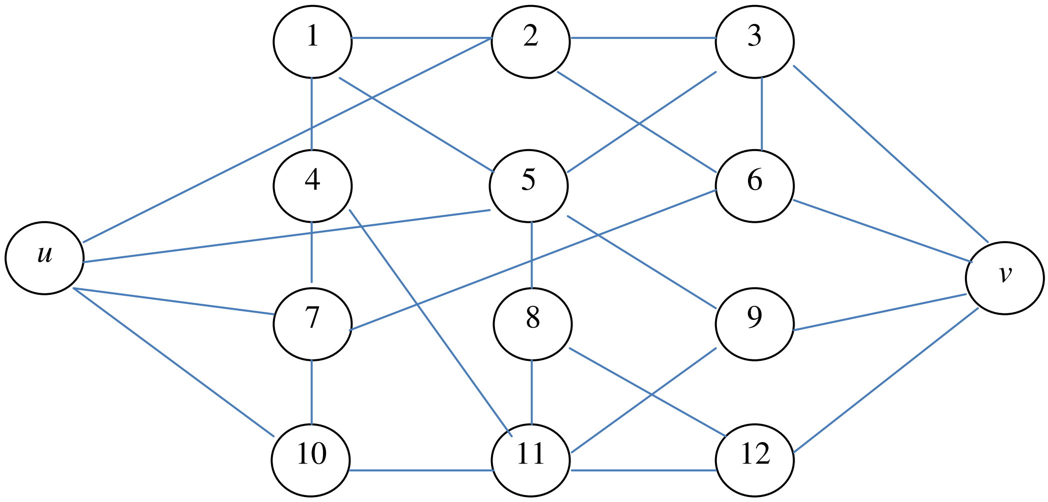
$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 11 & \infty & 14 & 15 & \infty \\ \infty & - & 13 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & \infty & 13 \\ \infty & 7 & 11 & - & 9 & \infty \\ \infty & 11 & 10 & \infty & - & 14 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

Задание 3.

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 7 & \infty & -8 & \infty & \infty \\ \infty & - & 13 & -9 & 10 & \infty \\ \infty & \infty & - & 3 & -4 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & - & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

Вариант 15

Задание 1.



Задание 2.

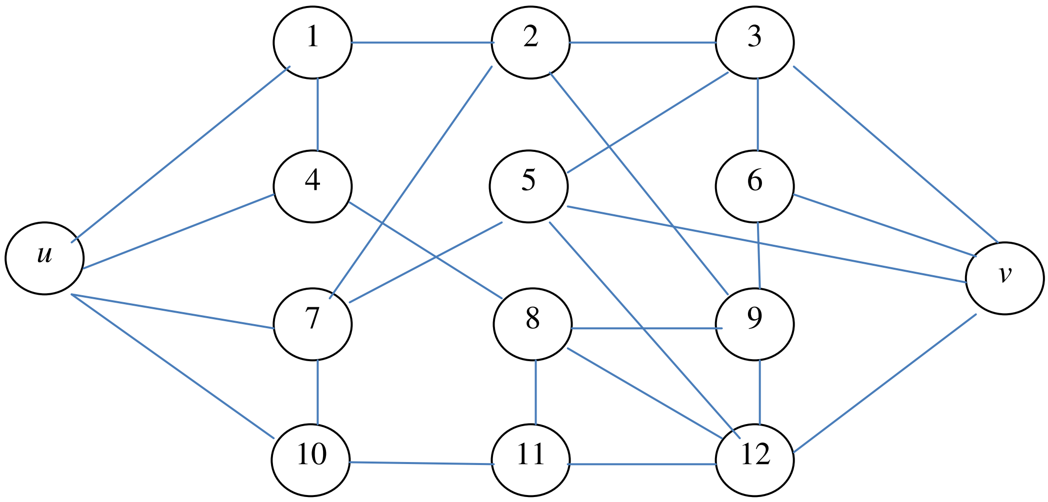
$$
\begin{array}{c}
\\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
- & 5 & 8 & 7 & 18 & \infty \\
\infty & - & 11 & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & - & \infty & \infty & 17 \\
\infty & 10 & 12 & - & 6 & \infty \\
\infty & 7 & 8 & \infty & - & 11 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & -
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Задание 3.

$$
\begin{array}{c}
\\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
- & 8 & 7 & 11 & \infty & \infty \\
\infty & - & -10 & 7 & \infty & \infty \\
\infty & \infty & - & \infty & 6 & \infty \\
\infty & \infty & 5 & - & \infty & 8 \\
\infty & \infty & \infty & -6 & - & 7 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & -
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Вариант 16

Задание 1.



Задание 2.

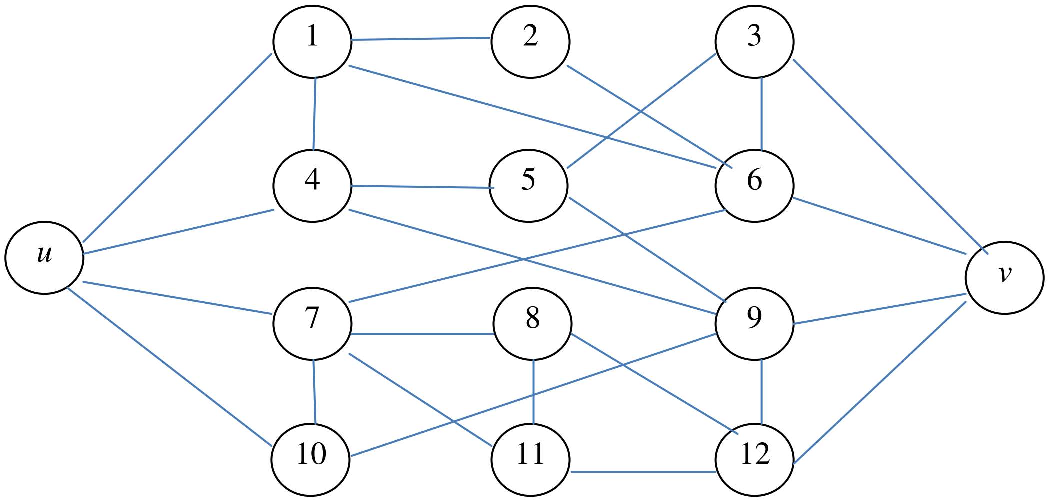
$$
\begin{array}{c}
 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
- & 6 & 8 & 11 & 10 & \infty \\
\infty & - & \infty & 9 & 7 & 15 \\
\infty & 8 & - & 7 & 4 & 11 \\
\infty & \infty & \infty & - & 6 & 7 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & - & 9 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & -
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Задание 3.

$$
\begin{array}{c}
 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
- & 6 & 9 & \infty & \infty & \infty \\
\infty & - & \infty & 6 & \infty & \infty \\
\infty & -4 & - & 5 & 8 & 10 \\
\infty & \infty & \infty & - & -5 & 7 \\
\infty & 2 & \infty & \infty & - & 4 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & -
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Вариант 17

Задание 1.



Задание 2.

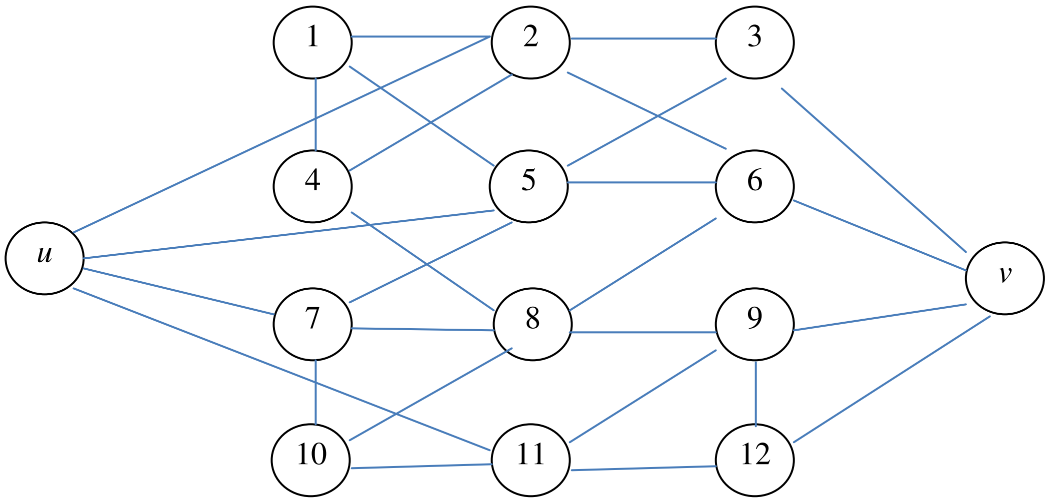
$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 10 & 12 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & 11 & 9 & \infty & 19 \\ \infty & \infty & - & \infty & 10 & \infty \\ \infty & \infty & 13 & - & 11 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

Задание 3.

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 7 & \infty & 6 & \infty & \infty \\ \infty & - & 9 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & \infty & 8 \\ \infty & -6 & 4 & - & 10 & \infty \\ \infty & 8 & -5 & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

Вариант 18

Задание 1.



Задание 2.

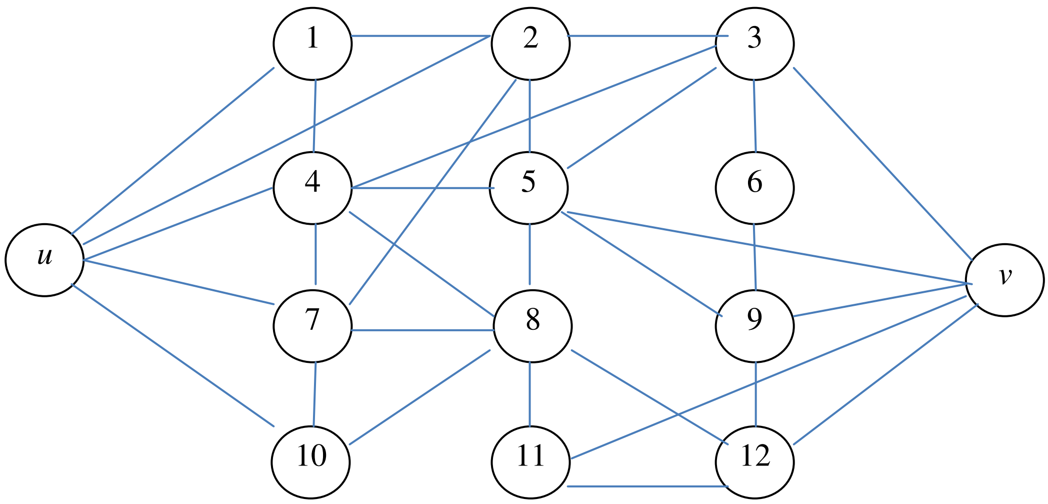
$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 5 & 6 & 9 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 3 & \infty & 14 \\ \infty & 3 & - & 3 & 4 & 16 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 4 \\ \infty & \infty & \infty & 3 & - & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

Задание 3.

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 7 & 5 & \infty & 9 & \infty \\ \infty & - & -8 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & 3 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 8 \\ \infty & \infty & \infty & -4 & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

Вариант 19

Задание 1.



Задание 2.

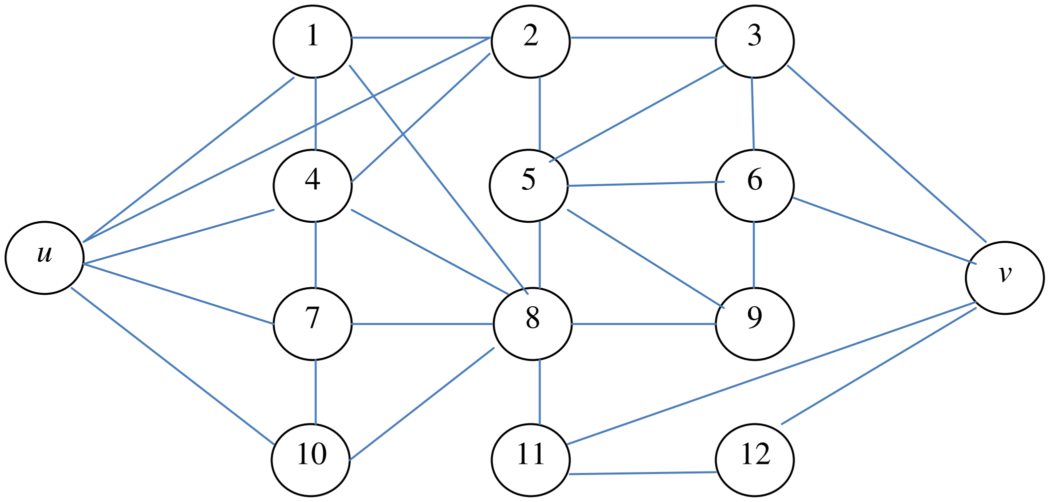
$$\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 7 & 9 & \infty & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & 6 & \infty & 13 \\ x_3 & \infty & 6 & - & 5 & 6 & \infty \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & 7 \\ x_5 & \infty & 4 & \infty & 6 & - & 8 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

Задание 3.

$$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 15 & \infty & 12 & 10 & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & 4 & -6 & 2 & \infty & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & \infty & -4 & 2 & -3 \\ x_4 & \infty & \infty & 10 & - & 7 & \infty & 9 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & -5 & 5 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

Вариант 20

Задание 1.



Задание 2.

$$\begin{array}{c} \\ x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6 \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6\end{array}\\ \begin{pmatrix} - & 7 & 15 & \infty & 14 & \infty\\ \infty & - & 7 & 16 & \infty & \infty\\ \infty & \infty & - & 19 & \infty & 21\\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 17\\ \infty & 13 & 14 & 15 & - & 18\\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}\end{array}$$

Задание 3.

$$\begin{array}{c} \\ x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7\end{array}\\ \begin{pmatrix} - & 3 & \infty & 7 & \infty & \infty & \infty\\ \infty & - & 5 & \infty & 5 & 11 & \infty\\ \infty & \infty & - & -4 & -6 & 5 & \infty\\ \infty & \infty & \infty & - & 8 & 6 & 4\\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 & 10\\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & -3\\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}\end{array}$$

«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. академика С.П. Королева
(национально исследовательский университет)» (СГАУ)

Факультет информатики
кафедра «Прикладная математика»

Индивидуальные задания по дисциплине
ТЕОРИЯ КОНЕЧНЫХ ГРАФОВ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Составитель Додонова Н.Л.

Самара 2013

Домашнее задание № 3
СВЯЗНОСТЬ В ГРАФАХ

Цель работы - закрепление понятия связности в неориентированных и ориентированных графах.

Задачи: усвоить понятия
- компонент связности;
- сильной, односторонней и слабой связности в орграфах;
- вершинной, реберной связности,

Задание 1. Задана матрица смежности графа G_1. Определить число компонент связности. Найти точки сочленения, мосты.

Задание 2. Задана матрица смежности орграфа G_2. Построить транзитивное замыкание графа. Выделить сильные компоненты связности. Определить, является ли граф сильно связным, односторонне связным, слабосвязным.

Задание 3. Задан граф G_3. Определите вершинную $\chi(G_3)$ и реберную $\lambda(G_3)$ связности графа. Найдите наименьшее разделяющее множество для вершин u и v. Постройте граф T таким образом, чтобы $\chi(T)=a$ $\lambda(T)=b$.

Задание 4. Задан граф G_4 своей матрицей смежности.
Найдите наибольшее независимое множество, наименьшее доминирующее множество в графе.
Определите плотность и неплотность графа.

Задание 5. Задан граф G_5 своей матрицей смежности.
Найдите все максимальные клики в графе, определите его плотность.

ВАРИАНТ 1

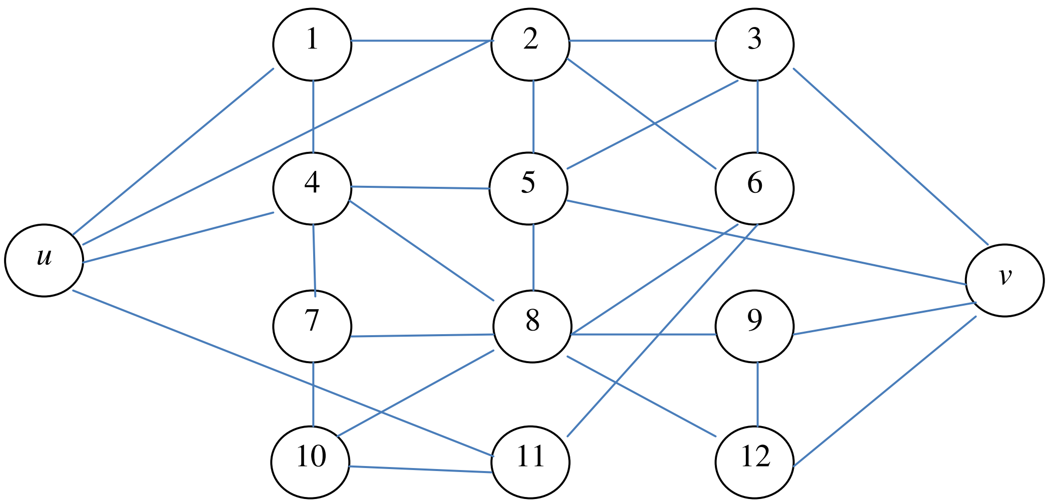
Задание 1.

$$\begin{pmatrix}
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
&0&0&0&1&1&0&0&1&0&0&0&1&0\\
&&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
&&&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
&&&&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
&&&&&0&0&1&0&0&0&0&0&1\\
&&&&&&0&0&0&0&1&0&0&0\\
&&&&&&&0&0&0&0&0&0&1\\
&&&&&&&&0&1&0&1&1&0\\
&&&&&&&&&0&0&1&0&0\\
&&&&&&&&&&0&0&0&0\\
&&&&&&&&&&&0&0&0\\
&&&&&&&&&&&&0&0\\
&&&&&&&&&&&&&0
\end{pmatrix}$$

Задание 2

$$\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}$$

Задание 3.



Задание 4.

$$\begin{pmatrix}
0&1&0&0&0&0\\
1&0&1&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0\\
0&1&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1
\end{pmatrix}$$

Задание 5.

$$\begin{pmatrix}
0&1&1&0&0&0&1&1\\
&0&1&0&0&0&1&1\\
&&0&1&0&1&1&1\\
&&&0&1&1&1&0\\
&&&&0&1&0&0\\
&&&&&0&1&0\\
&&&&&&0&1\\
&&&&&&&0
\end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ 2

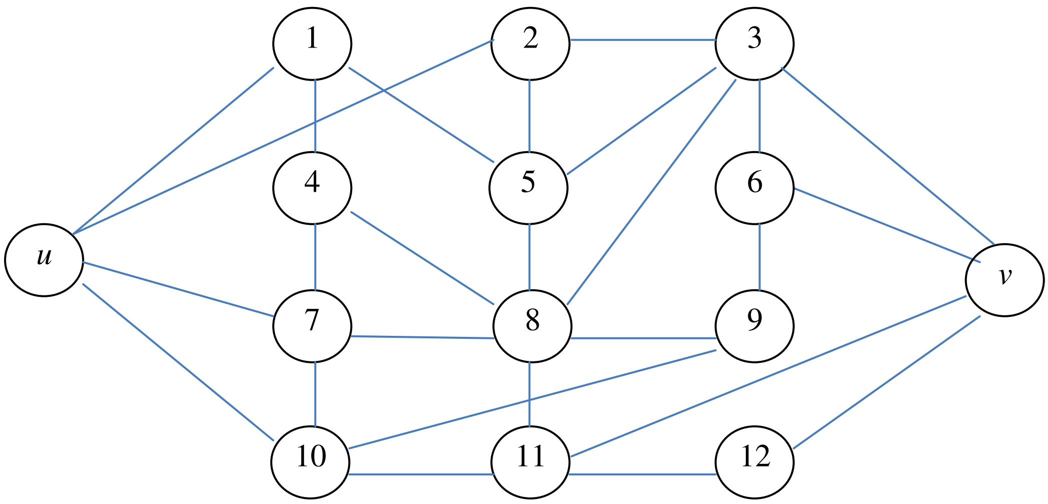
Задание 1.

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & & & & & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

Задание 2

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Задание 3.



Задание 4.

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

Задание 5.

