М. В. Игнатьев

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Самара
2013

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра алгебры и геометрии

М. В. Игнатьев

Линейная алгебра

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве сборника задач

Самара
Издательство «Самарский университет»
2013

УДК 512.64
ББК 22.143
И 26

Рецензент
канд. физ.-мат. наук, доц. Л. В. Кучма

Игнатьев, М. В.
И 26 Линейная алгебра : сборник задач / М. В. Игнатьев. — Самара : Изд-во «Самарский университет», 2013. — 80 с.

Данное пособие соответствует программе курса линейной алгебры, читаемого в СамГУ, и содержит задачи по следующим темам: определители, алгебра матриц, ранг матрицы, системы линейных уравнений, векторные пространства, линейные операторы, собственные числа и собственные векторы, билинейные и квадратичные формы, евклидовы пространства и ортогонализация базиса, сопряжённые и самосопряжённые операторы. Все задачи снабжены ответами. В каждый параграф включены основные определения и примеры решения всех типов стандартных задач по данной теме. Имеются также более сложные задания для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов первого курса механико-математического и физического факультетов.

УДК 512.64
ББК 22.143

Предисловие

Линейная алгебра и геометрия — несомненно, одна из самых красивых и интересных дисциплин на первом курсе любой математической или физической специальности. В основу предлагаемого учебного пособия положены практические занятия по линейной алгебре, неоднократно проводившиеся автором в академических группах механико-математического и физического факультетов СамГУ. Пособие разбито на десять параграфов, каждый из которых содержит *краткое* напоминание основных фактов по данной теме, набор стандартных упражнений, а также *чуть* более сложные задачи для самостоятельного решения.

Задачник ориентирован, в первую очередь, на студентов младших курсов. Он полностью соответствует программе курса линейной алгебры, читаемого на в СамГУ. Не слишком большое количество часов, отводимое учебным планом на практические занятия, заставило *чрезвычайно* тщательно подойти к выбору излагаемых тем; впрочем, задача несколько облегчалась в связи с абсолютной «классичностью» материала и наличием достаточного числа *прекрасных* учебников и сборников задач по алгебре и её многочисленным приложениям.

В список литературы включены только *первоклассные* книги, которые мы *без малейшего сомнения* рекомендуем как для первого ознакомления с линейной алгеброй, так и для изучения более глубоких разделов этого удивительно красивого и стройного раздела математики. Классические учебники [K1]–[K3] и [V1] великолепно подходят и для того, и для другого; в книгах [ZO1], [ZO2] содержится подробное и чёткое изложение ряда более тонких вопросов современной алгебры, в том числе, и таких важных для физики, как тензорные алгебры, алгебры Клиффорда и Вейля и т.д. Играющую *важнейшую* роль, к примеру, в квантовой механике теорию представлений проще всего выучить по книгам [V2], [E]. Невероятно интересно курс алгебры изложен в учебниках [KM] и [G].

При подборе стандартных упражнений мы в известной степени опирались на задачники [K4], [D], [DR], [Pa], [Ps]. При этом мы всегда стремились демонстрировать применение разных алгоритмов на одних и тех же «модельных» примерах (пространства многочленов, матриц и т.д.). «Сложные» задачи в основном взяты из замечательного сборника [Pr], который мы горячо рекомендуем всем желающим *действительно* изучить линейную алгебру. Часть таких задач взята из материалов студенческой олимпиады по алгебре Московского университета [Ol], некоторые задачи сочинены автором.

Автор выражает самую искреннюю признательность всем сотрудникам кафедры алгебры и геометрии СамГУ за чудесную атмосферу, за помощь и поддержку при работе над пособием. Автор также благодарит Антона Карпишкова, Павла Никулина и Фёдора Скоробогатого, которые, будучи студентами первого курса, помогли исправить множество опечаток в предварительной версии пособия.

М.В. Игнатьев, 1 сентября 2011 г.

§1. Определители

Пусть $n \geqslant 1$, A — произвольная квадратная *матрица* размера $n \times n$ (то есть квадратная таблица из n строк и n столбцов, заполненная вещественными числами). Будем обозначать элемент матрицы A, стоящий в i-ой строке и j-ом столбце ((i,j)-ый элемент) через a_{ij}. *Определителем* матрицы A называется число, обозначаемое $\det A$, которое вычисляется по следующему правилу. Если $n = 1$, то $\det A = a_{11}$, а для любого $n \geqslant 2$

$$\det A = (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot M_{i1} + \ldots + (-1)^{i+n} \cdot a_{in} \cdot M_{in}.$$

Здесь i — произвольное число от 1 до n, а через M_{ij} обозначается определитель матрицы $(n-1)$-ого порядка, получающейся из матрицы A вычёркиванием i-ой строки и j-ого столбца (он называется *дополнительным минором*). Эта формула для вычисления определителя часто называется формулой *разложения по строке*. Верна также аналогичная формула *разложения по столбцу*: для любого j от 1 до n

$$\det A = (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot M_{1j} + \ldots + (-1)^{n+j} \cdot a_{nj} \cdot M_{nj}.$$

Определитель матрицы A обозначают ещё так:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Пример. Для $n = 2$ и $n = 3$, соответственно,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot M_{11} + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot M_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot M_{11} + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot M_{12} + (-1)^{1+3} \cdot a_{13} \cdot M_{13} =$$

$$= a_{11} \cdot (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12} \cdot (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13} \cdot (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Если определитель матрицы A равен нулю, то она называется *вырожденной* (а если не равен нулю — *невырожденной*). По определению, *транспонированная* матрица A^t получается из матрицы A отражением относительно *главной диагонали* — линии, на которой стоят элементы $a_{11}, \ldots, a_{nn}$. (Другими словами, i-ая строка матрицы A совпадает с i-ым столбцом матрицы A^t; иначе говоря, (i,j)-ый элемент A^t равен a_{ji}.)

При вычислении определителя используются следующие его свойства:

1. $\det A^t = \det A$.

2. Если в матрице A есть нулевая строка или столбец, то $\det A = 0$.

3. Пусть α — любое число. Если к каждому элементу какой-то строки (столбца) матрицы прибавить соответствующий элемент какой-то другой строки (столбца) этой матрицы, умноженный на число α, то определитель матрицы не изменится.

4. Если какая-то строка (столбец) матрицы A поэлементно равна сумме двух других строк (столбцов) этой матрицы, то $\det A = 0$.

5. Если умножить каждый элемент какой-то строки (столбца) матрицы на число α, то определитель этой матрицы умножится на α.

6. Если поменять в матрице местами любые две строки (два столбца), то её определитель сменит знак.

Пример. Вычислим определитель матрицы четвёртого порядка (обратите внимание, что все числа в первой строке чётны):

$$\begin{vmatrix} 14 & 6 & 4 & 12 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{array}{l} -\mathrm{IV} \qquad\qquad\qquad \end{array} \end{array} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ -1 & -9 & 4 & 9 \\ 4 & -2 & 7 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ +\mathrm{I} \\ -4\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} \end{array} =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & -6 & 6 & 15 \\ 0 & -14 & -1 & -21 \\ 0 & -6 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -6 & 6 & 15 \\ -14 & -1 & -21 \\ -6 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-12 + 756 - 210 - 90 - 126 - 168) = 300.$$

Сначала мы с помощью *элементарных преобразований* (которые, ввиду третьего свойства, не меняют значение определителя) добились того, чтобы в первом столбце матрицы все элементы, кроме одного, равнялись нулю, а затем использовали формулу разложения по первому столбцу.

Матрица A называется *верхнетреугольной* (соответственно, *нижнетреугольной*), если $a_{ij} = 0$ при $i > j$ (соответственно, при $i < j$). И верхнетреугольные, и нижнетреугольные матрицы иногда называют просто *треугольными*. Говорят, что матрица *диагональна*, если $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$ (элементы a_{ii}

называются *диагональными*). Определитель треугольной (в частности, диагональной) матрицы равен произведению диагональных элементов.