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ 3

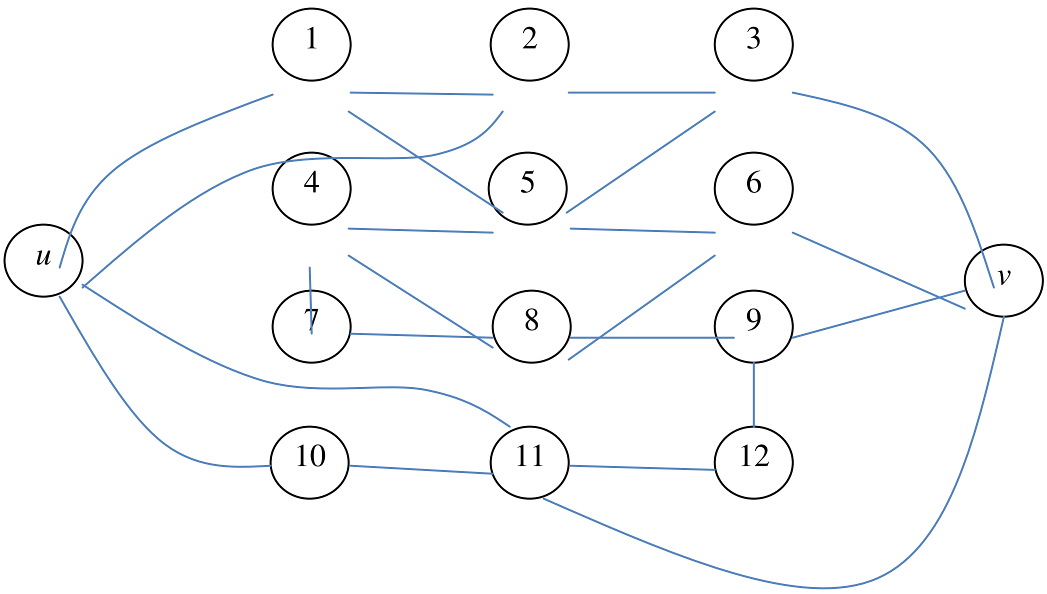
Задание 1.

$$\begin{pmatrix}
0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0\\
&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0\\
&&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1\\
&&&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0\\
&&&&0&0&0&0&1&0&1&1&0&1\\
&&&&&0&0&1&0&1&0&0&0&0\\
&&&&&&0&0&0&0&0&0&1&0\\
&&&&&&&0&0&1&0&1&0&1\\
&&&&&&&&0&0&0&1&0&1\\
&&&&&&&&&0&0&0&0&0\\
&&&&&&&&&&0&1&0&0\\
&&&&&&&&&&&0&0&0\\
&&&&&&&&&&&&0&0\\
&&&&&&&&&&&&&0
\end{pmatrix}$$

Задание 2

$$\begin{pmatrix}
0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&1&1&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0
\end{pmatrix}$$

Задание 3.



Задание 4.

$$\begin{pmatrix}
0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&1&0\\
0&0&1&0&1&0\\
0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0\\
0&0&1&0&0&0
\end{pmatrix}$$

Задание 5.

$$\begin{pmatrix}
0&1&1&1&1&0&0&1\\
&0&0&0&1&0&0&0\\
&&0&1&0&1&1&0\\
&&&0&1&1&1&1\\
&&&&0&0&1&1\\
&&&&&0&1&0\\
&&&&&&0&1\\
&&&&&&&0
\end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ 4

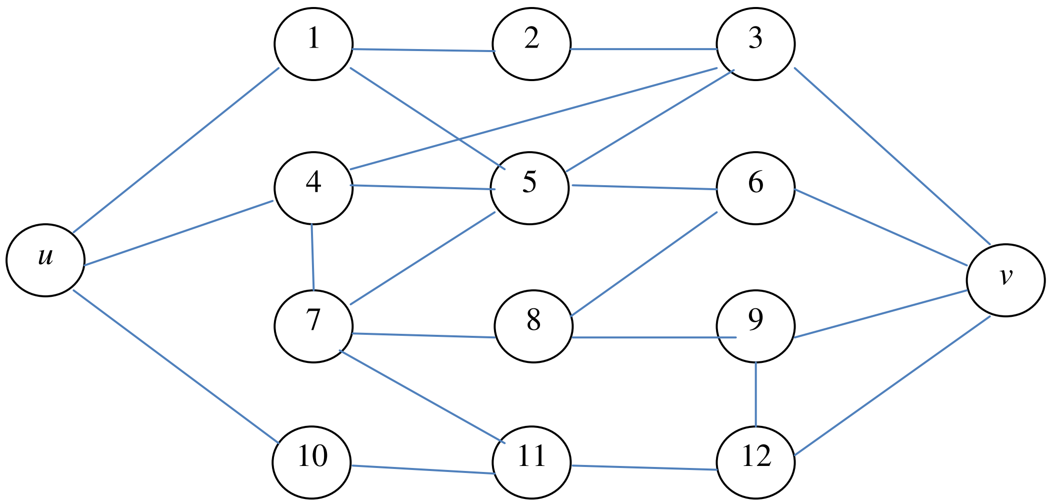
Задание 1.

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & & & & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & 0 & 1 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

Задание 2

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Задание 3.



Задание 4.

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

Задание 5.

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 & & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 & & & & & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 0 \\
 & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ 5

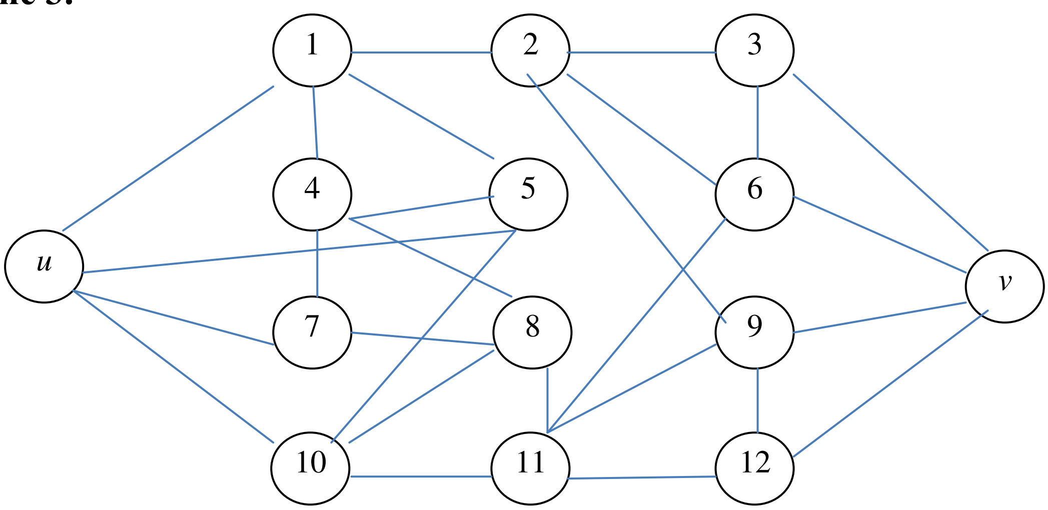
Задание 1.

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

Задание 2

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

Задание 3.



Задание 4.

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Задание 5.

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ 6

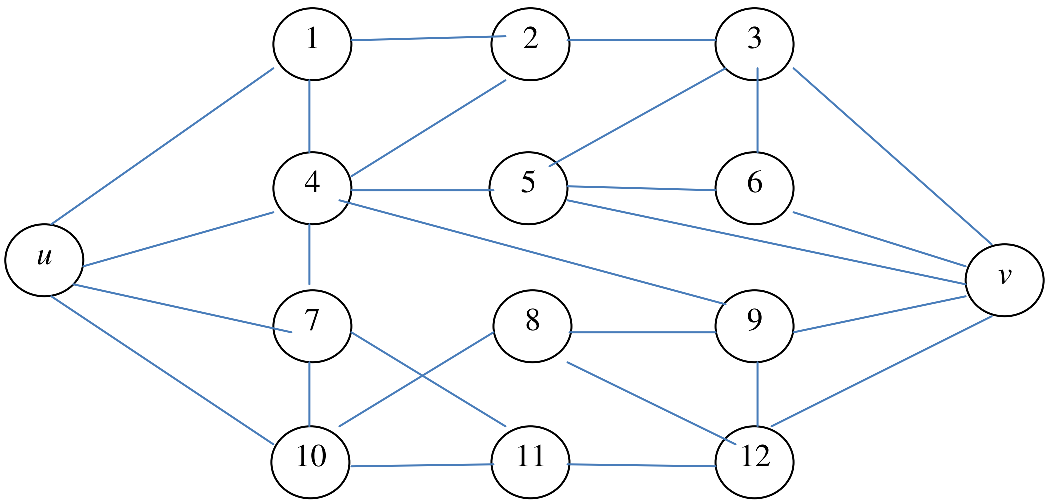
Задание 1.

$$\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&0&0&0\\
&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0\\
&&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0\\
&&&0&1&0&1&0&0&0&0&1&0&0\\
&&&&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1\\
&&&&&0&0&0&0&1&1&0&0&0\\
&&&&&&0&0&0&0&0&1&0&0\\
&&&&&&&0&1&0&0&0&0&0\\
&&&&&&&&0&0&0&0&0&0\\
&&&&&&&&&0&1&0&0&0\\
&&&&&&&&&&0&0&0&0\\
&&&&&&&&&&&0&0&0\\
&&&&&&&&&&&&0&1\\
&&&&&&&&&&&&&0
\end{pmatrix}$$

Задание 2

$$\begin{pmatrix}
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
1&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0
\end{pmatrix}$$

Задание 3.



Задание 4.

$$\begin{pmatrix}
0&0&1&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0\\
1&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&1&0&0\\
0&1&0&0&0&0
\end{pmatrix}$$

Задание 5.

$$\begin{pmatrix}
0&1&1&1&1&1&1&1\\
&0&1&1&0&1&1&1\\
&&0&1&0&0&1&1\\
&&&0&0&0&1&1\\
&&&&0&1&0&0\\
&&&&&0&0&0\\
&&&&&&0&1\\
&&&&&&&0
\end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ 7

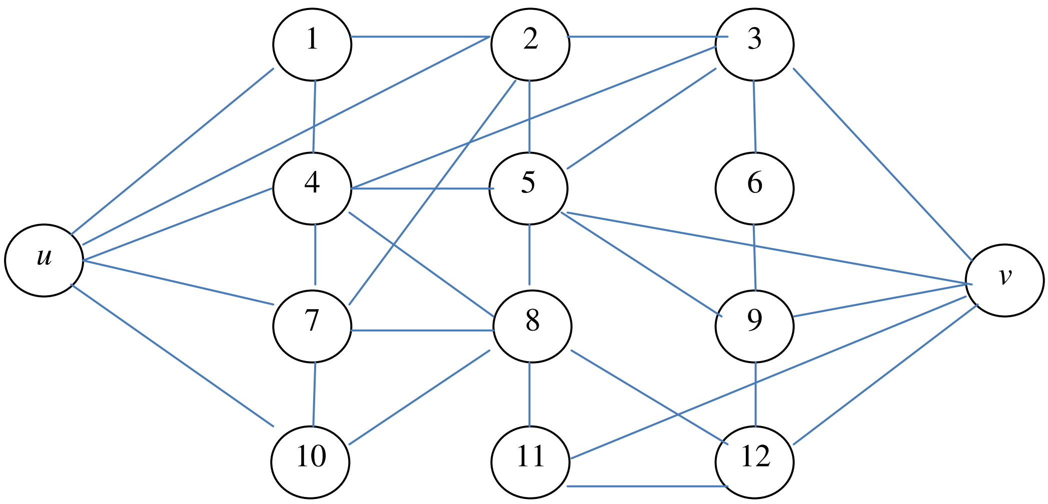
Задание 1.

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 & & & & & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

Задание 2

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Задание 3.



Задание 4.

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Задание 5.

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 & & & & & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ 8

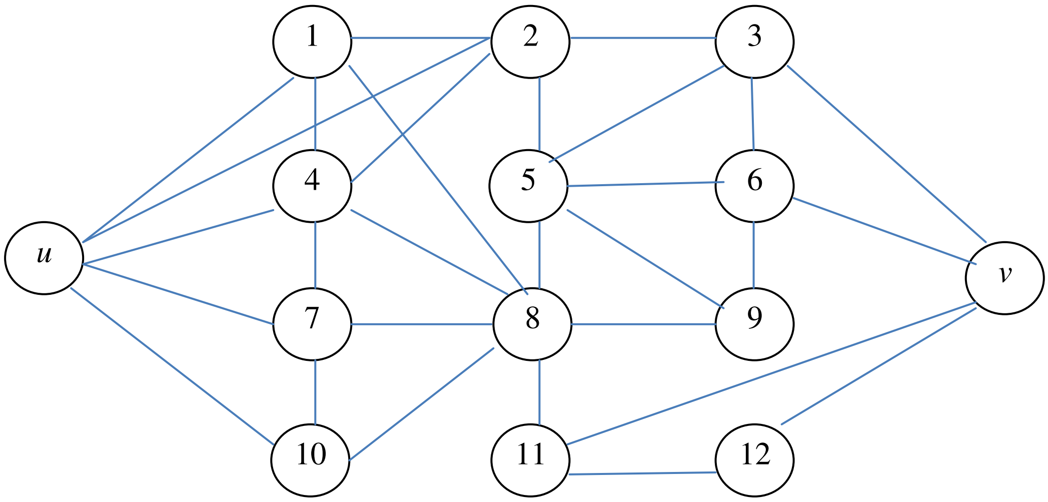
Задание 1.

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & & & & & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

Задание 2

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Задание 3.



Задание 4.

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Задание 5.

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 & & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ 9

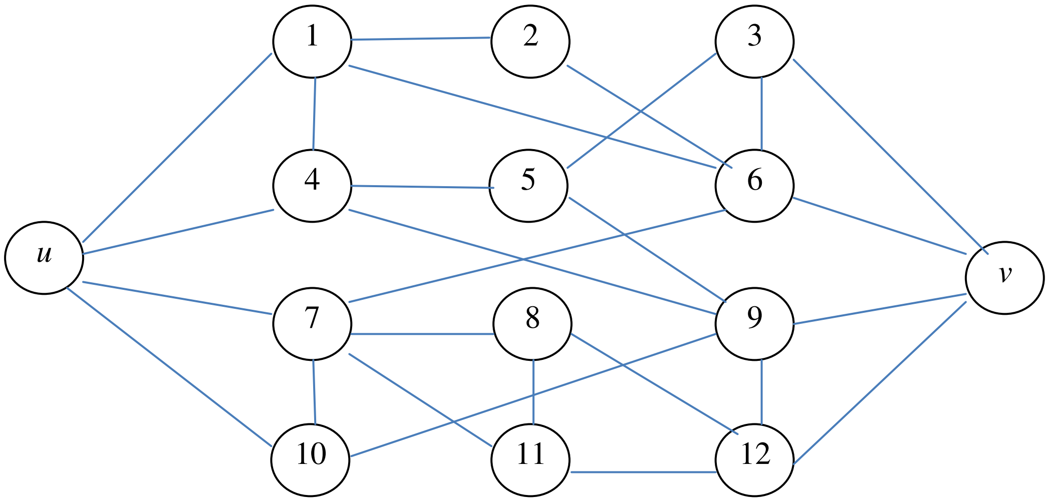
Задание 1.

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

Задание 2

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Задание 3.



Задание 4.

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Задание 5.

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 & & & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 & & & & & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ 10

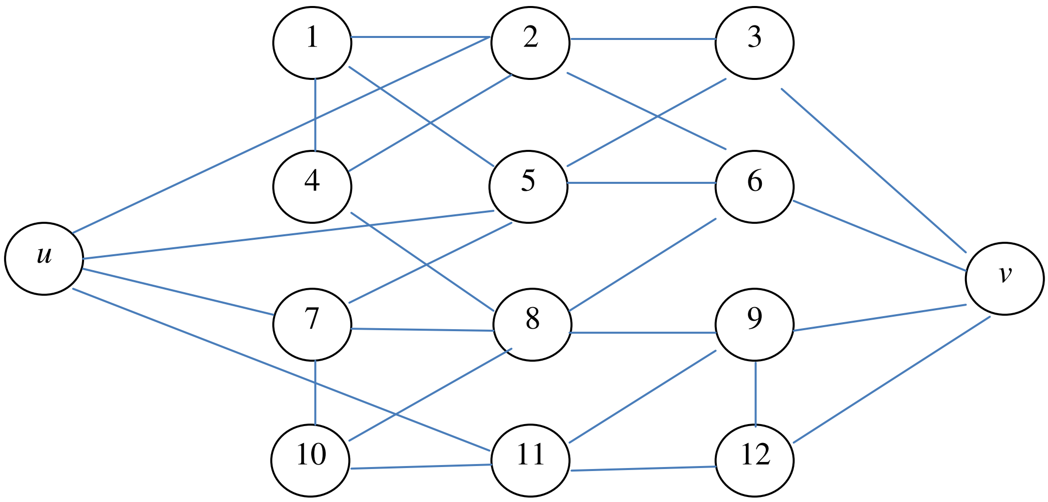
Задание 1.

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & & & & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & 0 & 1 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

Задание 2

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Задание 3.



Задание 4.

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Задание 5.

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 & & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 & & & & & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 0 \\
 & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ 11

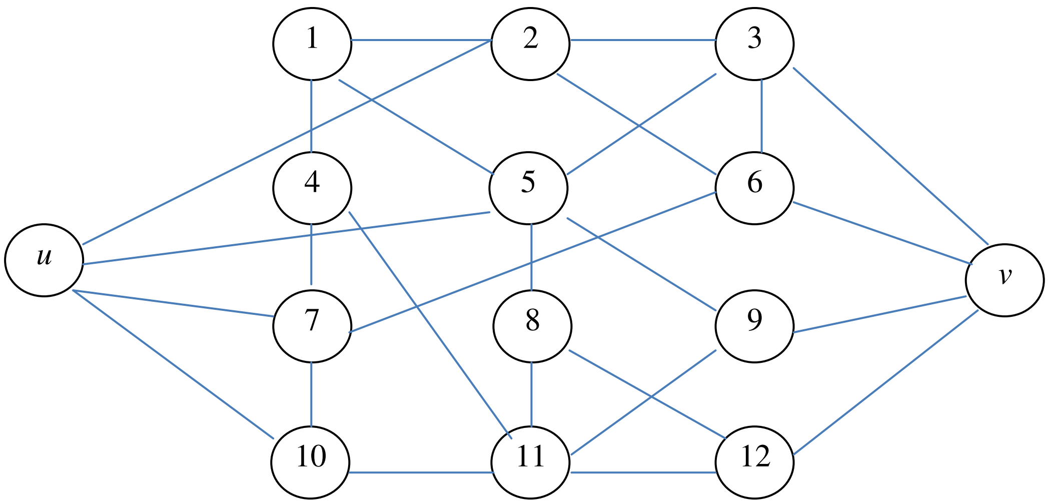
Задание 1.

$$\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0\\
&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\
&&0&0&0&1&0&1&0&1&0&0&1&1\\
&&&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\
&&&&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
&&&&&0&0&0&0&1&0&0&1&0\\
&&&&&&0&0&1&0&1&1&0&0\\
&&&&&&&0&0&0&0&0&0&1\\
&&&&&&&&0&0&0&0&0&0\\
&&&&&&&&&0&0&0&0&1\\
&&&&&&&&&&0&1&0&0\\
&&&&&&&&&&&0&0&0\\
&&&&&&&&&&&&0&1\\
&&&&&&&&&&&&&0
\end{pmatrix}$$

Задание 2

$$\begin{pmatrix}
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0
\end{pmatrix}$$

Задание 3.



Задание 4.

$$\begin{pmatrix}
0&0&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&1&0\\
0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&1\\
0&0&1&0&0&0
\end{pmatrix}$$

Задание 5.

$$\begin{pmatrix}
0&1&1&0&0&0&1&1\\
&0&1&0&0&0&1&1\\
&&0&1&0&1&1&1\\
&&&0&1&1&1&0\\
&&&&0&1&0&0\\
&&&&&0&1&0\\
&&&&&&0&1\\
&&&&&&&0
\end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ 12

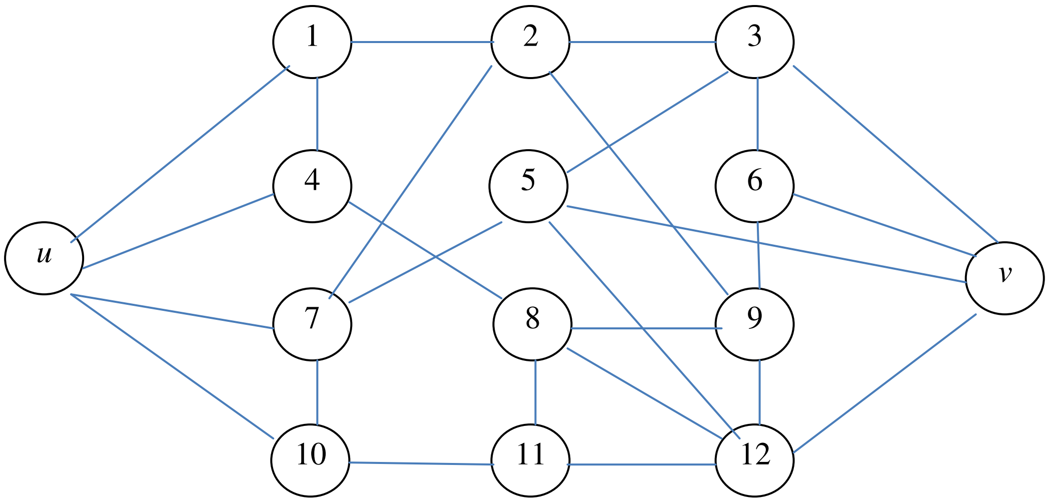
Задание 1.

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

Задание 2

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Задание 3.



Задание 4.

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

Задание 5.

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 & & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ 13

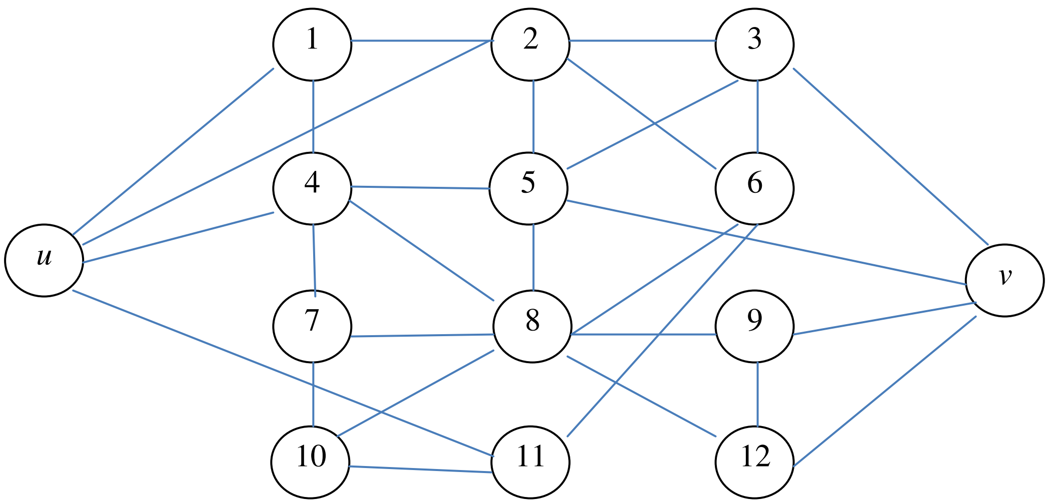
Задание 1.

$$\begin{pmatrix}
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
&0&0&0&1&1&0&0&1&0&0&0&1&0\\
&&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
&&&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
&&&&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
&&&&&0&0&1&0&0&0&0&0&1\\
&&&&&&0&0&0&0&1&0&0&0\\
&&&&&&&0&0&0&0&0&0&1\\
&&&&&&&&0&1&0&1&1&0\\
&&&&&&&&&0&0&1&0&0\\
&&&&&&&&&&0&0&0&0\\
&&&&&&&&&&&0&0&0\\
&&&&&&&&&&&&0&0\\
&&&&&&&&&&&&&0
\end{pmatrix}$$

Задание 2

$$\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}$$

Задание 3.



Задание 4.

$$\begin{pmatrix}
0&1&0&0&0&0\\
1&0&1&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0\\
0&1&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1
\end{pmatrix}$$

Задание 5.

$$\begin{pmatrix}
0&1&1&0&0&0&1&1\\
&0&1&0&0&0&1&1\\
&&0&1&0&1&1&1\\
&&&0&1&1&1&0\\
&&&&0&1&0&0\\
&&&&&0&1&0\\
&&&&&&0&1\\
&&&&&&&0
\end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ 14

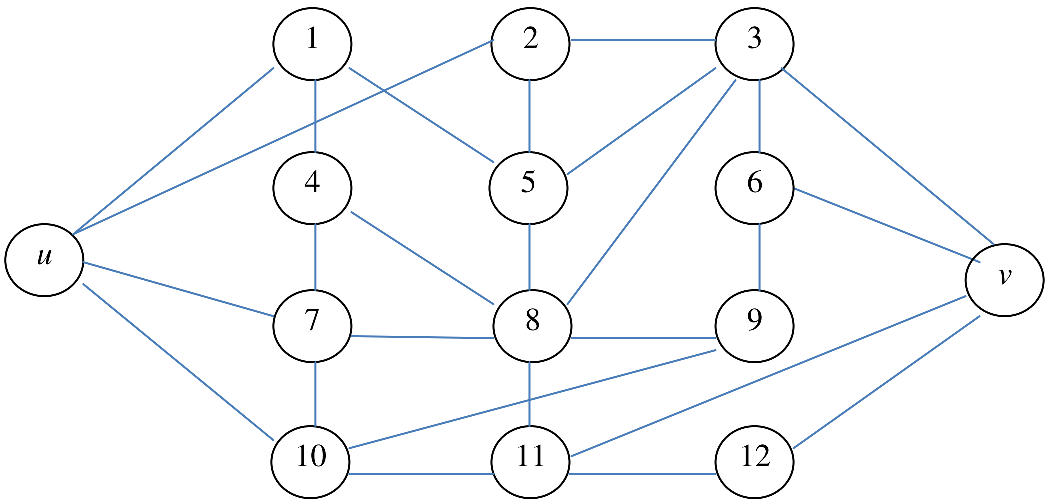
Задание 1.

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & & & & & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

Задание 2

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Задание 3.



Задание 4.

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

Задание 5.

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ 15

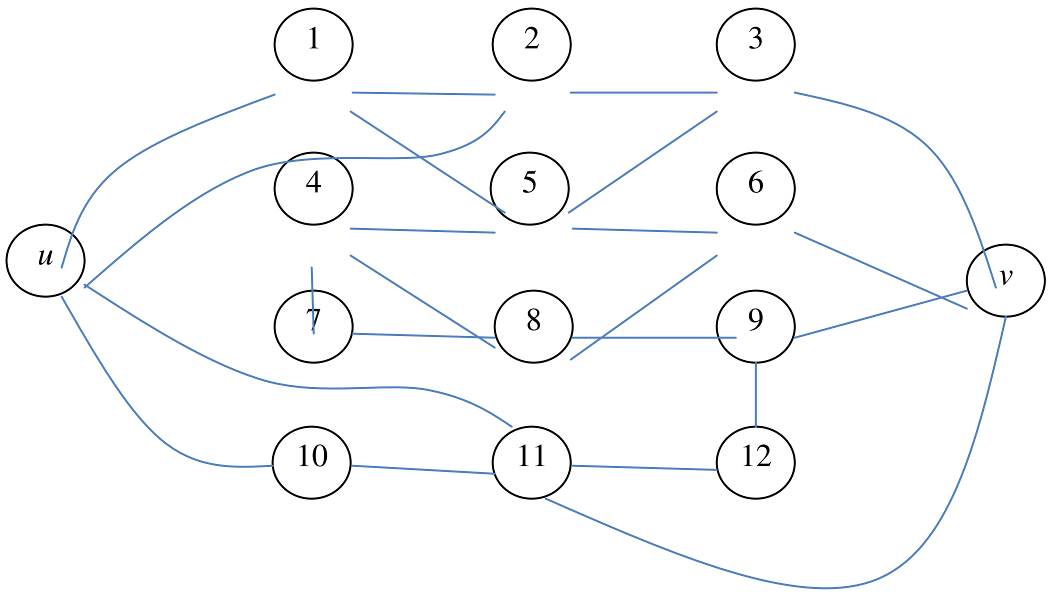
Задание 1.

$$\begin{pmatrix}
0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0\\
&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0\\
&&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1\\
&&&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0\\
&&&&0&0&0&0&1&0&1&1&0&1\\
&&&&&0&0&1&0&1&0&0&0&0\\
&&&&&&0&0&0&0&0&0&1&0\\
&&&&&&&0&0&1&0&1&0&1\\
&&&&&&&&0&0&0&1&0&1\\
&&&&&&&&&0&0&0&0&0\\
&&&&&&&&&&0&1&0&0\\
&&&&&&&&&&&0&0&0\\
&&&&&&&&&&&&0&0\\
&&&&&&&&&&&&&0
\end{pmatrix}$$

Задание 2

$$\begin{pmatrix}
0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&1&1&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0
\end{pmatrix}$$

Задание 3.



Задание 4.

$$\begin{pmatrix}
0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&1&0\\
0&0&1&0&1&0\\
0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0\\
0&0&1&0&0&0
\end{pmatrix}$$

Задание 5.

$$\begin{pmatrix}
0&1&1&1&1&0&0&1\\
&0&0&0&1&0&0&0\\
&&0&1&0&1&1&0\\
&&&0&1&1&1&1\\
&&&&0&0&1&1\\
&&&&&0&1&0\\
&&&&&&0&1\\
&&&&&&&0
\end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ 16

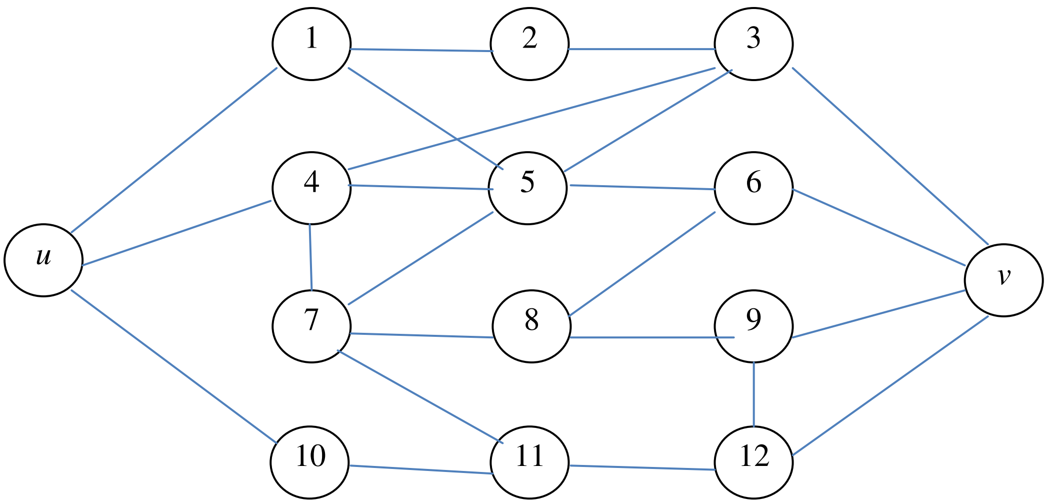
Задание 1.

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & & & & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & 0 & 1 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

Задание 2

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Задание 3.



Задание 4.

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

Задание 5.

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 & & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 & & & & & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 0 \\
 & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ 17

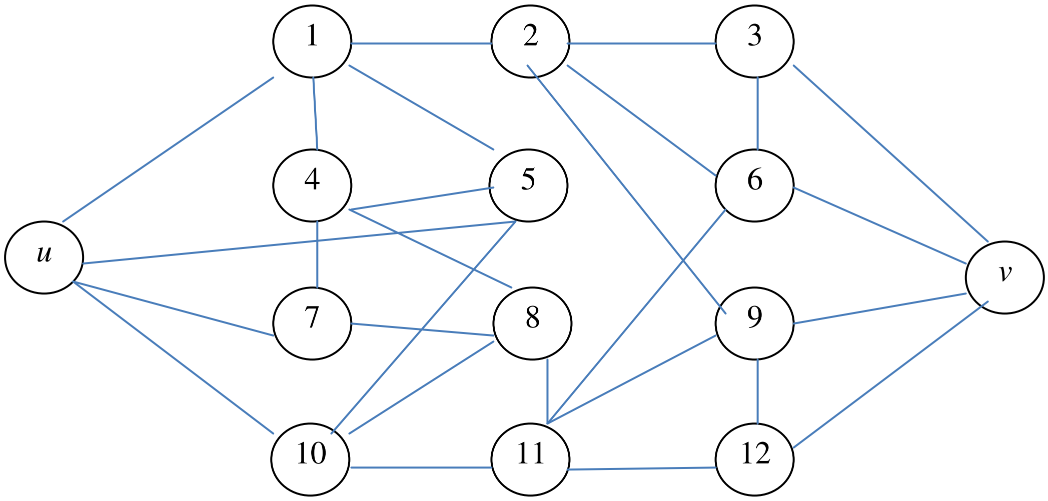
Задание 1.

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & 0
\end{pmatrix}
$$

Задание 2

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
$$

Задание 3.



Задание 4.

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

Задание 5.

$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & & 0
\end{pmatrix}
$$

ВАРИАНТ 18

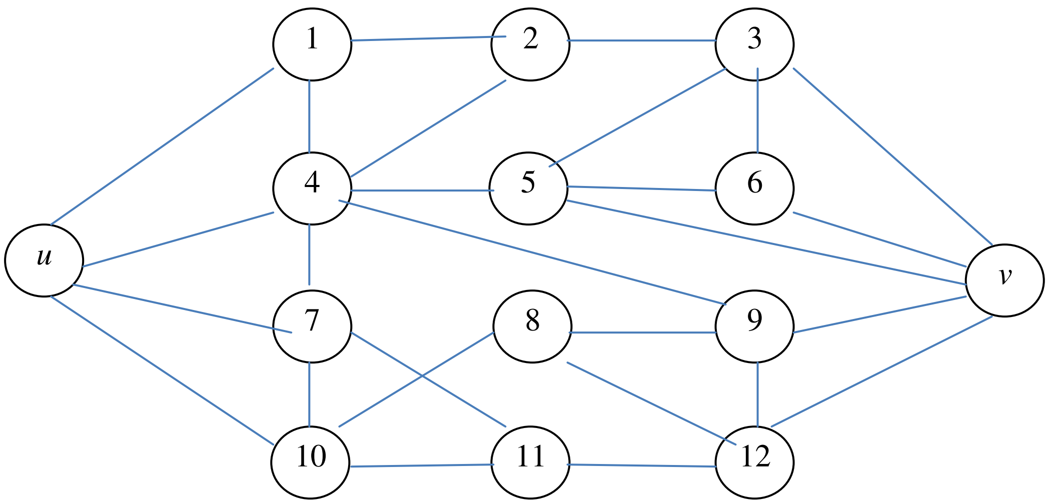
Задание 1.

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

Задание 2

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Задание 3.



Задание 4.

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Задание 5.

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 & & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ 19

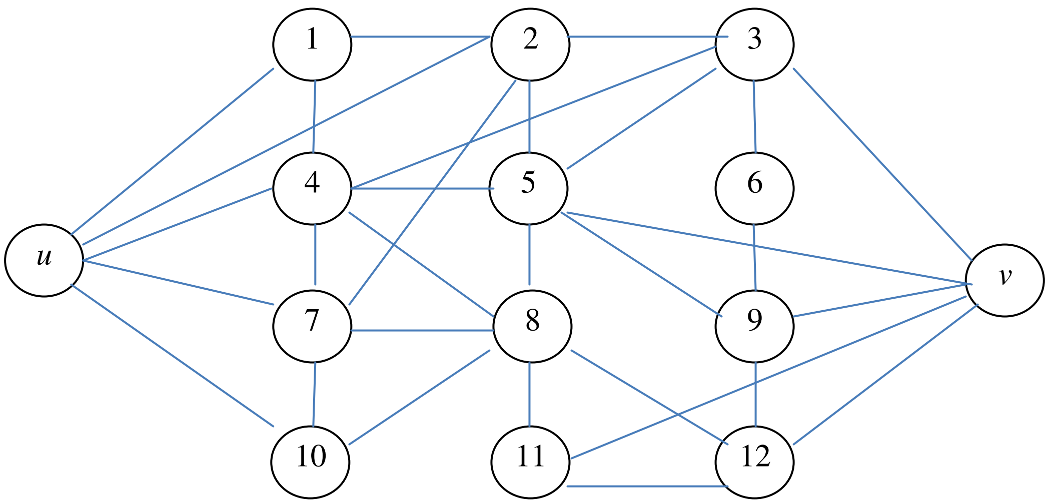
Задание 1.

$$\begin{pmatrix}
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
&0&0&0&1&1&0&0&1&0&0&0&1&0\\
&&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
&&&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
&&&&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
&&&&&0&0&1&0&0&0&0&0&1\\
&&&&&&0&0&0&0&1&0&0&0\\
&&&&&&&0&0&0&0&0&0&1\\
&&&&&&&&0&1&0&1&1&0\\
&&&&&&&&&0&0&1&0&0\\
&&&&&&&&&&0&0&0&0\\
&&&&&&&&&&&0&0&0\\
&&&&&&&&&&&&0&0\\
&&&&&&&&&&&&&0
\end{pmatrix}$$

Задание 2

$$\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}$$

Задание 3.



Задание 4.

$$\begin{pmatrix}
0&0&0&1&0&0\\
0&0&1&0&1&0\\
0&1&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&1
\end{pmatrix}$$

Задание 5.

$$\begin{pmatrix}
0&1&0&0&0&1&1&0\\
&0&1&0&1&1&0&0\\
&&0&1&1&0&0&1\\
&&&0&1&0&0&1\\
&&&&0&0&1&1\\
&&&&&0&1&0\\
&&&&&&0&1\\
&&&&&&&0
\end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ 20

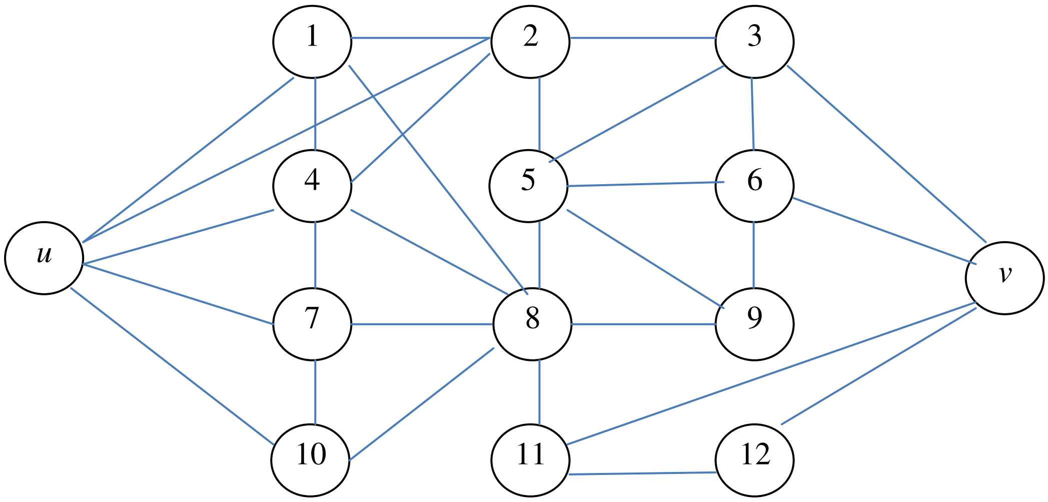
Задание 1.

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & & & & & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

Задание 2

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Задание 3.



Задание 4.

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Задание 5.

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 & & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. академика С.П. Королева
(национально исследовательский университет)» (СГАУ)

Факультет информатики
кафедра «Прикладная математика»

Индивидуальные задания по дисциплине
ТЕОРИЯ КОНЕЧНЫХ ГРАФОВ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Составитель Додонова Н.Л.

Самара 2013

Домашнее задание № 4
ПОТОКИ В СЕТЯХ.
ЭЛЕМЕНТЫ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Цель работы – закрепление понятий: сеть, пропускная способность дуги, поток в сети, сетевые графики.

Задачи: отработать навыки применения алгоритма Форда-Фалкерсона;
отработать навыки построения сетевых графиков;
использовать в расчетах программные средства.

Задание №1 Задана сеть своей матрицей пропускных способностей. Построить максимальный поток в сети. Найти величину максимального потока, указать минимальный разрез.

Задание №2 Задан перечень работ и их последовательность. Построить сетевой график, определить критический срок, резервы времени событий, ранние и поздние сроки начала и окончания всех работ, полные и свободные резервы времени всех работ.

ВАРИАНТ 1

Задание 1.

$$\begin{pmatrix} - & 10 & 10 & - & - & 7 & - \\ - & - & - & - & 8 & - & 11 \\ - & - & - & 6 & - & 12 & - \\ - & - & - & - & - & - & 9 \\ - & - & - & 5 & - & - & - \\ - & - & - & - & 12 & - & 20 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

Задание 2.

Основные работы	**Работы, предшествующие основной**	**Длительность основных работ**
a_1	–	7
a_2	–	5
a_3	–	10
a_4	a_3	14
a_5	a_2, a_4	8
a_6	a_1, a_2, a_3	10
a_7	a_2, a_5	6

ВАРИАНТ 2

Задание 1.

$$\begin{pmatrix} - & 10 & - & 7 & 5 & - & - \\ - & - & 9 & 7 & - & 4 & - \\ - & - & - & - & 5 & - & 4 \\ - & - & - & - & - & 14 & 7 \\ - & 9 & - & - & - & 5 & - \\ - & - & - & - & - & - & 10 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

Задание 2.