Вычислите следующие определители:

1.1. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$ **1.2.** $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ **1.3.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

1.4. $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$ **1.5.** $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$ **1.6.** $\begin{vmatrix} 6 & 7 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

1.7. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$ **1.8.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ **1.9.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$

1.10. $\begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}$ **1.11.** $\begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ **1.12.** $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 1 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

1.13. $\begin{vmatrix} \frac{3}{4} & 2 & -\frac{1}{2} & -5 \\ 1 & -2 & \frac{3}{2} & 8 \\ \frac{5}{6} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{14}{3} \\ \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{2} & \frac{12}{5} \end{vmatrix}$ **1.14.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$ **1.15.** $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

1.16. $\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \\ \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$ **1.17.** $\begin{vmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{vmatrix}$ **1.18.** $\begin{vmatrix} 35 & 59 & 71 & 52 \\ 42 & 70 & 77 & 54 \\ 43 & 68 & 72 & 52 \\ 29 & 49 & 65 & 50 \end{vmatrix}$

1.19*. Матрица A называется *кососиметрической*, если $A^t = -A$. а) Докажите, что определитель кососимметрической матрицы нечётного порядка равен нулю. б) Докажите, что определитель кососимметрической матрицы чётного порядка не изменится, если к каждому её элементу прибавить одно и то же число. в) Вычислите определитель кососимметрической матрицы порядка $2n$, у которой все элементы выше главной диагонали — единицы.

1.20*. Вычислите определитель матрицы n-ого порядка, (i, j)-ый элемент которой равен $a^{|i-j|}$, где a — некоторое вещественное число.

1.21*. а) Докажите, что из n^2 положительных чисел нельзя составить невырожденную матрицу тогда и только тогда, когда одно из чисел встречается в этом наборе более $n^2 - n + 1$ раз. б) Докажите, что если в строке $x_1, \ldots, x_n$ не все числа равны между собой и $x_1 + \ldots + x_n \neq 0$, то из некоторых перестановок этой строки можно составить невырожденную матрицу размера $n \times n$. (*Перестановка* строки — это строка, составленная из тех же чисел, записанных, возможно, в другом порядке.) в) Проверив сто контрольных студентов первого курса физического факультета, ассистент кафедры алгебры и геометрии СамГУ обнаружил, что из полученных оценок нельзя составить невырожденную матрицу (возможные оценки 1, 2, 3, 4, 5). Ассистент очень расстроился, исправил одну из единиц на двойку и составил из оценок матрицу с определителем 162. Какие оценки получили студенты?

§2. Алгебра матриц

Пусть A — матрица размера $m \times n$, а B — матрица размера $n \times k$. Их *произведением* называется матрица $C = AB = A \cdot B$ размера $m \times k$, (i, j)-ый элемент которой, по определению, равен

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant k.$$

Пример. Перемножим две квадратные матрицы третьего порядка:

$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 4 \\ \hline 3 & 2 & -5 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 4 & -2 \\ 5 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{array}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1 - 1\cdot 5 + 3\cdot 0 & 2\cdot 4 - 1\cdot 3 + 3\cdot(-2) & 2\cdot(-2) - 1\cdot(-1) + 3\cdot 3 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 5 + 4\cdot 0 & 0\cdot 4 + 1\cdot 3 + 4\cdot(-2) & 0\cdot(-2) + 1\cdot(-1) + 4\cdot 3 \\ 3\cdot 1 + 2\cdot 5 - 5\cdot 0 & 3\cdot 4 + 2\cdot 3 - 5\cdot(-2) & 3\cdot(-2) + 2\cdot(-1) - 5\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -1 & 6 \\ 5 & -5 & 11 \\ 13 & 28 & -23 \end{pmatrix}.$$

Умножение матриц *ассоциативно*: если X, Y, Z — матрицы размеров $m\times n$, $n\times k$ и $k\times l$ соответственно, то $(XY)Z = X(YZ)$. В то же время, легко привести пример квадратных матриц A, B одного размера, для которых $AB \neq BA$, то есть умножение матриц, вообще говоря, *не коммутативно.*

Матрицы одного размера можно также складывать между собой и умножать на числа. Эти операции определяются поэлементно: если A, B — две матрицы размера $m \times n$ и λ — любое число, то, по определению,

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}, \quad \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь A — квадратная матрица порядка n, а E — *единичная* матрица того же порядка, то есть матрица, на главной диагонали у которой стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $AE = EA = A$ (это объясняет название матрицы E). Квадратная матрица B порядка n называется *обратной* к A, если $AB = BA = E$. Она обозначается так: $B = A^{-1}$. Если обратная матрица существует, то она определяется по матрице A единственным образом. Матрицы, для которых существует обратные, называются *обратимыми* (а остальные — *необратимыми*). Матрица обратима тогда и только тогда, когда она является невырожденной, то есть A^{-1} существует в том и только в том случае, когда $\det A \neq 0$.

В этом случае обратная матрица ищется следующим образом. Для каждого элемента a_{ij} матрицы A обозначим через A_{ij} его *алгебраическое дополнение*: по определению, $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, где M_{ij} — дополнительный минор. Тогда $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot A^*$, где A^* — так называемая *присоединённая* матрица:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \dots & A_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пример. Пусть $A = \begin{pmatrix} 10 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $\det A = -1 \neq 0$, поэтому она обратима. Найдём алгебраические дополнения:

$$
\begin{aligned}
&A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad && A_{21} = -\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad && A_{31} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5, \\
&A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2, && A_{22} = \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2, && A_{32} = -\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -9, \\
&A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3, && A_{23} = -\begin{vmatrix} 10 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2, && A_{33} = \begin{vmatrix} 10 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 14.
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$
A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & -9 \\ -3 & 2 & 14 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & 9 \\ 3 & -2 & -14 \end{pmatrix}.
$$

Другой способ нахождения обратной матрицы заключается в следующем. Припишем к матрице A справа единичную матрицу и, проводя элементарные преобразования со строками полученной матрицы размера $n \times 2n$, добьёмся, чтобы в «левой части» этой матрицы получилась единичная матрица (если A обратима, то это возможно). Тогда в «правой части» получится A^{-1}.

Пример. Найдём обратную матрицу другим способом:

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -10\mathrm{I} \\ -2\mathrm{I} \end{array} \sim
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & -9 & 1 & -10 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -5\mathrm{III} \\ \\ \end{array} \sim
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +3\mathrm{II} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -14 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\mathrm{III} \\ -\mathrm{III} \\ \\ \end{array} \sim
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -3 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -14 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\mathrm{II} \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -14 \end{array}\right).
$$

Также допускается умножать любую строку на любое ненулевое число (нам просто не понадобилось это элементарное преобразование).

Вариацией на тему произведения матриц является решение так называемых *матричных уравнений*. Предположим, что A, B, C — квадратные матрицы одного и того же размера. Мы хотим найти квадратную матрицу X того же размера, удовлетворяющую условию $AX = B$. (Мы всегда предполагаем, что матрица A обратима). Ответом будет матрица $X = A^{-1}B$. Аналогично, решением матричного уравнения $XA = B$ будет матрица $X = BA^{-1}$, а решением матричного уравнения $AXC = B$ — матрица $X = A^{-1}BC^{-1}$ (здесь матрица C тоже предполагается обратимой).

Пример. Решим матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 4 & -10 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -24 & 20 \\ 34 & -28 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -5 & -\dfrac{7}{2} \\ -2 & -\dfrac{3}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -24 & 20 \\ 34 & -28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вычислите произведение матриц:

2.1. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

2.2. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

2.3. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

2.4. $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

2.5. $\begin{pmatrix} 5 & 7 & -3 & -4 \\ 7 & 6 & -4 & -5 \\ 6 & 4 & -3 & -2 \\ 8 & 5 & -6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

2.6. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 & 6 & 9 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2.7. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2.8. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$

2.9. $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^5$

2.10. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 70 & 34 & -107 \\ 52 & 26 & -68 \\ 101 & 50 & -140 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27 & -18 & 10 \\ -46 & 31 & -17 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы для следующих матриц:

2.11. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **2.12.** $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ **2.13.** $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

2.14. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ **2.15.** $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ **2.16.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

2.17. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **2.18.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$

Решите матричные уравнения:

2.19. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ **2.20.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

2.21. $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$ **2.22.** $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$

2.23. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$

2.24. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$

Возведите следующие матрицы в степень (n — любое натуральное число):

2.25***.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$ **2.26*****.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$

2.27***.** $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$ **2.28*****.** $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$

2.29*. Пусть J — матрица размера $n \times n$, у которой элементы, стоящие сразу над главной диагональю, равны единице, а остальные — нулю (иначе говоря, $a_{i,i+1} = 1$ для всех i от 1 до $n-1$ и $a_{ij} = 0$ при $j \neq i+1$). Пусть $m < n$. Найдите J^m.