Основные работы	**Работы, предшествующие основной**	**Длительность основных работ**
a_1	–	6
a_2	–	8
a_3	a_2	12
a_4	a_1, a_2	5
a_5	a_1, a_3	7
a_6	a_2, a_4, a_5	7
a_7	a_2	10

ВАРИАНТ 3

Задание 1.

$$\begin{pmatrix} - & - & 8 & - & 4 & - & - \\ - & - & - & - & 3 & - & - \\ - & 1 & - & - & - & 3 & - \\ - & - & - & - & - & 2 & 1 \\ - & - & - & 6 & - & - & 7 \\ - & 4 & - & - & - & - & 2 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

Задание 2.

Основные работы	**Работы, предшествующие основной**	**Длительность основных работ**
a_1	–	10
a_2	–	11
a_3	–	13
a_4	a_1	9
a_5	a_1, a_2	7
a_6	a_1, a_2, a_3	15
a_7	a_4	6
a_8	a_4, a_5, a_6	12
a_9	a_1, a_7, a_8	5

ВАРИАНТ 4

Задание 1.

$$\begin{pmatrix} - & - & 3 & 4 & - & 3 & - \\ - & - & - & 6 & 4 & - & 5 \\ - & - & - & - & 6 & 5 & 7 \\ - & - & - & - & 5 & 8 & - \\ - & - & - & - & - & 4 & - \\ - & 4 & - & - & - & - & 3 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

Задание 2.

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Длительность основных работ
a_1	–	5
a_2	–	4
a_3	a_1	6
a_4	a_1, a_2	5
a_5	a_2, a_3	7
a_6	a_2, a_3, a_4	9
a_7	a_4	4
a_8	a_5, a_6	7

ВАРИАНТ 5

Задание 1.

$$\begin{pmatrix} - & 10 & 16 & - & 22 & - & - \\ - & - & - & - & 14 & - & - \\ - & - & - & - & - & 18 & - \\ - & - & 14 & - & - & - & 8 \\ - & - & 12 & 20 & - & - & 12 \\ - & - & - & 8 & - & - & 10 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

Задание 2.

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Длительность основных работ
a_1	–	7
a_2	–	9
a_3	a_1, a_2	11
a_4	a_1	6
a_5	a_3, a_4	8
a_6	a_2	10
a_7	a_3, a_4, a_6	12
a_8	a_2, a_5	13

ВАРИАНТ 6

Задание 1.

$$\begin{pmatrix} - & - & 12 & 9 & - & 7 & - \\ - & - & 8 & 5 & 9 & - & 13 \\ - & - & - & 6 & 5 & - & 5 \\ - & - & - & - & 13 & - & 7 \\ - & - & - & - & - & 4 & - \\ - & 3 & - & - & - & - & 15 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

Задание 2.

Основные работы	**Работы, предшествующие основной**	**Длительность основных работ**
a_1	–	10
a_2	–	12
a_3	a_1	14
a_4	a_1, a_2	11
a_5	a_1, a_2	7
a_6	a_1, a_4	9
a_7	a_3	15
a_8	a_1, a_4	13
a_9	a_5, a_6	8

ВАРИАНТ 7

Задание 1.

$$\begin{pmatrix} - & 7 & 8 & - & - & - & - \\ - & - & 6 & 5 & - & 7 & 7 \\ - & - & - & 3 & 4 & - & - \\ - & - & - & - & 3 & - & 5 \\ - & - & - & - & - & 3 & 4 \\ - & - & 6 & - & - & - & 3 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

Задание 2.

Основные работы	**Работы, предшествующие основной**	**Длительность основных работ**
a_1	–	3
a_2	–	2
a_3	a_1	5
a_4	a_1	6
a_5	a_1, a_2	4
a_6	a_3	4
a_7	a_4, a_5	6
a_8	a_6, a_7	7
a_9	a_4, a_5	5

ВАРИАНТ 8

Задание 1.

$$\begin{pmatrix} - & 6 & - & 5 & - & 6 & - \\ - & - & 4 & - & 6 & - & 5 \\ - & - & - & 3 & - & 4 & - \\ - & - & - & - & - & 3 & 7 \\ - & - & 4 & - & - & - & 5 \\ - & - & - & - & 8 & - & 3 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

Задание 2.

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Длительность основных работ
a_1	–	11
a_2	–	13
a_3	–	10
a_4	a_1, a_2	8
a_5	a_2, a_3	6
a_6	a_2, a_3	15
a_7	a_1, a_2	7
a_8	a_2, a_4, a_5	9
a_9	a_6	12

ВАРИАНТ 9

Задание 1.

$$\begin{pmatrix} - & 6 & - & - & 8 & - & - \\ - & - & - & 10 & 15 & - & - \\ - & - & - & 9 & 8 & - & 6 \\ - & - & - & - & 10 & - & 5 \\ - & - & - & - & - & 20 & 12 \\ - & 8 & 9 & - & - & - & 13 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

Задание 2.

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Длительность основных работ
a_1	–	5
a_2	–	7
a_3	–	8
a_4	a_3	8
a_5	a_2, a_4	10
a_6	a_1, a_2, a_3	5
a_7	a_2, a_5	7

ВАРИАНТ 10

Задание 1.

$$\begin{pmatrix} - & 36 & - & 30 & - & - & - \\ - & - & 22 & - & 28 & - & 32 \\ - & - & - & - & - & 28 & - \\ - & - & 28 & - & 38 & - & 14 \\ - & - & - & - & - & 52 & - \\ - & - & - & - & - & - & 38 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

Задание 2.

Основные работы	**Работы, предшествующие основной**	**Длительность основных работ**
a_1	–	6
a_2	–	10
a_3	a_2	10
a_4	a_1, a_2	8
a_5	a_3	6
a_6	a_2, a_4, a_5	4
a_7	a_2	3

ВАРИАНТ 11

Задание 1.

$$\begin{pmatrix} - & 20 & 24 & - & - & 32 & - \\ - & - & 18 & 22 & 26 & - & - \\ - & - & - & - & 24 & - & 34 \\ - & - & - & - & - & 28 & - \\ - & - & - & - & - & 32 & 36 \\ - & - & 22 & - & - & - & 14 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

Задание 2.

Основные работы	**Работы, предшествующие основной**	**Длительность основных работ**
a_1	–	8
a_2	–	5
a_3	–	6
a_4	a_1, a_2	10
a_5	a_2	10
a_6	a_2, a_3	8
a_7	a_3, a_4, a_5	5

ВАРИАНТ 12

Задание 1.

$$\begin{pmatrix} - & 5 & - & - & 13 & - & - \\ - & - & - & - & - & 5 & - \\ - & 18 & - & - & - & - & 4 \\ - & - & - & - & - & - & 25 \\ - & 15 & - & 7 & - & - & - \\ - & - & 10 & - & - & - & 13 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

Задание 2.

Основные работы	**Работы, предшествующие основной**	**Длительность основных работ**
a_1	–	8
a_2	–	10
a_3	a_1	8
a_4	a_1, a_2	12
a_5	a_2	6
a_6	a_3, a_4, a_5	9
a_7	a_3, a_4	7

ВАРИАНТ 13

Задание 1.

$$\begin{pmatrix} - & 10 & 10 & - & - & 7 & - \\ - & - & - & - & 8 & - & 11 \\ - & - & - & 6 & - & 12 & - \\ - & - & - & - & - & - & 9 \\ - & - & - & 5 & - & - & - \\ - & - & - & - & 12 & - & 20 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

Задание 2.

Основные работы	**Работы, предшествующие основной**	**Длительность основных работ**
a_1	–	7
a_2	–	5
a_3	–	10
a_4	a_3	14
a_5	a_2, a_4	8
a_6	a_1, a_2, a_3	10
a_7	a_2, a_5	6

ВАРИАНТ 14

Задание 1.

$$\begin{pmatrix} - & 10 & - & 7 & 5 & - & - \\ - & - & 9 & 7 & - & 4 & - \\ - & - & - & - & 5 & - & 4 \\ - & - & - & - & - & 14 & 7 \\ - & 9 & - & - & - & 5 & - \\ - & - & - & - & - & - & 10 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

Задание 2.

Основные работы	**Работы, предшествующие основной**	**Длительность основных работ**
a_1	–	6
a_2	–	8
a_3	a_2	12
a_4	a_1, a_2	5
a_5	a_1, a_3	7
a_6	a_2, a_4, a_5	7
a_7	a_2	10

ВАРИАНТ 15

Задание 1.

$$\begin{pmatrix} - & - & 8 & - & 4 & - & - \\ - & - & - & - & 3 & - & - \\ - & 1 & - & - & - & 3 & - \\ - & - & - & - & - & 2 & 1 \\ - & - & - & 6 & - & - & 7 \\ - & 4 & - & - & - & - & 2 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

Задание 2.

Основные работы	**Работы, предшествующие основной**	**Длительность основных работ**
a_1	–	10
a_2	–	11
a_3	–	13
a_4	a_1	9
a_5	a_1, a_2	7
a_6	a_1, a_2, a_3	15
a_7	a_4	6
a_8	a_4, a_5, a_6	12
a_9	a_1, a_7, a_8	5

ВАРИАНТ 16

Задание 1.

$$\begin{pmatrix} - & - & 3 & 4 & - & 3 & - \\ - & - & - & 6 & 4 & - & 5 \\ - & - & - & - & 6 & 5 & 7 \\ - & - & - & - & 5 & 8 & - \\ - & - & - & - & - & 4 & - \\ - & 4 & - & - & - & - & 3 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

Задание 2.

Основные работы	**Работы, предшествующие основной**	**Длительность основных работ**
a_1	–	5
a_2	–	4
a_3	a_1	6
a_4	a_1, a_2	5
a_5	a_2, a_3	7
a_6	a_2, a_3, a_4	9
a_7	a_4	4
a_8	a_5, a_6	7

ВАРИАНТ 17

Задание 1.

$$\begin{pmatrix} - & 10 & 16 & - & 22 & - & - \\ - & - & - & - & 14 & - & - \\ - & - & - & - & - & 18 & - \\ - & - & 14 & - & - & - & 8 \\ - & - & 12 & 20 & - & - & 12 \\ - & - & - & 8 & - & - & 10 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

Задание 2.

Основные работы	**Работы, предшествующие основной**	**Длительность основных работ**
a_1	–	7
a_2	–	9
a_3	a_1, a_2	11
a_4	a_1	6
a_5	a_3, a_4	8
a_6	a_2	10
a_7	a_3, a_4, a_6	12
a_8	a_2, a_5	13

ВАРИАНТ 18

Задание 1.

$$\begin{pmatrix} - & - & 12 & 9 & - & 7 & - \\ - & - & 8 & 5 & 9 & - & 13 \\ - & - & - & 6 & 5 & - & 5 \\ - & - & - & - & 13 & - & 7 \\ - & - & - & - & - & 4 & - \\ - & 3 & - & - & - & - & 15 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

Задание 2.

Основные работы	**Работы, предшествующие основной**	**Длительность основных работ**
a_1	–	10
a_2	–	12
a_3	a_1	14
a_4	a_1, a_2	11
a_5	a_1, a_2	7
a_6	a_1, a_4	9
a_7	a_3	15
a_8	a_1, a_4	13
a_9	a_5, a_6	8

ВАРИАНТ 19

Задание 1.

$$\begin{pmatrix} - & 7 & 8 & - & - & - & - \\ - & - & 6 & 5 & - & 7 & 7 \\ - & - & - & 3 & 4 & - & - \\ - & - & - & - & 3 & - & 5 \\ - & - & - & - & - & 3 & 4 \\ - & - & 6 & - & - & - & 3 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

Задание 2.

Основные работы	**Работы, предшествующие основной**	**Длительность основных работ**
a_1	–	3
a_2	–	2
a_3	a_1	5
a_4	a_1	6
a_5	a_1, a_2	4
a_6	a_3	4
a_7	a_4, a_5	6
a_8	a_6, a_7	7
a_9	a_4, a_5	5

ВАРИАНТ 20

Задание 1.

$$\begin{pmatrix} - & 6 & - & 5 & - & 6 & - \\ - & - & 4 & - & 6 & - & 5 \\ - & - & - & 3 & - & 4 & - \\ - & - & - & - & - & 3 & 7 \\ - & - & 4 & - & - & - & 5 \\ - & - & - & - & 8 & - & 3 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

Задание 2.

Основные работы	**Работы, предшествующие основной**	**Длительность основных работ**
a_1	–	11
a_2	–	13
a_3	–	10
a_4	a_1, a_2	8
a_5	a_2, a_3	6
a_6	a_2, a_3	15
a_7	a_1, a_2	7
a_8	a_2, a_4, a_5	9
a_9	a_6	12

«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. академика С.П. Королева
(национально исследовательский университет)» (СГАУ)

Факультет информатики
кафедра «Прикладная математика»

Индивидуальные задания по дисциплине

ТЕОРИЯ КОНЕЧНЫХ ГРАФОВ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Составитель Додонова Н.Л.

Самара 2013

Домашнее задание № 5
ДЕРЕВЬЯ

Задана весовая матрица графа. Выполните следующие задания

1. Найдите остов минимального веса с помощью алгоритма Краскала. Определите его вес.
2. Найдите остов минимального веса с помощью алгоритма Прима. Определите его вес.
3. Для остова максимального веса найдите центр и центроид.
4. Составьте код Прюфера для остова максимального веса. Запишите найденную последовательность в обратном порядке, постройте дерево, для которого составленная последовательность является кодом Прюфера.
5. Найдите радиус и диаметр остова минимального веса.
6. Постройте из минимального остовного дерева ордерево, назначив корнем центральную вершину. Задайте порядок поддеревьев. Пронумеруйте вершины согласно прямому обходу.
7. Составьте код Прюфера для найденного упорядоченного дерева.
8. Постройте бинарное дерево T, соответствующее найденному упорядоченному дереву. Определите его высоту. Является ли построенное бинарное дерево сбалансированным?
9. Постройте сбалансированное дерево такой же высоты, для которого бинарное дерево T является поддеревом.
10. Постройте сбалансированное дерево, которое является поддеревом дерева T и имеет наибольшую высоту.

1. $$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 8 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ & 0 & 0 & 9 & 11 & 0 & 5 & 3 & 0 & 7 & 2 & 9 \\ & & 0 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 & 7 & 0 & 5 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 7 & 0 & 8 & 10 & 0 & 3 & 8 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 6 & 0 \\ & & & & & 0 & 3 & 7 & 12 & 4 & 0 & 10 \\ & & & & & & 0 & 0 & 7 & 8 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 2 & 9 & 13 & 9 \\ & & & & & & & & 0 & 7 & 6 & 8 \\ & & & & & & & & & 0 & & 10 \\ & & & & & & & & & & 0 & 11 \\ & & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

2 $$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 6 & 9 & 0 & 9 & 8 & 11 & 0 & 7 & 0 \\ & 0 & 8 & 0 & 10 & 5 & 0 & 4 & 0 & 3 & 7 & 9 \\ & & 0 & 2 & 0 & 8 & 5 & 8 & 0 & 0 & 10 & 8 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 7 & 0 & 9 \\ & & & & 0 & 9 & 3 & 3 & 0 & 11 & 0 & 10 \\ & & & & & 0 & 3 & 0 & 6 & 0 & 5 & 0 \\ & & & & & & 0 & 4 & 0 & 6 & 9 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 12 & 9 \\ & & & & & & & & 0 & 4 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 0 & 6 & 3 \\ & & & & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix}0&9&0&7&6&4&0&5&8&0&10&0\\ &0&2&0&9&0&8&0&4&0&4&5\\ &&0&0&7&6&9&3&7&2&0&0\\ &&&0&6&0&4&5&9&10&0&9\\ &&&&0&9&0&0&3&0&6&0\\ &&&&&0&0&5&0&4&5&0\\ &&&&&&0&2&7&0&12&9\\ &&&&&&&0&5&0&3&0\\ &&&&&&&&0&0&4&0\\ &&&&&&&&&0&7&9\\ &&&&&&&&&&0&4\\ &&&&&&&&&&&0\end{pmatrix}$$

4. $$\begin{pmatrix}0&6&0&5&0&7&7&0&9&0&8&0\\ &0&5&3&0&0&2&5&0&3&8&0\\ &&0&0&2&8&0&0&9&7&11&9\\ &&&0&5&0&9&3&0&3&8&0\\ &&&&0&0&0&4&5&0&0&2\\ &&&&&0&3&8&9&12&0&9\\ &&&&&&0&0&3&0&7&0\\ &&&&&&&0&6&4&0&0\\ &&&&&&&&0&0&6&8\\ &&&&&&&&&0&3&0\\ &&&&&&&&&&0&7\\ &&&&&&&&&&&0\end{pmatrix}$$

5. $$\begin{pmatrix}0&0&0&9&7&8&0&4&10&0&0&8\\ &0&0&13&9&0&5&0&7&0&6&3\\ &&0&7&0&8&0&2&0&6&3&0\\ &&&0&10&7&0&0&3&5&0&7\\ &&&&0&0&4&7&5&0&9&2\\ &&&&&0&9&0&8&0&3&9\\ &&&&&&0&6&5&7&0&0\\ &&&&&&&0&3&7&0&8\\ &&&&&&&&0&0&11&0\\ &&&&&&&&&0&0&9\\ &&&&&&&&&&0&3\\ &&&&&&&&&&&0\end{pmatrix}$$

6. $$\begin{pmatrix}0&5&6&12&0&5&0&0&0&4&0&0\\ &0&0&9&10&0&0&7&7&9&6&0\\ &&0&0&3&0&8&0&8&0&0&9\\ &&&0&0&5&0&7&0&4&4&6\\ &&&&0&2&0&7&0&8&13&0\\ &&&&&0&9&0&10&0&0&3\\ &&&&&&0&5&0&9&0&4\\ &&&&&&&0&5&0&6&0\\ &&&&&&&&0&0&4&0\\ &&&&&&&&&0&0&3\\ &&&&&&&&&&0&6\\ &&&&&&&&&&&0\end{pmatrix}$$

7. $$\begin{pmatrix}0&7&0&9&0&0&0&6&0&4&3&8\\ &0&0&6&2&0&0&0&8&0&0&0\\ &&0&0&0&4&12&9&0&0&0&6\\ &&&0&7&5&0&0&2&0&4&0\\ &&&&0&0&9&5&0&7&0&0\\ &&&&&0&8&0&3&0&6&0\\ &&&&&&0&7&8&0&3&0\\ &&&&&&&0&0&4&0&6\\ &&&&&&&&0&0&6&8\\ &&&&&&&&&0&11&0\\ &&&&&&&&&&0&3\\ &&&&&&&&&&&0\end{pmatrix}$$

8. $$\begin{pmatrix}0&5&7&0&8&8&0&0&9&0&10&0\\ &0&0&3&0&6&5&7&0&0&3&0\\ &&0&0&4&0&0&8&10&5&0&7\\ &&&0&8&7&9&0&3&0&3&8\\ &&&&0&0&5&0&0&3&0&0\\ &&&&&0&8&9&3&0&7&12\\ &&&&&&0&0&0&4&6&0\\ &&&&&&&0&0&6&0&9\\ &&&&&&&&0&0&2&0\\ &&&&&&&&&0&4&0\\ &&&&&&&&&&0&5\\ &&&&&&&&&&&0\end{pmatrix}$$

9. $$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 4 & 0 & 7 & 0 & 9 & 0 & 9 & 0 & 0 & 8 \\
 & 0 & 0 & 0 & 6 & 4 & 5 & 9 & 0 & 10 & 3 & 0 \\
 & & 0 & 4 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 3 \\
 & & & 0 & 6 & 0 & 8 & 9 & 0 & 0 & 5 & 12 \\
 & & & & 0 & 6 & 0 & 7 & 8 & 10 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 12 & 9 \\
 & & & & & & 0 & 6 & 0 & 3 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & 0 & 7 & 0 & 3 & 8 \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & 4 & 0 \\
 & & & & & & & & & 0 & 0 & 6 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 8 \\
 & & & & & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

10. $$\begin{pmatrix}
0 & 7 & 9 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 6 \\
 & 0 & 0 & 7 & 11 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 3 & 8 \\
 & & 0 & 0 & 0 & 7 & 3 & 8 & 0 & 10 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 0 & 0 & 6 & 9 \\
 & & & & 0 & 8 & 7 & 0 & 3 & 11 & 0 & 8 \\
 & & & & & 0 & 0 & 9 & 0 & 4 & 9 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 5 \\
 & & & & & & & 0 & 6 & 0 & 8 & 0 \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & 12 & 0 \\
 & & & & & & & & & 0 & 4 & 9 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 3 \\
 & & & & & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

11. $$\begin{pmatrix}
0 & 8 & 0 & 0 & 7 & 11 & 0 & 9 & 0 & 0 & 4 & 0 \\
 & 0 & 4 & 8 & 0 & 7 & 0 & 5 & 0 & 10 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 0 & 12 & 0 & 3 & 0 & 9 & 5 & 5 & 3 \\
 & & & 0 & 6 & 0 & 4 & 0 & 6 & 0 & 0 & 10 \\
 & & & & 0 & 7 & 9 & 4 & 0 & 11 & 5 & 0 \\
 & & & & & 0 & 6 & 0 & 3 & 0 & 6 & 9 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & 0 & 0 & 9 & 8 & 4 \\
 & & & & & & & & 0 & 7 & 0 & 3 \\
 & & & & & & & & & 0 & 9 & 0 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 8 \\
 & & & & & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

12. $$\begin{pmatrix}
0 & 4 & 0 & 7 & 0 & 0 & 9 & 0 & 11 & 0 & 0 & 9 \\
 & 0 & 0 & 6 & 0 & 4 & 0 & 7 & 0 & 3 & 0 & 10 \\
 & & 0 & 11 & 0 & 9 & 4 & 0 & 5 & 0 & 8 & 4 \\
 & & & 0 & 5 & 0 & 7 & 8 & 0 & 8 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 6 & 4 & 0 & 7 & 0 & 5 & 5 \\
 & & & & & 0 & 0 & 7 & 9 & 0 & 3 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 4 & 0 & 12 & 0 & 6 \\
 & & & & & & & 0 & 3 & 0 & 8 & 0 \\
 & & & & & & & & 0 & 5 & 7 & 0 \\
 & & & & & & & & & 0 & 0 & 9 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 5 \\
 & & & & & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

13. $$\begin{pmatrix}
0 & 6 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 5 & 3 \\
 & 0 & 9 & 3 & 0 & 0 & 5 & 0 & 7 & 0 & 0 & 2 \\
 & & 0 & 0 & 6 & 0 & 8 & 4 & 0 & 11 & 0 & 6 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 7 & 9 & 0 & 0 & 12 & 0 \\
 & & & & 0 & 9 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \\
 & & & & & 0 & 2 & 7 & 0 & 10 & 0 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 8 & 3 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & 0 & 4 & 0 & 5 & 5 \\
 & & & & & & & & 0 & 3 & 8 & 0 \\
 & & & & & & & & & 0 & 0 & 9 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

14. $$\begin{pmatrix}
0 & 7 & 0 & 5 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 & 9 & 8 & 0 \\
 & 0 & 10 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 7 & 0 & 3 & 0 \\
 & & 0 & 2 & 7 & 0 & 9 & 0 & 0 & 4 & 0 & 12 \\
 & & & 0 & 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 8 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 2 & 0 & 11 & 7 & 0 & 8 & 9 \\
 & & & & & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 6 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 6 & 7 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & 0 & 0 & 9 & 0 & 12 \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 3 \\
 & & & & & & & & & 0 & 6 & 0 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 8 \\
 & & & & & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

15. $$\begin{pmatrix}
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 9 & 0 & 9 & 0 & 10 \\
 & 0 & 9 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\
 & & 0 & 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 & 8 & 0 & 9 \\
 & & & 0 & 8 & 7 & 0 & 2 & 7 & 0 & 4 & 6 \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 3 & 0 & 10 \\
 & & & & & 0 & 2 & 8 & 0 & 0 & 4 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 9 & 2 & 0 & 5 \\
 & & & & & & & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & 0 & 7 & 0 & 3 \\
 & & & & & & & & & 0 & 8 & 0 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 11 \\
 & & & & & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

16. $$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 4 & 0 & 7 & 0 & 9 & 0 & 9 & 0 & 0 & 8 \\
 & 0 & 0 & 0 & 6 & 4 & 5 & 9 & 0 & 10 & 3 & 0 \\
 & & 0 & 4 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 3 \\
 & & & 0 & 6 & 0 & 8 & 9 & 0 & 0 & 5 & 12 \\
 & & & & 0 & 6 & 0 & 7 & 8 & 10 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 12 & 9 \\
 & & & & & & 0 & 6 & 0 & 3 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & 0 & 7 & 0 & 3 & 8 \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & 4 & 0 \\
 & & & & & & & & & 0 & 0 & 6 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 8 \\
 & & & & & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

17. $$\begin{pmatrix}
0 & 8 & 0 & 0 & 7 & 11 & 0 & 9 & 0 & 0 & 4 & 0 \\
 & 0 & 4 & 8 & 0 & 7 & 0 & 5 & 0 & 10 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 0 & 12 & 0 & 3 & 0 & 9 & 5 & 5 & 3 \\
 & & & 0 & 6 & 0 & 4 & 0 & 6 & 0 & 0 & 10 \\
 & & & & 0 & 7 & 9 & 4 & 0 & 11 & 5 & 0 \\
 & & & & & 0 & 6 & 0 & 3 & 0 & 6 & 9 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & 0 & 0 & 9 & 8 & 4 \\
 & & & & & & & & 0 & 7 & 0 & 3 \\
 & & & & & & & & & 0 & 9 & 0 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 8 \\
 & & & & & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

18. $$\begin{pmatrix}
0 & 4 & 0 & 7 & 0 & 0 & 9 & 0 & 11 & 0 & 0 & 9 \\
 & 0 & 0 & 6 & 0 & 4 & 0 & 7 & 0 & 3 & 0 & 10 \\
 & & 0 & 11 & 0 & 9 & 4 & 0 & 5 & 0 & 8 & 4 \\
 & & & 0 & 5 & 0 & 7 & 8 & 0 & 8 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 6 & 4 & 0 & 7 & 0 & 5 & 5 \\
 & & & & & 0 & 0 & 7 & 9 & 0 & 3 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 4 & 0 & 12 & 0 & 6 \\
 & & & & & & & 0 & 3 & 0 & 8 & 0 \\
 & & & & & & & & 0 & 5 & 7 & 0 \\
 & & & & & & & & & 0 & 0 & 9 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 5 \\
 & & & & & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

19. $$\begin{pmatrix}
0 & 8 & 0 & 0 & 7 & 11 & 0 & 9 & 0 & 0 & 4 & 0 \\
 & 0 & 4 & 8 & 0 & 7 & 0 & 5 & 0 & 10 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 0 & 12 & 0 & 3 & 0 & 7 & 5 & 5 & 3 \\
 & & & 0 & 6 & 0 & 6 & 0 & 6 & 0 & 8 & 0 \\
 & & & & 0 & 7 & 9 & 4 & 0 & 11 & 5 & 0 \\
 & & & & & 0 & 6 & 0 & 3 & 0 & 6 & 9 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & 0 & 3 & 9 & 0 & 4 \\
 & & & & & & & & 0 & 7 & 0 & 3 \\
 & & & & & & & & & 0 & 9 & 0 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 8 \\
 & & & & & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

20. $$\begin{pmatrix}
0 & 4 & 0 & 9 & 0 & 0 & 9 & 0 & 11 & 0 & 0 & 9 \\
 & 0 & 0 & 6 & 0 & 4 & 0 & 7 & 0 & 3 & 0 & 10 \\
 & & 0 & 11 & 0 & 4 & 4 & 0 & 8 & 0 & 8 & 4 \\
 & & & 0 & 5 & 0 & 7 & 8 & 0 & 8 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & 5 & 2 & 7 & 0 & 8 & 5 \\
 & & & & & 0 & 0 & 7 & 9 & 0 & 3 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 4 & 0 & 12 & 0 & 6 \\
 & & & & & & & 0 & 3 & 0 & 8 & 0 \\
 & & & & & & & & 0 & 5 & 7 & 0 \\
 & & & & & & & & & 0 & 0 & 9 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 5 \\
 & & & & & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. академика С.П. Королева
(национально исследовательский университет)» (СГАУ)

Факультет информатики
кафедра «Прикладная математика»

Варианты контрольных работ по дисциплине

ТЕОРИЯ ГРАФОВ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

для специальности «Информационная безопасность автоматизированных систем»

Составитель Додонова Н.Л.

Самара 2013

Вариант №1

№ 1. Заданы множества V – множество точек на координатной плоскости, множество E. Построить граф $G = (V, E)$

1. Составить матрицы смежности и инцидентности.
2. Определить степени вершин.
3. Вычислить радиус и диаметр графа.

V	x_1=(1, 3)	x_2=(3, 5)	x_3=(6, 5)	x_4=(2, 2)	x_5=(3, 3)	x_6=(1, 0)	x_7=(3, 0)	x_8=(6, 2)
E	$(x_1, x_2), (x_2, x_5), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_1, x_6), (x_2, x_7), (x_6, x_7)$							

№ 2. По заданной матрице весов графа G найти путь от вершины x_1 до вершины x_6 минимального веса. Вычислить вес пути.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 7 & 2 & \infty & 13 & \infty \\ \infty & - & \infty & \infty & 6 & \infty \\ \infty & 2 & - & 1 & 3 & 11 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 3 & - & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}.$$

№ 3. Построить граф, изоморфный своему дополнению.

Вариант №2

№ 1. Заданы множества V – множество точек на координатной плоскости, множество E. Построить граф $G = (V, E)$

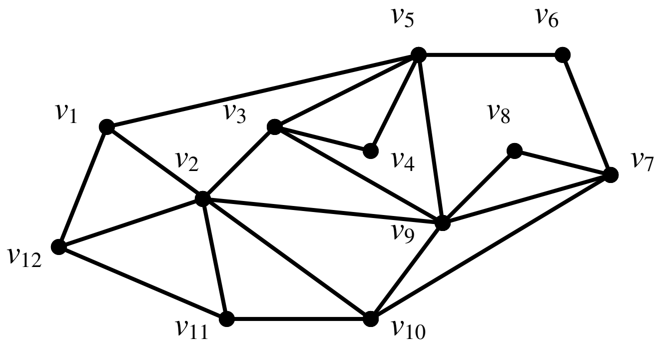
1. Составить матрицы смежности и инцидентности.
2. Определить степени вершин.
3. Вычислить радиус и диаметр графа.

V	x_1=(4, 6)	x_2=(2, 4)	x_3=(4, 4)	x_4=(6, 4)	x_5=(2, 0)	x_6=(4, 1)	x_7=(6, 0)	x_8=(9, 2)
E	$(x_1, x_2), (x_2, x_5), (x_2, x_3), (x_1, x_4), (x_4, x_7), (x_6, x_7), (x_1, x_3), (x_3, x_4), (x_5, x_6), (x_3, x_6)$							

№ 2. Для графа G, заданного матрицей весов, построить остов минимального веса G' и найти его вес $\omega(G')$

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
- & 8 & 9 & \infty & \infty & \infty & 6 \\
8 & - & 7 & 6 & 9 & \infty & \infty \\
9 & 7 & - & 6 & 10 & 5 & \infty \\
\infty & 6 & 6 & - & 8 & 7 & \infty \\
\infty & 9 & 10 & 8 & - & 4 & 5 \\
\infty & \infty & 5 & 7 & 4 & - & 6 \\
6 & \infty & \infty & \infty & 5 & 6 & -
\end{pmatrix}
\end{array}.$$

№ 3. Найти минимальное (по количеству ребер) подмножество ребер, удаление которых превращает заданный связный граф в несвязный.



Вариант №3

№ 1. Заданы множества V – множество точек на координатной плоскости, множество E. Построить граф $G=(V, E)$

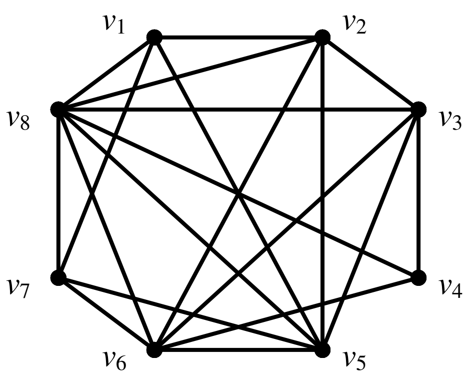
1. Составить матрицы смежности и инцидентности.
2. Определить степени вершин.
3. Вычислить радиус и диаметр графа.

V	x_1=(2, 3)	x_2=(2, 6)	x_3=(3, 7)	x_4=(3, 5)	x_5=(5, 6)	x_6=(5, 4)	x_7=(6, 6)	x_8=(4, 1)
E	$(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_4, x_6), (x_3, x_4), (x_5, x_6), (x_3, x_5), (x_5, x_7)$							

№ 2. По данной матрице пропускных способностей найти максимальный поток в сети G и указать минимальный разрез, отделяющий источник и сток.

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 9 & - & 11 & - & 17 & - \\ - & - & 6 & - & 8 & - & 12 \\ - & - & - & - & - & - & 7 \\ - & 5 & - & - & - & 5 & 4 \\ - & - & - & - & - & 7 & - \\ - & - & - & - & - & - & 9 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}.$$

№ 3. В заданном графе найти максимальный по количеству вершин полный подграф.



Вариант №4

№ 1. Заданы множества V – множество точек на координатной плоскости, множество E. Построить граф $G=(V,E)$

1. Составить матрицы смежности и инцидентности.
2. Определить степени вершин.
3. Вычислить радиус и диаметр графа.

V	x_1=(1, 1)	x_2=(2, 2)	x_3=(2, 4)	x_4=(2, 5)	x_5=(3, 5)	x_6=(5, 5)	x_7=(3, 2)	x_8=(5, 2)
E	$(x_1,x_2),(x_2,x_3),(x_5,x_6),(x_3,x_5),(x_6,x_8),(x_2,x_7),(x_7,x_8),(x_5,x_7)$							

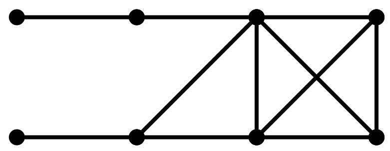
№ 2. По заданной матрице весов графа G найти путь от вершины x_1 до вершины x_6 минимального веса. Вычислить вес пути.

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 11 & \infty & 14 & 15 & \infty \\ \infty & - & 13 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & \infty & 13 \\ \infty & 7 & 11 & - & 9 & \infty \\ \infty & 11 & 10 & \infty & - & 14 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}.$$

№ 3. Изобразить попарно не изоморфные графы, содержащие не более четырех вершин.

Вариант №5

№ 1. Для заданного графа составить матрицы смежности и инцидентностей,



определить радиус и диаметр.

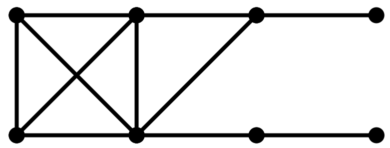
№ 2. Для графа G, заданного матрицей весов, построить остов минимального веса G' и найти его вес $\omega(G')$

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 7 & 15 & 12 & \infty & 10 & \infty \\ 7 & - & 13 & 9 & \infty & \infty & 8 \\ 15 & 13 & - & 7 & 15 & 7 & \infty \\ 12 & 9 & 7 & - & 9 & \infty & 11 \\ \infty & \infty & 15 & 9 & - & 10 & \infty \\ 10 & \infty & 7 & \infty & 10 & - & 12 \\ \infty & 8 & \infty & 11 & \infty & 12 & - \end{pmatrix} \end{array}$$

№ 3. Для заданного целого $n = 4$ построить граф с n вершинами, в котором степень каждой вершины равна 4.

Вариант №6

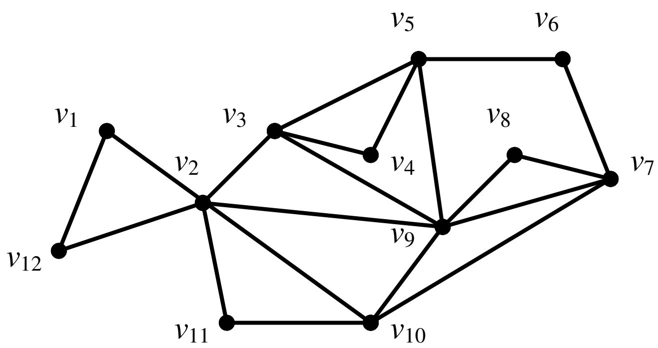
№ 1. Для заданного графа составить матрицы смежности и инцидентностей, определить радиус и диаметр.



№ 2. Для графа G, заданного матрицей весов, построить остов минимального веса G' и найти его вес $\omega(G')$

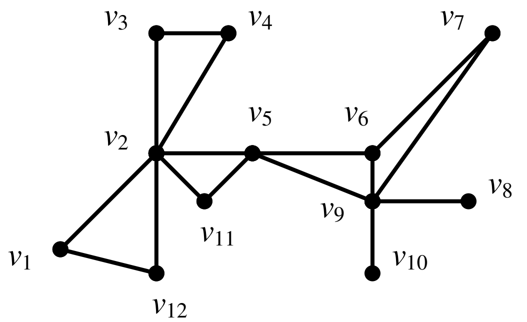
$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\
\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
- & 10 & 11 & \infty & 14 & \infty & 12 \\
10 & - & 10 & 9 & \infty & \infty & 7 \\
11 & 10 & - & 12 & 10 & \infty & 6 \\
\infty & 9 & 12 & - & 9 & 12 & \infty \\
14 & \infty & 10 & 9 & - & 11 & 12 \\
\infty & \infty & \infty & 12 & 11 & - & \infty \\
12 & 7 & 6 & \infty & 12 & \infty & -
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

№ 3. Проверить, можно ли раскрасить ребра графа в два цвета так, чтобы в графе не было треугольника, ребра которого окрашены одним цветом.



Вариант №7

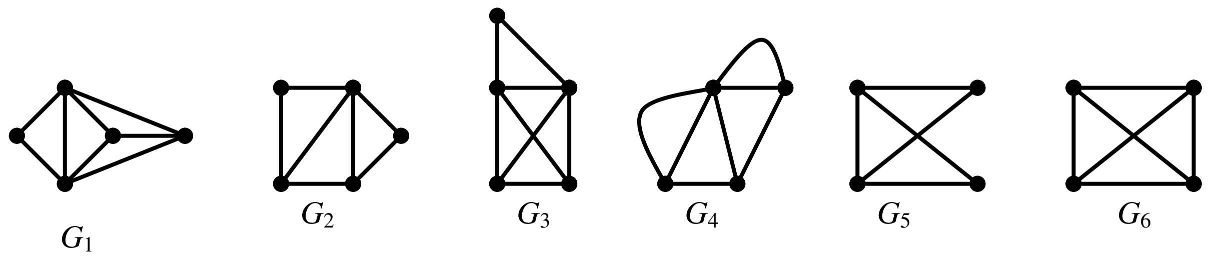
№ 1. Для заданного графа составить матрицы смежности и инцидентностей, определить радиус и диаметр.



№ 2. Для графа G, заданного матрицей весов, построить остов минимального веса G' и найти его вес $\omega(G')$

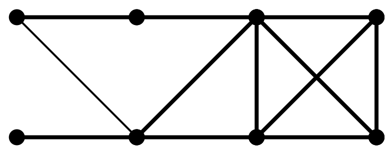
$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\
\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} &
\begin{pmatrix}
- & 3 & 5 & \infty & 6 & \infty & \infty \\
3 & - & 10 & 6 & 8 & \infty & 4 \\
5 & 10 & - & 5 & 7 & \infty & 9 \\
\infty & 6 & 5 & - & 8 & 7 & \infty \\
6 & 8 & 7 & 8 & - & 9 & 11 \\
\infty & \infty & \infty & 7 & 9 & - & \infty \\
\infty & 4 & 9 & \infty & 11 & \infty & -
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

№ 3. Какие из графов являются эйлеровыми, полуэйлеровыми?



Вариант №8

№ 1. Для заданного графа составить матрицы смежности и инцидентностей,



определить радиус и диаметр.

№ 2. Для графа G, заданного матрицей весов, построить остов минимального веса G' и найти его вес $\omega(G')$

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\
\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} &
\begin{pmatrix}
- & 8 & \infty & 10 & 13 & \infty & 11 \\
8 & - & 7 & 8 & \infty & 15 & \infty \\
\infty & 7 & - & \infty & 19 & 10 & 15 \\
10 & 8 & \infty & - & 9 & \infty & 6 \\
13 & \infty & 19 & 9 & - & 8 & \infty \\
\infty & 15 & 10 & \infty & 8 & - & 12 \\
11 & \infty & 15 & 6 & \infty & 12 & -
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

№ 3. Укажите номера вопросов, на которые Вы дадите ответ «да». Верно ли, что:

1) в эйлеровой цепи каждая вершина встречается точно один раз?
2) всякая эйлерова цепь проходит через все вершины связного графа?
3) существует эйлерова цепь (замкнутая или разомкнутая) в связном графе, содержащем одну нечетную вершину?
4) во всяком эйлеровом графе существует единственная последовательность ребер и вершин, образующая эйлеров цикл?
5) в эйлеровом графе уникурсальная линия может начинаться с любой вершины?
6) всякая эйлерова цепь является простой?
7) связный граф может быть полуэйлеровым, если в нем точно одна четная вершина?