2.30*. Напомним, что для любой матрицы через A^* обозначается присоединённая матрица. Пусть A, B, X — невырожденные квадратные матрицы одного размера. Докажите, что

а) $(AB)^* = B^*A^*$,

б) $(XAX^{-1})^* = XA^*X^{-1}$,

в) если $AB = BA$, то $A^*B = BA^*$.

2.31*. Напомним, что матрица A называется *симметрической* (соответственно, *кососимметрической*), если $A^t = A$ (соответственно, $A^t = -A$). Пусть A — кососимметрическая матрица размера $n \times n$. Докажите, что A^* будет симметрической при чётном n и кососимметрической при нечётном n.

2.32*. а) Напомним, что матрица A размера $n \times n$ называется *верхнетреугольной*, если $a_{ij} = 0$ при $i > j$. Докажите, что матрица, обратная к невырожденной верхнетреугольной матрице, тоже будет верхнетреугольной. б) Матрица A размера $n \times n$ называется *ортогональной*, если

$$A^tA = E.$$

Докажите, что ортогональная матрица будет невырожденной, причём обратная к ней тоже ортогональна. в) Матрица A размера $2n \times 2n$ называется *симплектической*, если $A^tJA = E_{2n}$, где

$$J = \begin{pmatrix} 0_n & E_n \\ -E_n & 0_n \end{pmatrix},$$

E_n — единичная матрица размера $n \times n$, 0_n — нулевая матрица размера $n \times n$, а E_{2n} — единичная матрица размера $2n \times 2n$. Докажите, что симплектическая матрица является невырожденной, причём обратная к ней тоже будет симплектической.

2.33*. Пусть A, B — квадратные матрицы одного и того же порядка n. Обозначим через 0_n и E нулевую и единичную матрицы того же порядка соответственно. Найдите

$$\begin{pmatrix} E & A & 0_n \\ 0_n & E & B \\ 0_n & 0_n & E \end{pmatrix}^{-1}.$$

§3. Ранг матрицы

Напомним, что *n-мерным координатным вещественным пространством* называется множество упорядоченных наборов из n вещественных чисел:

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Произвольный элемент $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ называется *n-мерным вектором*, а числа $x_1, \ldots, x_n$ — его *координатами*. Пусть $\bar{x}, \bar{y}$ — любые два вектора, а $\lambda \in \mathbb{R}$ — любое число. По определению, $\bar{x} + \bar{y}$ и $\lambda\bar{x}$ — это векторы вида

$$\bar{x} + \bar{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \lambda\bar{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

(Другими словами, сложение векторов и умножение их на числа определяются покоординатно.)

Вектор, все координаты которого равны нулю, обозначается $\bar{0}$ и называется *нулевым* вектором. Векторы $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_m$ называются *линейно независимыми*, если из того, что $\alpha_1\bar{v}_1 + \ldots + \alpha_n\bar{v}_n = \bar{0}$ для каких-то чисел α_i, следует, что все эти числа равны нулю: $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$ — любая конечная система векторов. Набор векторов $B \subset S$ называется *базой* системы S, если он состоит из линейно независимых векторов, а при добавлении к нему любого вектора из S становится линейно зависимым. Все базы S состоят из одного и того же числа векторов; оно обозначается $\operatorname{rk} S$ и называется *рангом* системы векторов S.

Далее, пусть A — любая матрица размера $m \times n$ (мы будем обозначать множество всех таких матриц через $\mathrm{Mat}(m \times n)$). Её *рангом* называется ранг системы её столбцов, то есть

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \right\}.$$

Ранг матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда она состоит из одних нулей. При вычислении ранга часто пользуются следующими его свойствами:

1. $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A^t$.

2. Ранг матрицы равен рангу системы её строк.

3. Ранг матрицы не превосходит $\min\{m, n\}$.
4. Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях её строк и столбцов.
5. $\operatorname{rk} AB \leqslant \min\{\operatorname{rk} A, \operatorname{rk} B\}$.
6. Если B — невырожденная квадратная матрица, то $\operatorname{rk} AB = \operatorname{rk} A$.
7. (*Теорема о вычислении ранга*) Ранг матрицы равен наибольшему порядку ненулевого её минора.