Вариант №9

№ 1. Заданы множества V – множество точек на координатной плоскости, множество E. Построить граф $G = (V, E)$

1. Составить матрицы смежности и инцидентности.
2. Определить степени вершин.
3. Вычислить радиус и диаметр графа.

V	$x_1=(1, 3)$	$x_2=(3, 5)$	$x_3=(6, 5)$	$x_4=(2, 2)$	$x_5=(3, 3)$	$x_6=(1, 0)$	$x_7=(3, 0)$	$x_8=(6, 2)$
E	$(x_1, x_2), (x_2, x_5), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_1, x_6), (x_2, x_7), (x_6, x_7)$							

№ 2. Для графа G, заданного матрицей весов, построить остов минимального веса G' и найти его вес $\omega(G')$

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 6 & 8 & \infty & \infty & 7 & \infty \\ 6 & - & 11 & 12 & 9 & \infty & 5 \\ 8 & 11 & - & 7 & 8 & \infty & 9 \\ \infty & 12 & 7 & - & 6 & 5 & 10 \\ \infty & 9 & 8 & 6 & - & 8 & \infty \\ 7 & \infty & \infty & 5 & 8 & - & 7 \\ \infty & 5 & 9 & 10 & \infty & 7 & - \end{pmatrix} \end{array}$$

№ 3. Укажите номера вопросов, на которые Вы дадите ответ «да». Верно ли, что:

1) могут ли быть изоморфными графы, не содержащие ребер?
2) даны два полных графа с одинаковым числом вершин. При всякой ли нумерации вершин они останутся изоморфными?
3) даны два однородных графа (граф называется однородным, если степени всех его вершин равны) с одинаковым числом вершин. Всякая ли нумерация вершин этих графов удовлетворяет условиям изоморфизма?
4) применимо ли понятие изоморфизма к псевдографам?
5) может ли непустой граф быть изоморфным своему собственному подграфу?

Вариант №10

№ 1. Заданы множества V – множество точек на координатной плоскости, множество E. Построить граф $G=(V,E)$

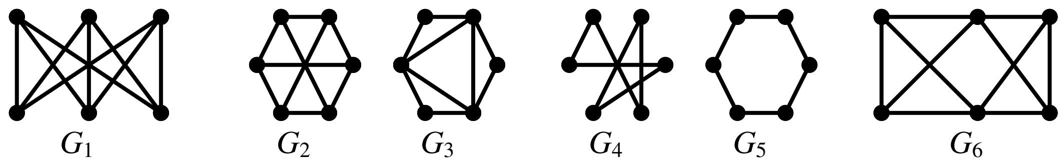
1. Составить матрицы смежности и инцидентности.
2. Определить степени вершин.
3. Вычислить радиус и диаметр графа.

V	$x_1=(4,6)$	$x_2=(2,4)$	$x_3=(4,4)$	$x_4=(6,4)$	$x_5=(2,0)$	$x_6=(4,1)$	$x_7=(6,0)$	$x_8=(9,2)$
E	$(x_1,x_2),(x_2,x_5),(x_2,x_3),(x_1,x_4),(x_4,x_7),(x_6,x_7),(x_1,x_3),(x_3,x_4),(x_5,x_6),(x_3,x_6)$							

№ 2. Для графа G, заданного матрицей весов, построить остов минимального веса G' и найти его вес $\omega(G')$

$$\begin{array}{c} \\ x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array}\\
\begin{pmatrix}
- & 3 & 8 & \infty & 3 & 6 & \infty\\
3 & - & 7 & 6 & \infty & \infty & 4\\
8 & 7 & - & 4 & 6 & \infty & 10\\
\infty & 6 & 4 & - & 5 & 7 & \infty\\
3 & \infty & 6 & 5 & - & 8 & 9\\
6 & \infty & \infty & 7 & 8 & - & \infty\\
\infty & 4 & 10 & \infty & 9 & \infty & -
\end{pmatrix}
\end{array}$$

№ 3. Укажите, какие из графов являются полными двудольными графами



Вариант №11

№ 1. Заданы множества V – множество точек на координатной плоскости, множество E. Построить граф $G=(V,E)$

1. Составить матрицы смежности и инцидентности.
2. Определить степени вершин.
3. Вычислить радиус и диаметр графа.

V	x_1=(2, 3)	x_2=(2, 6)	x_3=(3, 7)	x_4=(3, 5)	x_5=(5, 6)	x_6=(5, 4)	x_7=(6, 6)	x_8=(4, 1)
E	$(x_1,x_2),(x_2,x_3),(x_4,x_6),(x_3,x_4),(x_5,x_6),(x_3,x_5),(x_5,x_7)$							

№ 2. Для графа G, заданного матрицей весов, построить остов минимального веса G' и найти его вес $\omega(G')$

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\
\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} &
\begin{pmatrix}
- & 9 & 10 & 15 & \infty & \infty & 11 \\
9 & - & 14 & 12 & \infty & 8 & 15 \\
10 & 14 & - & 10 & 9 & \infty & 6 \\
15 & 12 & 10 & - & 11 & 12 & \infty \\
\infty & \infty & 9 & 11 & - & 12 & 11 \\
\infty & 8 & \infty & 12 & 12 & - & \infty \\
11 & 15 & 6 & \infty & 11 & \infty & -
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

№ 3. Докажите, что в простом графе с не менее чем двумя вершинами найдутся две вершины одинаковой степени.

Вариант №12

№ 1. Заданы множества V – множество точек на координатной плоскости, множество E. Построить граф $G=(V, E)$

1. Составить матрицы смежности и инцидентности.
2. Определить степени вершин.
3. Вычислить радиус и диаметр графа.

V	x_1=(1, 1)	x_2=(2, 2)	x_3=(2, 4)	x_4=(2, 5)	x_5=(3, 5)	x_6=(5, 5)	x_7=(3, 2)	x_8=(5, 2)
E	$(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_5, x_6), (x_3, x_5), (x_6, x_8), (x_2, x_7), (x_7, x_8), (x_5, x_7)$							

№ 2. По заданной матрице весов графа G найти путь от вершины x_1 до вершины x_6 минимального веса. Вычислить вес пути.

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
- & 10 & 11 & \infty & 14 & \infty & 12 \\
10 & - & 10 & 9 & \infty & \infty & 7 \\
11 & 10 & - & 12 & 10 & \infty & 6 \\
\infty & 9 & 12 & - & 9 & 12 & \infty \\
14 & \infty & 10 & 9 & - & 11 & 12 \\
\infty & \infty & \infty & 12 & 11 & - & \infty \\
12 & 7 & 6 & \infty & 12 & \infty & -
\end{pmatrix}
\end{array}.$$

№ 3. Найдите максимальное число ребер в простом графе с $2n+1$ вершинами, не содержащем треугольников (циклов длины 3)

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти все вершины заданного графа, недостижимые от заданной его вершины.

2. Определить, верно ли, что для любой пары вершин заданного орграфа одна из этих вершин достижима от другой.

3. Определить, является ли ободом заданный граф.

4. Определить, является ли связным заданный граф.

5. Найти длину кратчайшего цикла в графе.

6. Для двух выделенных вершин графа построить соединяющий их простой путь.

7. Найти самый длинный простой путь в графе.

8. Найти все вершины графа, к которым существует путь заданной длины от выделенной его вершины.

9. Найти такую нумерацию вершин орграфа, при которой всякая дуга ведет от вершины с меньшим номером к вершине с большим номером.

10. Найти все вершины орграфа, от которых существует путь заданной длины к выделенной вершине.

11. *Источником* орграфа называют вершину, от которой достижимы все другие вершины; *стоком* -- вершину, достижимую от всех других вершин. Найти все источники и стоки данного орграфа.

12. Известно, что заданный граф -- не дерево. Проверить, можно ли удалить из него одну вершину (вместе с инцидентными ей ребрами), чтобы в результате получилось дерево.

13. Подсчитать количество компонент связности в дополнении заданного графа.

14. Найти такую вершину заданного графа, которая принадлежит каждому пути между двумя выделенными (различными) вершинами и отлична от каждой из них.

15. Вершины и ребра графа называют его *элементами*. По графу G построить граф $T(G)$, у которого в качестве вершин взяты элементы G, а

две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие элементы в G смежны или инцидентны.

16. Пусть $d(u)$ -- степень вершины u в графе G. *Степенью* ребра $x =< u, v >$ назовем неупорядоченную пару $< d(u), d(v) >$. Определить, совпадают ли степени всех ребер заданного графа, и если нет, то можно ли удалить из него одну вершину (вместе с инцидентными ребрами) так, чтобы полученный граф обладал этим свойством.

17. По графу G построить граф $K(G)$ с тем же множеством вершин, что и у G; вершины в $K(G)$ смежны тогда и только тогда, когда расстояние между ними в G не превышает 2.

Проверить, совпадают ли степени всех вершин в $K(G)$, и если нет, то нельзя ли удалить из него одну вершину так, чтобы полученный граф удовлетворял этому требованию.

18. Задан орграф с циклами. Проверить, можно ли удалить одну вершину так, чтобы в полученном орграфе не было циклов длины меньше заданной.

19. По графу G построить граф G' следующим образом: в качестве вершин в G' берутся ребра графа G: две вершины в G' смежны тогда и только тогда, когда смежны соответствующие ребра в G. В G' найти все вершины, расстояние от которых до некоторой выделенной равно 2.

20. В заданном дереве, все вершины которого имеют степень не больше 3, найти самый длинный путь от выделенной вершины до вершины со степенью 1.

21. Из графа удалить все вершины, от которых недостижима заданная вершина.

22. Для заданного натурального n $(n \geq 3)$ построить граф, не содержащий циклов длиной 3, в котором степени всех вершин равны 3.

23. Найти *диаметр* графа, т.е. максимум расстояний между всевозможными парами его вершин.

24. Вершина графа называется *точкой сочленения*, если ее удаление приводит к увеличению числа компонент связности. Найти все точки сочленения заданного графа.

25. Найти *медиану* графа, т.е. такую его вершину, что сумма расстояний от нее до остальных вершин минимальна.

26. По графу G построить последовательность графов $G_1, \ldots, C_n$ с тем же множеством вершин, что и у G (здесь n -- максимум расстояний для пар вершин в G, между которыми имеется соединяющий их путь). Ребро между вершинами в G_i проводится тогда и только тогда, когда расстояние между соответствующими вершинами в G не превышает i.

27. *Гамаком* называется подграф заданного орграфа с таким непустым множеством вершин A, что существует не более одной вершины в A, к которой ведут дуги от вершин вне A, и не более одной вершины вне A, к которой ведут дуги от вершин множества A. Найти количество различных гамаков графа.

28. Задана система односторонних дорог. Найти путь, соединяющий города A и B и не проходящий через заданное множество дорог.

29. Система двусторонних дорог называется *трисвязной*, если для любой четверки разных городов A, B, C, D существует два различных пути из A в D, причем один из них проходит через B, а другой -- через C. Определить, является ли трисвязной заданная система двусторонних дорог.

30. В системе двусторонних дорог для каждой пары городов указать длину кратчайшего пути между ними.

31. Задана система двусторонних дорог. Найти два города и соединяющий их путь, который проходит через каждую из дорог системы ровно один раз.

32. Задана система двусторонних дорог. Найти замкнутый путь длиной не более 100 км, проходящий через каждую дорогу ровно один раз.

33. В заданном графе указать все его четырехвершинные полные подграфы.

34. Задана система двусторонних дорог, причем для любой пары городов можно указать соединяющий их путь. Найти такой город, для которого сумма расстояний до остальных городов минимальна.

35. По системе односторонних дорог определить, есть ли в ней город, из которого можно добраться до каждого из остальных городов, проезжая не более 100 км.

36. По системе двусторонних дорог определить, можно ли, построив какие-нибудь новые три дороги длиной 10 км каждая, добраться из заданного города до каждого из остальных городов, проезжая не более 100 км.

37. По системе двусторонних дорог определить, можно ли, закрыв какие-нибудь три дороги, добиться того, чтобы из города A нельзя было попасть в город B.

38. Задана система двусторонних дорог. N- *периферией* называется множество городов, расстояние от которых до выделенного города (столицы) больше N. Определить N-периферию для заданного N.

39. Определить, можно ли в заданной системе односторонних дорог проехать из города A в город B таким образом, чтобы посетить город C и не проезжать никакой дороги более одного раза.

40. В системе двусторонних дорог за проезд каждой дороги взимается некоторая пошлина. Найти путь из города A в город B с минимальной величиной $S \times P$, где S -- сумма длин дорог пути, а P -- сумма пошлин проезжаемых дорог.

41. Заданы две системы двусторонних дорог с одним и тем же множеством городов (железные и шоссейные дороги). Найти минимальный по длине путь из города A в город B (который может проходить как по железным, так и по шоссейным дорогам) и места пересадок с одного вида транспорта на другой на этом пути.

42. В орграфе без циклов выделены вершины v и w. Найти какое-нибудь множество путей M из v в w такое, что ни одна вершина, кроме v и w, не лежит на двух путях из M и любое расширение M приводит к нарушению этого свойства.

43. Построить дерево двоичного поиска для заданного множества целых чисел и занумеровать его вершины в соответствии с их обходом во внутреннем порядке.

44. Построить дерево двоичного поиска для заданного множества целых чисел и занумеровать его вершины в соответствии с порядком прямого обхода этого дерева.

45. Построить дерево двоичного поиска для заданного множества целых чисел и занумеровать его вершины в соответствии с их порядком при обратном обходе этого дерева.

46. Множество целых чисел представить в виде дерева двоичного поиска и на основе этого представления напечатать числа в порядке убывания их значений.

47. Заданы граф и дерево. Удалить из графа часть ребер, чтобы полученный граф был изоморфен дереву.

48. К множеству целых чисел S, представленному в виде АВЛ-дерева, добавить число n так, чтобы множество $S \cup \{n\}$ также оказалось представленным в виде АВЛ-дерева.

49. Решить предыдущее задание для случая, когда число n требуется удалить из множества S

50. Множество целых чисел S представляется в виде 2-3-дерева следующим образом: листьям приписываются элементы S (в любом порядке), а нелисту v -- наименьшее из чисел в поддереве с корнем v. По множествам S_1 и $S_2, S_1 \cap S_2 = \varnothing$, построить соответствующее представление для $S_1 \cup S_2$.

51. Множество целых чисел S представлено в виде 2-3-дерева следующим образом: листьям приписаны элементы S в порядке возрастания слева направо; нелисту v приписана пара чисел (a, b), где a -- наибольшее число в поддереве, корнем которого является самый левый преемник v, а b -- наибольшее из чисел в поддереве, корень которого есть второй преемник v. Добавить к S число n так, чтобы множество $S \cup \{n\}$ оказалось представленным таким же образом.

52. Решить предыдущее задание для случая, когда число n требуется удалить из S.

53. Найти максимальное по числу вершин подмножество попарно несмежных вершин заданного графа.

54. Заданы граф и положительное число k. Раскрасить вершины графы в k красок, т.е. сопоставить каждой вершине графа число из

отрезка $1, 2, \ldots, k$ (краску) таким образом, чтобы смежным вершинам были сопоставлены разные числа.

55. *Компонентой сильной связности* в орграфе называется такой его подграф, в котором любые две вершины взаимно достижимы и который не содержится в другом подграфе, удовлетворяющем этому условию. Построить компоненты сильной связности для заданного орграфа.

56. Найти минимальное подмножество вершин заданного орграфа, от которых достижимы все остальные его вершины.

57. Определить, изоморфны ли два заданных графа.

58. Определить, изоморфен ли заданный граф своему дополнению.

59. Подсчитать количество попарно не изоморфных графов с n вершинами и четырьмя ребрами.

60. Пусть фиксирована нумерация вершин орграфа. Дуга называется *обратной* при этой нумерации, если она ведет от вершины с большим номером к вершине с меньшим номером. Построить такую нумерацию вершин заданного орграфа, при которой число обратных дуг минимально.

61. Подмножество вершин графа называется *доминирующим*, если каждая вершина вне подмножества смежна хотя бы с одной вершиной этого подмножества. Найти минимальное по числу вершин доминирующее подмножество вершин заданного графа.

62. Говорят, что вершина графа *накрывает* ребро, если она инцидента этому ребру. *Вершинным покрытием* графа называется множество вершин, накрывающих все его ребра. Построить минимальное по числу вершин вершинное покрытие заданного графа.

63. Найти все подграфы заданного графа, которые являются ободами.

64. Граф называется *вершинно-симметричным*, если для любой пары его вершин существует автоморфизм, переводящий первую вершину во вторую. Определить, является ли вершинно-симметрическим заданный граф.

65. Вершину графа a называют *неподвижной*, если она является неподвижной точкой любого его автоморфизма ϕ, т.е. $\phi(a) = a$. Найти все неподвижные вершины заданного графа.

66. Определить, является ли заданный граф гамильтоновым.

67. Граф называется *асимметричным*, если у него имеется единственный автоморфизм -- тождественный. Определить, является ли асимметричным заданный граф.

68. Определить, является ли заданный граф *двудольным*, т.е. можно ли разбить множество его вершин на два подмножества так, чтобы каждое ребро соединяло вершины из разных подмножеств.

69. В графе найти максимальное (по количеству ребер) подмножество попарно несмежных ребер.

70. Ребро графа накрывает его вершину, если оно инцидентно этой вершине. Найти минимальное (по количеству ребер) подмножество ребер, накрывающих все вершины заданного графа.

71. Найти минимальное (по количеству ребер) подмножество ребер, удаление которых превращает заданный связный граф в несвязный.

72. В заданном графе найти максимальный по количеству вершин полный подграф.

73. v-*интервалом* орграфа называется максимальный среди его подграфов G, который можно построить по следующим правилам: (1) вершина v включается в пустой граф G; (2) если все предшественники некоторой вершины u уже содержатся в G, то u также включается в G. Построить v-интервалы для всех вершин v заданного орграфа.

74. Пусть G -- орграф, в вершинах которого расположены фишки, а состояние G задается количеством фишек в каждой из его вершин. Говорят, что *состояние* s' *достижимо из состояния* s *за один шаг*, если s' можно получить из s следующим образом: сначала удаляются все фишки, находящиеся в одной из его вершин (скажем, в вершине p), а затем такое же количество фишек добавляется каждому преемнику вершины p. Найти все (различные) состояния G, которые достижимы из некоторого заданного не более, чем за k шагов.

75. Решить предыдущее задание, изменив понятие достижимости следующим образом: s' достижимо из sза один шаг, если существует вершина p, каждый предшественник которой имеет хотя бы одну фишку, а s' получается из s удалением одной фишки у каждого предшественника вершины p и добавлением одной фишки каждому преемнику вершины p.

76. *Мостом* графа называется такое ребро, удаление которого увеличивает число компонент связности графа. Найти все мосты заданного графа.

77. Подсчитать количество попарно не изоморфных графов, содержащих не более четырех вершин.

78. *Треугольником* графа называют всякую тройку различных и попарно смежных вершин этого графа. *Склеиванием* треугольника называется следующая операция: три вершины, составляющие треугольник, удаляются из графа вместе со всеми инцидентными им ребрами; добавляется новая вершина v, а ребро $< w, v >$ добавляется тогда и только тогда, когда вершина w была смежна хотя бы с одной вершиной удаленного треугольника. Последовательным применением операции склеивания треугольника преобразовать исходный граф в такой, в котором нет треугольников.

79. По орграфу G построить орграф G', который получается из G последовательным применением (пока это возможно) следующих преобразований: (1) если v -- вершина из G с единственным предшественником u $(u \neq v)$ и единственным преемником w $(w \neq v)$, то она удаляется из G вместе с дугами (u, v) и (v, w), а затем добавляется новая дуга (u, w); (2) если v -- вершина без предшественников и преемников, то она просто удаляется из G.

80. Через $\Gamma_G(W)$ обозначим подмножество вершин орграфа $G = (V, E)$, которые являются преемниками вершин из W. Найти такое максимальное по числу вершин подмножество W $(W \subset V, W \neq V)$ вершин заданного графа, для которого $\Gamma_G(W) \subset W$.

81. Найти длину самого длинного простого пути от города A до города B в заданной системе односторонних дорог.

82. По заданной системе односторонних дорог определить, есть ли в ней город, куда можно попасть из любого другого города, проезжая не более 100 км.

83. По заданному орграфу G построить орграф его транзитивного замыкания, т.е. такой орграф G', в котором множество вершин совпадает с множеством вершин G, а любые две его вершины u, v являются смежными тогда и только тогда, когда в G существует путь из u к v.

84. Проверить, является ли заданный граф *транзитивным*, т.е. таким, что для любых трех вершин u, v, w выполняется условие: если вершины u и w, а также v и w смежны, то вершины u и v также смежны.

85. Для заданного целого $n > 0$ построить граф с n вершинами, в котором степень каждой вершины равна 4.

86. Найти количество разных простых путей, соединяющих пары вершин заданного ориентированного графа.

87. Задан ориентированный ациклический граф. Найти минимальное число попарно непересекающихся простых путей, содержащих все вершины графа.

88. По заданной вершине графа распечатать все вершины, из которых есть путь в данную. Вершины должны печататься в порядке не убывания их расстояния до заданной: сначала сама вершина, потом ее соседи, потом соседи соседей (еще не напечатанные) и т.д.

89. Заданы система односторонних дорог и положительное число X. Подсчитать количество разных простых путей длины Y, $X \le Y$, между двумя заданными городами.

90. Заданы граф и целое положительное число K. Подмножество вершин графа называется *независимым*, если никакие две вершины не соединены в графе ребром. Найти разбиение множества вершин V исходного графа на такие независимые подмножества $V_1, V_2, \ldots, V_k$, где $k \ge K$, что объединение любой пары V_i и V_j, $1 \le i < j \le k$, не есть независимое множество.

91. Заданы два графа G и H, такие, что G содержит в заданное число k раз больше вершин, чем H. Раскрасить вершины G в k цветов так, чтобы любой подграф G, образованный всеми одноцветными вершинами, был изоморфен графу H.

92. Заданы система односторонних дорог и положительные числа K и S. Найти такое подмножество из k дорог, где $k \le K$, которое содержит по крайней мере одну дорогу из каждого замкнутого маршрута, имеющего длину не более S.

93. Проверить, можно ли раскрасить ребра графа в два цвета так, чтобы в графе не было треугольника, ребра которого окрашены одним цветом.

94. Заданы граф G и положительное целое число K. Раскрасить вершины G в k цветов, где $k \le K$, таким образом, чтобы был ациклическим любой подграф, образованный всеми одноцветными вершинами.

95. Решить задание 94 таким образом, чтобы был полным любой подграф, образованный всеми одноцветными вершинами.

96. Решить задание 94 таким образом, чтобы любой подграф, образованный всеми одноцветными вершинами, состоял только из вершин степени 1.

97. Заданы граф, положительное целое число K и неотрицательное целое число S. Можно ли удалить часть ребер из графа таким образом, чтобы осталось не менее K ребер, граф был бы связным и не имел вершин степени более S.

98. Задан орграф G и положительное целое число K. Можно ли удалить из орграфа часть дуг таким образом, чтобы осталось не менее K дуг и для любой пары его вершин имелся по крайней мере один путь, соединяющий их.

99. Задан граф. Удалить из него часть ребер (но не все!) таким образом, чтобы любая вершина имела степень равную 3 или 0.

100. Задан орграф, в котором выделены две вершины, и целое число K. Пометить не более K дуг так, чтобы для любых двух путей, соединяющих две выделенные вершины, существовала помеченная дуга, принадлежащая ровно одному пути.

Вопросы к экзамену по дисциплине
по дисциплине «Теория графов и ее приложения»
специальность 090303 «Информационная безопасность автоматизированных систем»

1. Определение графа. Виды графов: простые графы, ориентированные графы, мультиграфы, псевдографы.
2. Элементы графа: часть, подграф, правильный подграф, суграф.
3. Смежность и инцидентность. Свойства матриц смежности и инцидентности.
4. Степени вершин графа. Лемма о рукопожатии.
5. Операции над графами.
6. Изоморфизм графов.
7. Полные, двудольные, регулярные графы.
8. Маршруты. Цепи. Циклы. Метрические характеристики графа.
9. Маршруты с заданным количеством ребер.
10. Нахождение кратчайших путей в графе (волновой алгоритм).
11. Нахождение кратчайших путей в графе (алгоритм Дейкстры).
12. Нахождение кратчайших путей в графе (алгоритм Белмана-Мура).
13. Связность. Компоненты связности. Теорема об оценке количества ребер в связном графе.
14. Связность в орграфах.
15. Матрицы достижимости.
16. Транзитивное замыкание графа. Алгоритм Уоршолла.
17. Вершинная и реберная связность. Теорема о соотношении вершинной и реберной связности в графе.
18. Теорема Менгера.
19. Независимые множества вершин и ребер. Доминирующие множества. Теорема о максимальном независимом множестве.
20. Клики. Теорема о связи клик и независимых множеств.
21. Сети. Потоки в сетях.
22. Алгоритм Форда-Фалкерсона.
23. Определение свободного дерева. Свойства свободных деревьев.
24. Остов. Теорема Киркгофа (без доказательства).
25. Остов экстремального веса (алгоритм Прима).
26. Остов экстремального веса (алгоритм Краскала).
27. Кодирование свободных деревьев.
28. Ориентированные деревья и их свойства.
29. Упорядоченные деревья. Кодирование упорядоченных деревьев.
30. Бинарные деревья. Представление упорядоченного дерева бинарным.
31. Сбалансированные деревья. Теорема о высоте сбалансированного дерева.
32. Циклы. Фундаментальная система циклов.
33. Эйлеровы циклы. Теорема о необходимых и достаточных условиях.
34. Гамильтовновы циклы. Достаточные условия.
35. Планарные графы. Эйлерова характеристика планарных графов.
36. Раскраска графов. Теорема о раскраске планарного графа.

Примерные задачи к экзамену по дисциплине
по дисциплине «Теория графов и ее приложения»

специальность 090303 «Информационная безопасность автоматизированных систем»

№ 1. Заданы множества V – множество точек на координатной плоскости и множество E. Построить граф $G(V, E)$

1. Составить матрицы смежности и инцидентности.
2. Определить степени вершин.
3. Вычислить радиус и диаметр графа.

V	x_1=(1, 3)	x_2=(3, 5)	x_3=(6, 5)	x_4=(2, 2)	x_5=(3, 3)	x_6=(1, 0)	x_7=(3, 0)	x_8=(6, 2)
E	$(x_1, x_2), (x_2, x_5), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_1, x_6), (x_2, x_7), (x_6, x_7)$							

№ 2. По матрице смежности построить наглядное изображение графа

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

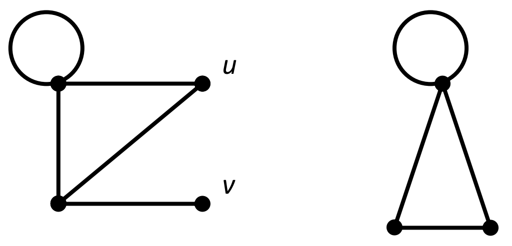
Определить тип графа (простой, мультиграф, псевдограф). Составить матрицу инцидентности.

№ 3. По матрице инцидентности построить наглядное изображение графа

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

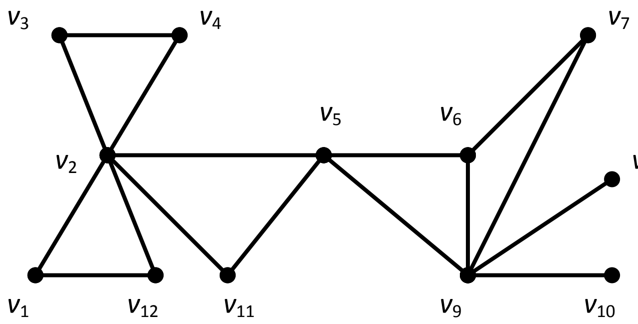
Определить тип графа. Составить матрицу смежности, определить степень каждой вершины.

№ 4. Заданы графы G_1и G_1. Построить $G_1 \cup G_2$, $\overline{G_2}$, $G_1 \setminus \{u, v\}$.



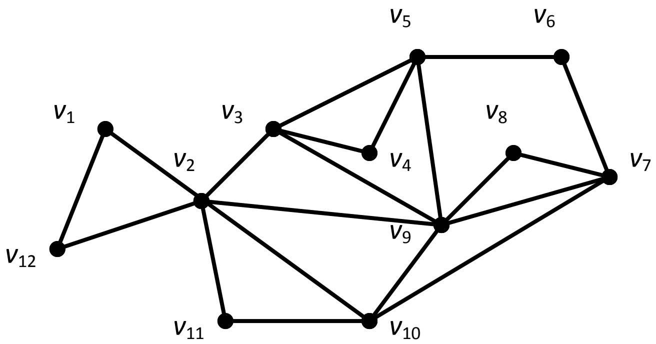
G_1 G_2

№ 5. Найти эксцентриситеты вершин графа, радиус, диаметр, центральные и периферийные вершины.



№ 6. Построить граф, центр которого состоит точно из трех вершин и не совпадает с множеством всех вершин.

№ 7. С помощью волнового алгоритма найти кратчайшие расстояния от v_1 до всех остальных вершин графа



№ 8. По заданной матрице весов графа G найти путь от вершины x_1 до вершины x_6 минимального веса. В каждом случае вычислить вес пути.

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 6 & 11 & 5 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 6 & 7 & 6 \\ \infty & -5 & - & \infty & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & -4 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

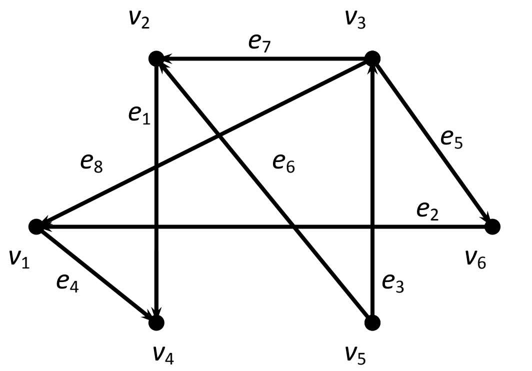
№ 9. По заданной матрице весов графа G найти путь от вершины x_1 до вершины x_6 минимального веса. В каждом случае вычислить вес пути.

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 5 & 10 & 13 & \infty & \infty \\ \infty & - & 8 & 9 & 13 & \infty \\ \infty & \infty & - & 5 & 3 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & - & 8 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}.$$

№ 10. По данной матрице пропускных способностей найти максимальный поток в сети G.

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
- & 18 & 16 & - & - & 9 & - \\
- & - & 8 & 11 & 7 & - & 13 \\
- & - & - & - & 13 & - & 19 \\
- & - & 10 & - & - & 15 & - \\
- & - & - & 17 & - & 28 & - \\
- & - & - & - & - & - & 14 \\
- & - & - & - & - & - & -
\end{pmatrix}
\end{array}$$

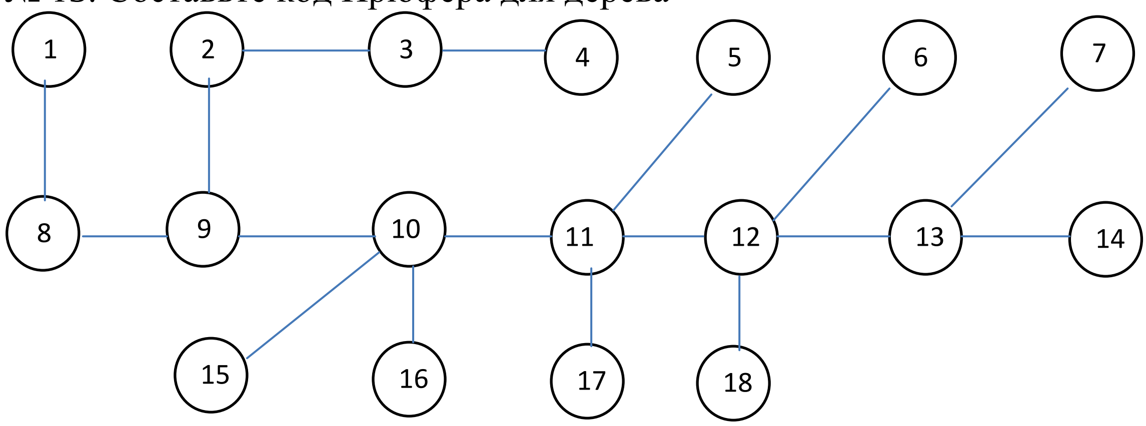
№ 11. В графе найдите: наибольшее независимое множество вершин, наименьшее доминирующее множество, максимальную клику. Определите плотность графа.



№ 12. Для графа G, заданного матрицей весов, построить остов минимального веса G' и найти его вес $\omega(G')$

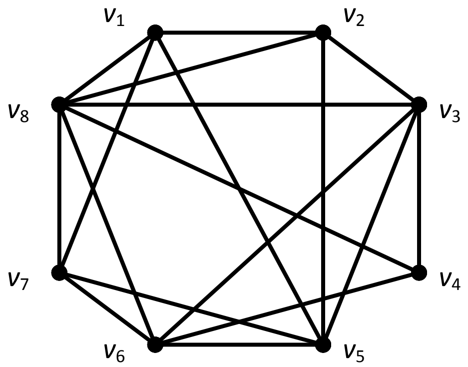
$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
- & 10 & \infty & 5 & \infty & \infty & 14 \\
10 & - & 6 & 2 & 4 & 8 & \infty \\
\infty & 6 & - & 3 & 1 & 1 & \infty \\
5 & 2 & 3 & - & 6 & \infty & 3 \\
\infty & 4 & 1 & 6 & - & 5 & \infty \\
\infty & 8 & 1 & \infty & 5 & - & 2 \\
14 & \infty & \infty & 3 & \infty & 2 & -
\end{pmatrix}
\end{array}.$$

№ 13. Составьте код Прюфера для дерева



№ 14. Постройте дерево, для которого код Прюфера имеет вид (3,3,7,4,6,5,2,9,5,3,6)

№ 15. Найдите цикломатическое число графа. Составьте матрицу фундаментальных циклов.



№ 16. В связном графе 18 вершин. Сколько ребер содержит его остов?

№ 17. Укажите номера вопросов, на которые Вы дадите ответ «да». Верно ли, что:

1) цикломатическое число дерева равно 0?

2) всякое дерево является планарным графом?

3) фундаментальная система циклов дерева состоит из одного цикла?

4) формула для нахождения цикломатического числа справедлива и для непланарных графов?

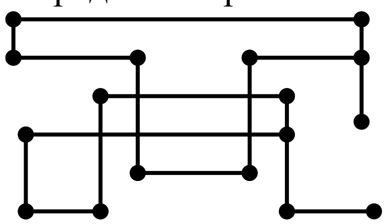
5) формула для нахождения цикломатического числа справедлива и для псевдографов?

6) одновершинный граф с одной петлей является деревом?

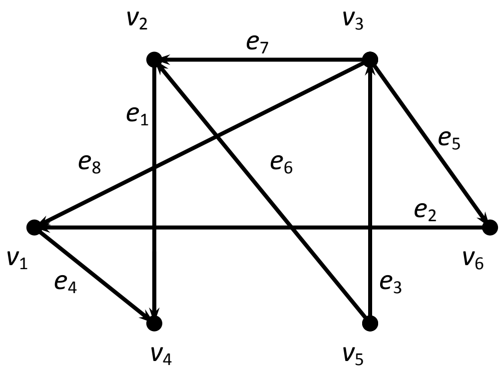
7) изолированная вершина может быть компонентой леса?

8) граф, в котором число ребер равно числу вершин может быть деревом?

№ 18. Определите хроматическое число графа



№ 19. Является ли граф планарным?



Проверочный тест по дисциплине
«Теория графов и ее приложения»

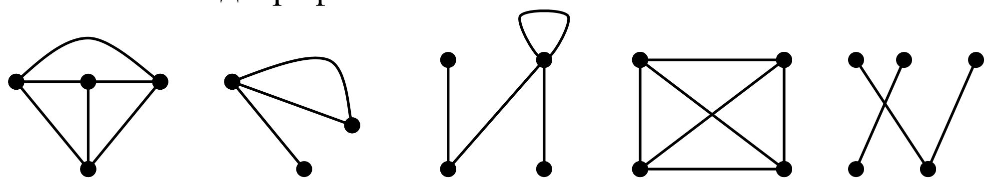
Выполнил студент____

ФИО, группа

Вариант-1

ЗАДАНИЕ № 1 (*выберите все правильные варианты ответа*)

Укажите псевдографы



а) *б)* *в)* *г)* *д)*

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) *а*; **2)** *б* **3)** *в* **4)** *г*; 5) *д*.

ЗАДАНИЕ № 2 (*выпишите последовательность номеров правильных ответов в порядке возрастания*)

Укажите номера всех пар вершин, являющихся смежными

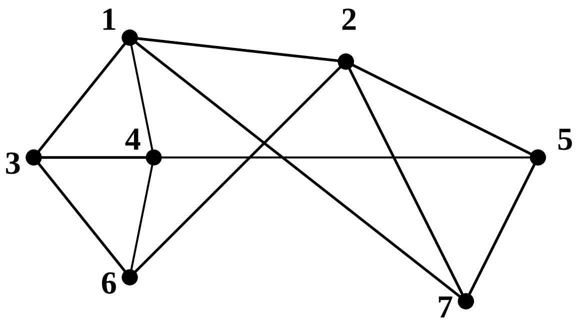


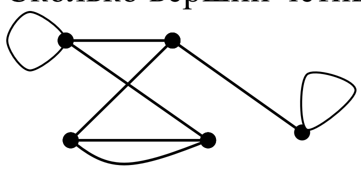
Рис.2.

1) 1 и 2; 2) 1 и 5; 3) 3 и 4; 4) 3 и 5;
5) 1 и 7; 6) 2 и 7; 7) 6 и 7; 8) 2 и 1.

ВАРИАНТ ОТВЕТА:

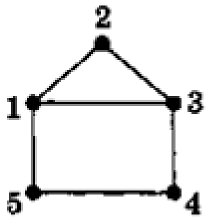
ЗАДАНИЕ № 3 (*выпишите правильный ответ*)

Сколько вершин четных степеней в графе, изображенном на рисунке

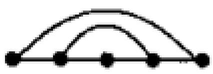


ВАРИАНТ ОТВЕТА:

ЗАДАНИЕ № 4 *(выпишите последовательность номеров правильных ответов в порядке возрастания)*
Укажите номера графов, изоморфных графу



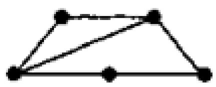
1)



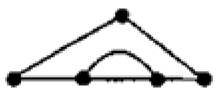
2)

3)

4)



5)



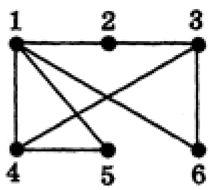
6)

ВАРИАНТ ОТВЕТА:

ЗАДАНИЕ № 5 *(выпишите правильный ответ)*
Сколько ребер в однородном (регулярном) графе, если $n = 7$ и $p = 6$?

ВАРИАНТ ОТВЕТА:

ЗАДАНИЕ № 6 *(выпишите правильный ответ)*
Укажите эксцентриситеты всех вершин графа



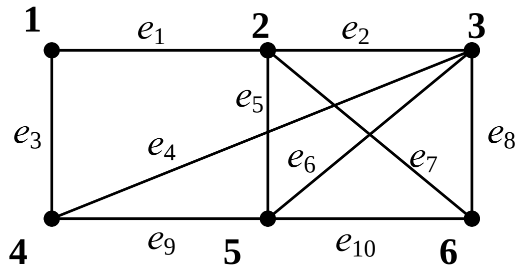
ВАРИАНТ ОТВЕТА: *(выпишите последовательность правильных ответов в порядке возрастания номеров вершин)*

ЗАДАНИЕ № 7 *(выпишите правильный ответ)*
Сколько ребер имеет полный двудольный граф, если $|V_1| = 4$; $|V_2| = 7$?

ВАРИАНТ ОТВЕТА:

ЗАДАНИЕ № 8 (*выпишите правильный ответ*)

Дан граф



В нижеприведенном списке укажите маршруты, не являющиеся цепями

1) 2 e_2 3;
2) 1 e_3 4 e_4 3 e_4 4 $e_3$1;
3) 2 e_2 3 e_8 3;
4) 3 e_4 4 e_9;
5) 3 e_6 5 e_{10}4;
6) 2 e_2 3 e_8 6 e_{10} 5 e_5 2 e_2 3 e_4 4;
7) e_4 3 e_2 2 e_1
8) 1 e_1 3 e_2 4
9) 1 e_1 2 e_2 4 e_3 1.