Напомним, что *минором k-ого порядка* матрицы A называется определитель

$$M_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k} = \begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \ldots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \ldots & a_{i_2j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \ldots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix}.$$

Здесь $1 \leqslant k \leqslant n$ и $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$, $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant n$ — любые числа. Иначе говоря, минор A — это определитель какой-то её *подматрицы*.

Пример. Найдём ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & -5 \\ 3 & -9 & 8 & -1 & -11 \\ 4 & -12 & 12 & -3 & -9 \\ -1 & 3 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -3\mathrm{I} \\ -4\mathrm{I} \\ +\mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2\mathrm{II} \\ \times 1/2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ +\mathrm{III} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

На последнем шаге мы удалили нулевую строку, так как она не влияет на ранг матрицы. Ранг полученной матрицы не больше трёх, так как в ней всего три строки. Но он и не меньше трёх, ибо $M_{1,2,3}^{1,3,4} = -2 \neq 0$. Значит, он равен трём. Однако элементарные преобразования не меняют ранг матрицы, поэтому и $\operatorname{rk} A = 3$.

Найдите ранг матрицы:

3.1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ **3.2.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

3.3. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ **3.4.** $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

3.5. $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$ **3.6.** $\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}$

3.7. $\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$ **3.8.** $\begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}$

Найдите ранг матрицы в зависимости от параметра λ:

3.9*. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ **3.10*.** $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

3.11*. Пусть A — квадратная матрица размера $n \times n$, (i, j)-ый элемент которой равен $a_{ij} = x_i + y_j$ для некоторых фиксированных чисел $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$. Докажите, что $\operatorname{rk} A \leqslant 2$.

3.12*. а) Пусть $A \in \operatorname{Mat}(m \times n)$, $\operatorname{rk} A = r$. Докажите, что существуют такие матрицы $B \in \operatorname{Mat}(m \times r)$ и $C \in \operatorname{Mat}(r \times n)$, что $\operatorname{rk} B = \operatorname{rk} C = r$ и $A = BC$. б) Пусть $P \in \operatorname{Mat}(n \times n)$, $\operatorname{rk} P = r$. Докажите, что $P^2 = P$ тогда и только тогда, когда существуют такие матрицы $B \in \operatorname{Mat}(n \times r)$ и $C \in \operatorname{Mat}(r \times n)$, что $\operatorname{rk} B = \operatorname{rk} C = r$, $P = BC$, а CB — это единичная матрица r-ого порядка.

3.13*. Найдите ранг матрицы в зависимости от параметра X:

$$\setcounter{MaxMatrixCols}{60}\begin{pmatrix}
2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2\\
2&X&X&2&2&2&2&2&X&X&2&2&X&X&2&2&2&2&2&2&X&X&2&2&2&X&X&X&X&2&2&2&X&X&X&X&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2\\
2&X&X&X&2&2&2&X&X&X&2&2&X&X&2&2&2&2&2&2&X&X&2&2&X&X&X&X&X&X&2&X&X&X&X&X&X&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2\\
2&X&X&X&X&2&X&X&X&X&2&2&X&X&2&2&2&2&2&2&X&X&2&2&X&X&X&X&X&X&X&X&X&X&X&X&X&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2\\
2&X&X&2&X&X&X&2&X&X&2&2&X&X&2&2&2&2&2&2&X&X&2&2&X&X&X&X&X&X&X&X&X&X&X&X&X&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2\\
2&X&X&2&2&X&2&2&X&X&2&2&X&X&X&X&X&2&2&2&X&X&2&2&2&X&X&X&X&X&X&X&X&X&X&X&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2\\
2&X&X&2&2&2&2&2&X&X&2&2&X&X&X&X&X&X&2&2&X&X&2&2&2&2&X&X&X&X&X&X&X&X&X&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2\\
2&X&X&2&2&2&2&2&X&X&2&2&X&X&2&2&2&X&X&2&X&X&2&2&2&2&2&X&X&X&X&X&X&X&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2\\
2&X&X&2&2&2&2&2&X&X&2&2&X&X&2&2&2&X&X&2&X&X&2&2&2&2&2&2&X&X&X&X&X&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2\\
2&X&X&2&2&2&2&2&X&X&2&2&X&X&X&X&X&X&2&2&X&X&2&2&2&2&2&2&2&X&X&X&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2\\
2&X&X&2&2&2&2&2&X&X&2&2&X&X&X&X&X&2&2&2&X&X&2&2&2&2&2&2&2&2&X&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2\\
2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2\\
2&2&2&2&X&X&2&2&2&2&2&2&2&X&X&2&2&2&2&X&X&X&X&X&2&X&X&X&X&X&2&X&X&X&X&X&X&2&X&X&X&X&2&2&X&X&2&2&2&2&2&X&X\\
2&2&2&X&X&X&X&2&2&2&2&2&X&X&X&X&2&2&2&X&X&X&X&X&2&X&X&X&X&X&2&X&X&X&X&X&X&2&X&X&X&X&X&2&2&X&X&2&2&2&X&X&2\\
2&2&X&X&2&2&X&X&2&2&2&X&X&2&2&X&X&2&2&X&X&2&2&2&2&X&X&2&2&2&2&X&X&2&2&2&2&2&X&X&2&2&X&X&2&2&X&X&2&X&X&2&2\\
2&X&X&2&2&2&2&X&X&2&X&X&2&2&2&2&X&X&2&X&X&2&2&2&2&X&X&2&2&2&2&X&X&2&2&2&2&2&X&X&2&2&X&X&2&2&2&X&X&X&2&2&2\\
2&X&X&X&X&X&X&X&X&2&X&X&2&2&2&2&X&X&2&X&X&2&2&2&2&X&X&X&X&X&2&X&X&X&X&2&2&2&X&X&X&X&X&2&2&2&2&X&X&2&2&2&2\\
2&X&X&X&X&X&X&X&X&2&X&X&2&2&2&2&X&X&2&X&X&2&2&2&2&X&X&X&X&X&2&X&X&X&X&X&2&2&X&X&X&X&2&2&2&2&X&X&2&2&2&2&2\\
2&X&X&2&2&2&2&X&X&2&X&X&2&2&2&2&X&X&2&X&X&2&2&2&2&X&X&2&2&2&2&X&X&2&2&X&X&2&X&X&2&2&2&2&2&X&X&2&2&2&2&2&2\\
2&X&X&2&2&2&2&X&X&2&X&X&2&2&2&2&X&X&2&X&X&2&2&2&2&X&X&2&2&2&2&X&X&2&2&X&X&2&X&X&2&2&2&2&X&X&2&2&2&2&2&2&2\\
2&X&X&2&2&2&2&X&X&2&X&X&2&2&2&2&X&X&2&X&X&2&2&2&2&X&X&X&X&X&2&X&X&X&X&X&2&2&X&X&2&2&2&X&X&2&2&2&2&2&2&2&2\\
2&X&X&2&2&2&2&X&X&2&X&X&2&2&2&2&X&X&2&X&X&2&2&2&2&X&X&X&X&X&2&X&X&X&X&2&2&2&X&X&2&2&X&X&2&2&2&2&2&2&2&2&2\\
2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2
\end{pmatrix}$$

§4. Системы линейных уравнений

Рассмотрим систему из m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = b_2,\\
\dotfill & \ldots\ldots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m.
\end{cases}$$

Здесь a_{ij}, b_i — произвольные вещественные числа, а $x_1, \ldots, x_n$ — неизвестные переменные. Заметим, что систему можно переписать в виде $A\bar{x} = \bar{b}$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(m \times n), \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Любой вектор $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющий этому условию, называется *решением* системы. Система называется *совместной*, если у неё есть хоть одно решение; если решений нет, то система называется *несовместной* (*противоречивой*). Совместная система, в свою очередь, называется *определённой*, если у неё ровно одно решение; если же решений больше одного (а тогда их обязательно бесконечно много), то система называется *неопределённой*.

Обозначим через $\bar{A}$ так называемую *расширенную* матрицу системы — матрицу размера $m \times (n+1)$, получающуюся из A добавлением столбца $\bar{b}$.