ВАРИАНТ ОТВЕТА:

ЗАДАНИЕ № 9 (*выпишите правильный ответ*)

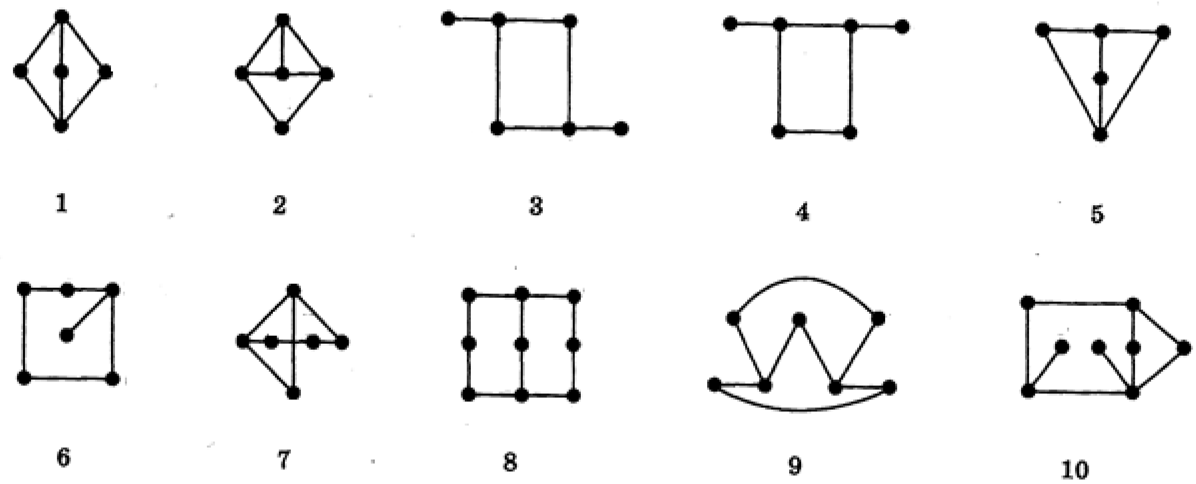
Граф задан множеством вершин и множеством ребер: V={1, 2, 3, 4, 5, 6},
E={{1, 2}, {2,6}, {3,4}}; 5) {{1, 2}, {2, 5}, {3, 6}}

Определите число компонент связности графа.

ВАРИАНТ ОТВЕТА:

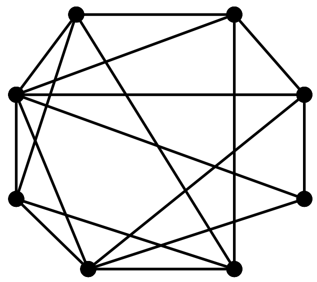
ЗАДАНИЕ № 10 (*выпишите последовательность номеров правильных ответов в порядке возрастания*)

Укажите номера гамильтоновых графов



ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

ЗАДАНИЕ № 11 (*выпишите правильный ответ*)
Найдите цикломатическое число графа



ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

ЗАДАНИЕ № 12 (*выпишите правильный ответ*)
В связном графе 20 вершин и 40 ребер. Сколько ребер необходимо удалить, чтобы получить остов?
ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

ЗАДАНИЕ № 13 (*выпишите последовательность номеров правильных ответов в порядке возрастания*)
Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да». Верно ли, что:

1) цикломатическое число дерева равно нулю?
2) всякое дерево является планарным графом?
3) фундаментальная система циклов дерева состоит из одного цикла?
4) одновершинный граф с одной петлей является деревом?
5) изолированная вершина может быть компонентой леса?
6) граф, в котором число ребер равно числу вершин, может быть деревом?

ВАРИАНТ ОТВЕТА:

ЗАДАНИЕ № 14 (*выпишите правильный ответ*)
Дерево задано кодом Прюфера (1,4,3,3,3,5). Укажите номера висячих вершин
ВАРИАНТ ОТВЕТ:

Проверочный тест по дисциплине
«Теория графов и ее приложения»

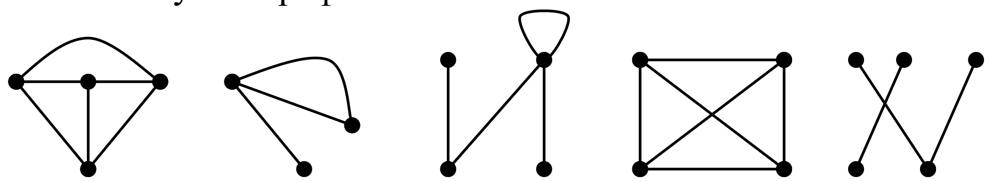
Выполнил студент____

ФИО, группа

Вариант-2

ЗАДАНИЕ № 1 (*выберите все правильные варианты ответа*)

Укажите мультиграфы



а) *б)* *в)* *г)* *д)*

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) *а*; **2)** *б* **3)** *в* **4)** *г*; 5) *д*.

ЗАДАНИЕ № 2 (*выпишите последовательность номеров правильных ответов в порядке возрастания*)

Укажите номера всех пар ребер, являющихся смежными

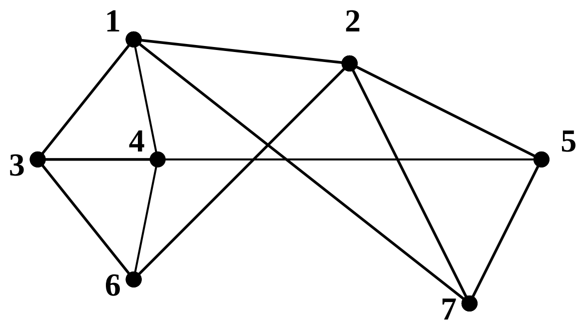


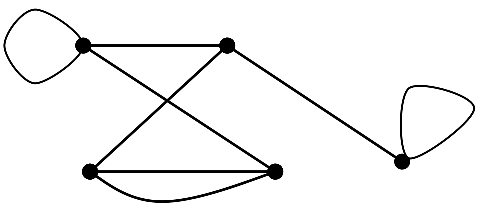
Рис.2.

1) {1, 4} и {2, 5}; 2) {3, 4} и {4, 5}; 3) {4, 6} и {2, 6};
4) {1, 7} и {2, 7}; 5) {2, 6} и {5, 7}; 6) {2, 6} и {2, 5};

ВАРИАНТ ОТВЕТА:

ЗАДАНИЕ № 3 (*выпишите правильный ответ*)

Сколько вершин нечетных степеней в графе, изображенном на рисунке



ВАРИАНТ ОТВЕТА:

ЗАДАНИЕ № 4 (*выпишите последовательность номеров правильных ответов в порядке возрастания*)

Укажите номера вопросов, на которые Вы дадите утвердительные ответы:

1) могут ли быть изоморфными графы, не содержащие ребер?
2) даны два полных графа с одинаковым числом вершин. При всякой ли нумерации вершин сохраняются условия изоморфизма этих графов?
3) даны два однородных графа с одинаковым числом вершин. Всякая ли нумерация вершин этих графов удовлетворяет условиям изоморфизма?
4) применимо ли понятие изоморфизма к псевдо графам?
5) может ли непустой граф быть изоморфным своему собственному подграфу?
6) является ли изоморфизм отношением эквивалентности?
7) могут ли быть изоморфными графы, содержащие разное число вершин?
8) могут ли быть изоморфными графы, содержащие разное число ребер?

ВАРИАНТ ОТВЕТА:

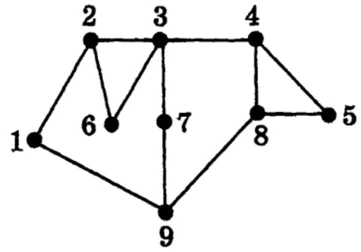
ЗАДАНИЕ № 5 (*выпишите правильный ответ*)

В полном графе 18 вершин. Сколько в нем ребер, инцидентных одной вершине?

ВАРИАНТ ОТВЕТА:

ЗАДАНИЕ № 6 (*выпишите правильный ответ*)

Укажите диаметр и радиус графа



ВАРИАНТ ОТВЕТА:

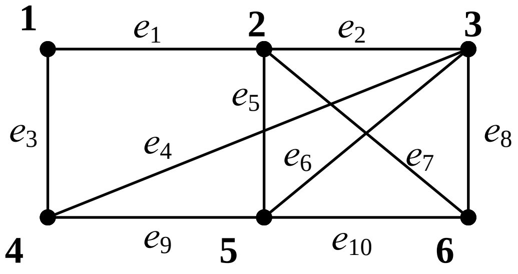
ЗАДАНИЕ № 7 (*выпишите правильный ответ*)

В полном двудольном графе степень каждой вершины множества V_1 равна 6, степень каждой вершины множества V_2 равна 8. Сколько ребер в графе?

ВАРИАНТ ОТВЕТА:

ЗАДАНИЕ № 8 *(выпишите последовательность номеров правильных ответов в порядке возрастания)*

Дан граф



В нижеприведенном списке укажите цепи, не являющиеся простыми

1) 2 e_2 3;	4) 3 e_4 4 e_9;	7) e_4 3 e_2 2 e_1
2) 1 e_3 4 e_4 3 e_8 6;	5) 3 e_6 5 e_{10}4;	8) 1 e_1 3 e_2 4
3) 2 e_2 3 e_8 6 e_7 2 e_5 5;	6) 2 e_2 3 e_8 6 e_{10} 5 e_5 2;	9) 1 e_1 2 e_2 4 e_3 1.

ВАРИАНТ ОТВЕТА:

ЗАДАНИЕ № 9 *(выпишите правильный ответ)*

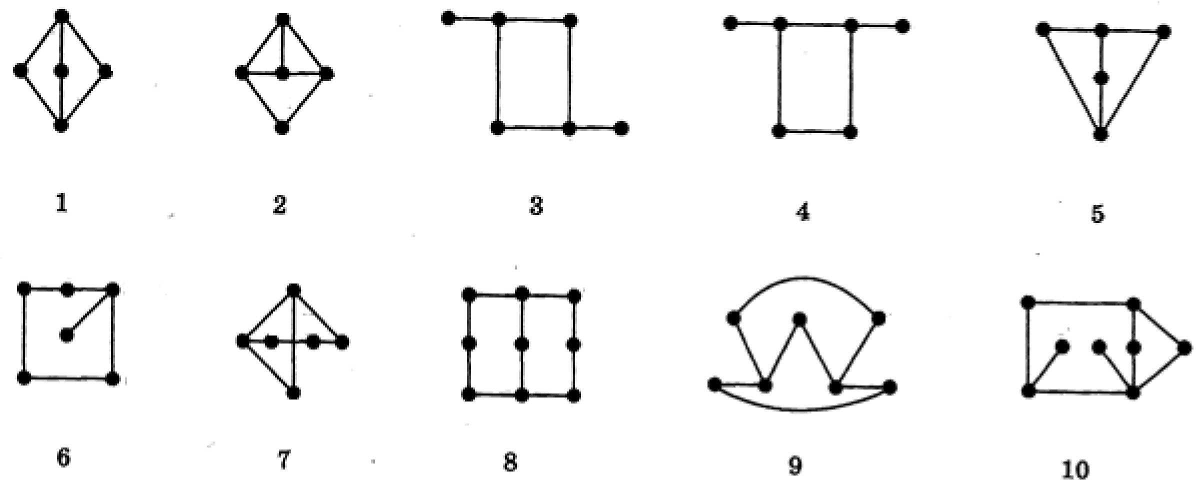
Граф задан множеством вершин и множеством ребер: V={1, 2, 3, 4, 5, 6},
E={{1,6}, {2, 3}, {3, 4}}; 8) {{1, 2}, {2, 3}, {4, 5}}.

Определите число компонент связности графа.

ВАРИАНТ ОТВЕТА:

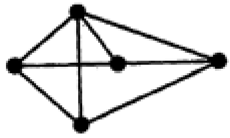
ЗАДАНИЕ № 10 *(выпишите последовательность номеров правильных ответов в порядке возрастания)*

Укажите номера полугамильтоновых графов



ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

ЗАДАНИЕ № 11 (*выпишите правильный ответ*)
Найдите цикломатическое число графа



ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

ЗАДАНИЕ № 12 (*выпишите правильный ответ*)
В дереве 25 вершин. К нему добавили 4 ребра. Сколько ребер стало в графе?
ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

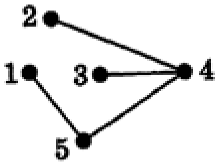
ЗАДАНИЕ № 13 (*выпишите последовательность номеров правильных ответов в порядке возрастания*)

Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да»:

1) может ли двудольный граф содержать петли?
2) является ли двудольным граф, содержащий одну вершину?
3) может ли быть двудольным простой граф, содержащий 35 ребер?
4) во всяком ли полном двудольном графе существует гамильтонов цикл?
5) существует ли двудольный граф, содержащий замкнутую эйлерову цепь?
6) существуют ли связные двудольные графы, в которых все вершины множества V_1 являются четными, а все вершины множества V_2 — нечетными?

ВАРИАНТ ОТВЕТА:

ЗАДАНИЕ № 14 (*выпишите правильный ответ*)
Найдите код Прюфера для дерева



ВАРИАНТ ОТВЕТ:

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»
(СГАУ)

СОГЛАСОВАНО

Управление образовательных программ

________________/ А.В. Дорошин /

"_____"________________ 20___ г.

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

_____________/ В.Н. Матвеев /

"____" ______________ 20___ г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование модуля (дисциплины)

Теория графов и ее приложения

Цикл, в рамках которого происходит освоение модуля (дисциплины)	Математический и естественнонаучный цикл		
Часть цикла	базовая часть		

Код учебного плана

090303.2.65-2011-О-П-4г00м

Факультет	информатики		
Кафедра	прикладной математики		
Курс	3		
Семестр	5		
Лекции (СЛ)	36		
Семинарские и практические занятия (СП)	36		
Лабораторные занятия (СЛР)	0	Экзамен	5
Контроль самостоятельной работы / Индивидуальные занятия (КСР / ИЗ)	0	Зачет	
Самостоятельная работа (СРС)	36		
Всего (Всего с экзаменами)	108		

Наименование стандарта, на основании которого составлена рабочая программа:

090303 "Информацтонная безопасность автоматизированных систем"

Соответствие содержания рабочей программы, условий ее реализации, материально-технической и учебно-методической обеспеченности учебного процесса по дисциплине всем требованиям государственных стандартов подтверждаем.

Составители:

к.ф.-м.н., доц. Додонова Н.Л. ________________________________
(подпись)

Заведующий кафедрой:

д.т.н., проф. Привалов А.Ю. ________________________________
(подпись)

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры

прикладной математики

Протокол №___ от "____" _____________ 20___ г.

Наличие основной литературы в фондах научно-технической библиотеки (НТБ) подтверждаем:

Директор НТБ _________________ /______________________/
(подпись) (расшифровка подписи)

Согласовано:

Декан _________________ /______________________/
(подпись) (расшифровка подписи)

1 Цели и задачи модуля (дисциплины), требования к уровню освоения содержания

1.1 Перечень развиваемых компетенций

ОК-3, ОК-9 - общекультурные компетенции
ПК-2, ПК-3 - профессиональные компетенции
ПСК-7.1 - профессионально-специализированные компетенции

1.2 Цели и задачи изучения модуля (дисциплины)

Знакомство с фундаментальными понятиями теории графов для последующего свободного использования моделей и алгоритмов теории графов к различным задачам.

1.3 Требования к уровню подготовки студента, завершившего изучение данного модуля (дисциплины)

В результате изучения дисциплины студент должен:
1. иметь представление об основных понятиях теории графов;
2. знать и уметь использовать методы теории графов для решения практических задач;
3. иметь навыки применения алгоритмов теории графов для решенияоптимизационных задач.

1.4 Связь с предшествующими модулями (дисциплинами)

Для успешного усвоения курса студентам достаточно знакомства с основными сведениями из теории множеств и комбинаторики, изучение которых ведется в рамках курса «Дискретная математика».

1.5 Связь с последующими модулями (дисциплинами)

Сведения, полученные при изучении этого курса необходимы для дальнейшего освоения следующих дисциплин: организация ЭВМ и вычислительных систем, основы информационной безопасности, разработка и эксплуатация защищенных автоматизированных систем и др.

2 Содержание рабочей программы (модуля)

Семестр 1		
СЛ 0,3333 36 часов 1 ЗЕТ	Активные 0,5	Начальные понятия: виды графов; изоморфизм графов; операции над графами; понятия смежности и инцидентности
		Маршруты, цепи, циклы: метрические характеристики графов, алгоритмы нахождения экстремальных маршрутов
		Связность: компоненты связности; компоненты сильной связности в орграфах; транзитивное замыкание

		Покрытия в графах: независимые и доминирующие множества; клики
	Интерактивные 0,5	Сети, потоки в сетях: определение сети, понятие потока и его свойства, теорема Форда-Фалкерсона. Элементы сетевого планирования
		Деревья: свободные деревья, кодирование свободных деревьев. Остов графа. Алгоритмы нахождения остовов экстремального веса. Ориентированные деревья. Упорядоченные деревья. Сбалансированные деревья.
		Циклы. Эйлеровы и гамильтоновы графы. Фундаментальные системы циклов. Цикломатическое число графа
		Планарные графы. Раскраски графов. Хроматическое число
	Традиционные 0	
СП 0,3333 36 часов 1 ЗЕТ	Активные 0,5	Виды графов; изоморфизм графов; операции над графами; матрицы смежности и инцидентности; лемма о рукопожатиях
		Метрические характеристики графов: радиус, диаметр, эксцентриситеты вершин. Алгоритм Дейкстры, алгоритм Беллмана-Мура, алгоритм Флойда нахождения экстремальных маршрутов
		ахождение компонент связности в неориентированных графах. Компоненты сильной связности в орграфах. Транзитивное замыкание, алгоритм Уоршолла
		Нахождение независимых и доминирующих множеств. Максимальные клики
	Интерактивные 0,5	Построение максимального потока в сети, алгоритм Форда-Фалкерсона. Элементы сетевого планирования
		Свободные деревья, кодирование свободных деревьев. Остов графа. Алгоритмы Прима и Краскала нахождения остовов экстремального веса. Ориентированные деревья. Упорядоченные деревья. Сбалансированные деревья.
		Эйлеровы и гамильтоновы графы. Построение фундаментальной системы циклов. Цикломатическое число графа
		Планарные и плоские графы. Раскраски графов. Хроматическое число

	Традиционные 0	
СЛР 0 0 часов 0 ЗЕТ	Активные 0	
	Интерактивные 0	
	Традиционные 0	
КСР 0 0 часов 0 ЗЕТ	Активные 0	
	Интерактивные 0	
	Традиционные 0	
СРС 0,3333 36 часов 1 ЗЕТ	Активные 0	
	Интерактивные 1	ИДЗ №1: Графы. Операции над графами
		ИДЗ №2: Кратчайшие маршруты
		ИДЗ №3: Связность
		ИДЗ №4: Сети. Потоки в сетях
		ИДЗ №5: Деревья
		ИДЗ №6: Циклы
		ИДЗ №7: Планарные графы
	Традиционные 0	

3 Инновационные методы обучения

1. Использование тестов для текущего и семестрового контроля знаний студентов в компьютерном классе.
2. Использование электронных изданий методических материалов присамостоятельной работе студентов.

4 Технические средства и материальное обеспечение учебного процесса

Компьютерный класс, используемый при проведении контрольного тестирования.

5 Учебно-методическое обеспечение

5.1 Основная литература

1. Дискретная математика для программистов./ Новиков Ф.А.-СПб.; Питер, 2006. –304 с. (4 экз)
2. Графы в программировании: обработка, визуализация и применение [Текст] / В.Н. Касьянов, В. А. Евстигнеев. - СПб. : БХВ-Петербург, 2003. - 1104 с. (5 экз).

5.2 Дополнительная литература

1. Харари Ф. Теория графов. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009г. – 296с.
2. Оре О. Графы и их применение. – М.: КомКнига, 2006 г. – 168с.
3. Теория графов [Текст] : Алгоритмы обработки бесконтурных графов / В. А.Евстигнеев, В. Н. Касьянов ; отв. ред. И. В. Поттосин ; Рос. акад. наук, Сиб.отд-ние, Ин-т систем информатики. - Новосибирск : Наука. Сиб. предприятие РАН, 1998. - 385 с. (4 экз)

5.3 Электронные источники и интернет ресурсы

Электронный каталог библиотеки СГАУhttp://lib.ssau.ru/digicat

5.4 Методические указания и рекомендации

Текущий контроль знаний студентов в семестре завершается на отчетном занятии, результатом которого является допуск или недопуск студента к экзамену по дисциплине. Основанием для допуска к экзамену является выполнение студентом всех индивидуальных заданий. Экзамен проводится согласно положению о текущем и промежуточном контроле знаний студентов, утвержденному ректором университета. Экзамен ставится на основании письменного ответа студента побилету, а также, при необходимости, ответов на дополнительные вопросы. Билет включает один теоретическийвопрос и две задачи. В качестве дополнительного задания может быть предложен как теоретический вопрос, так и задача.