Теорема. (*Критерий Кронекера–Капелли совместности системы линейных уравнений*) Система линейных уравнений $A\bar{x} = \bar{b}$ совместна тогда и только тогда, когда $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} \bar{A}$.

Совместная система линейных уравнений будет определённой в том и только в том случае, когда $\operatorname{rk} A = n$.

Система линейных уравнений называется *однородной*, если $\bar{b} = \bar{0}$. Набор решений $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_s$ однородной системы $A\bar{x} = \bar{0}$ называется *фундаментальной системой решений* (ФСР), если он линейно независим и любое решение можно представить в виде *линейной комбинации* векторов из этого набора, то есть в виде $\alpha_1 \bar{f}_1 + \ldots + \alpha_s \bar{f}_s$ для некоторых чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$.

Однородная система всегда совместна (у неё всегда есть нулевое решение); если она является определённой, то ФСР не существует.

Отметим также, что если $\bar{x}, \bar{y}$ — любые два решения однородной системы и $\alpha \in \mathbb{R}$ — любое число, то $\bar{x} + \bar{y}$ и $\alpha\bar{x}$ будут решениями той же системы.

Пример. Найдём ФСР однородной системы вида

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 &= 0, \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 &= 0, \\ 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 &= 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 &= 0. \end{cases}$$

Сначала, действуя элементарными преобразованиями на строки матрицы A, приведём её к *ступенчатому* виду:

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 6 & 7 & 1 \\ 9 & -3 & 4 & 8 & 9 \\ 6 & -2 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 4 & -1 \\ 9 & -3 & 4 & 8 & 9 \\ 6 & -2 & 2 & 5 & 7 \\ 6 & -2 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ -3\mathrm{I} \\ -2\mathrm{I} \\ -2\mathrm{I} \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & -8 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -3\mathrm{II} \\ -4\mathrm{II} \end{array} \sim$$

$$
\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}
\begin{matrix} \\ \\ \times 1/11 \\ \times 1/10 \end{matrix}
\sim
\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{matrix} \\ \\ \\ -\mathrm{III} \end{matrix}
\sim
$$

$$
\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\sim
\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

В конце мы удалили нулевую строку, так как она соответствует уравнению $0 = 0$. (Вообще, ясно, что каждая строка соответствует некоторому уравнению, причём всякий раз мы переходим к системе, которая *эквивалентна* исходной в том смысле, что имеет то же множество решений, что и исходная.) Ранг полученной матрицы (а он совпадает с $\operatorname{rk} A$) равен 3. Действительно, он не больше трёх, ибо у матрицы всего три строки, и не меньше трёх, так как в матрице есть ненулевой минор третьего порядка: $M^{1,3,5}_{1,2,3} = -6 \neq 0$.

Поделим переменные на *свободные* и *зависимые*. За зависимые можно выбрать любые $r = \operatorname{rk} A = 3$ переменных, столбцы которых образуют в полученной матрице ненулевой минор, например, переменные x_1, x_3, x_5. Остальные $s = n-r = 5-3 = 2$ переменных x_2, x_4 относятся к свободным. Перенесём свободные переменные в правую часть (будем отделять её от левой вертикальной чертой), поменяв при этом знак. Затем, действуя элементарными преобразованиями на строки, приведём матрицу размера $r \times r$, стоящую в левой части, к единичному виду:

$$
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & 4 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \\
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_3 & x_5 & x_2 & x_4 \end{array}
\end{array}
\begin{matrix} +\mathrm{III} \\ +\mathrm{III} \\ \\ \\ \end{matrix}
\sim
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & 4 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \\
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_3 & x_5 & x_2 & x_4 \end{array}
\end{array}
\begin{matrix} +2\mathrm{II} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}
\sim
$$

$$
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \\
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_3 & x_5 & x_2 & x_4 \end{array}
\end{array}
\begin{matrix} \times 1/3 \\ \times(-1/2) \\ \\ \\ \end{matrix}
\sim
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \\
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_3 & x_5 & x_2 & x_4 \end{array}
\end{array}
$$

Теперь, когда в левой части получена единичная матрица, мы можем выразить зависимые переменные через свободные:

$$
\begin{cases}
x_1 = & \dfrac{1}{3}x_2 - \dfrac{2}{3}x_4, \\
x_3 = & -\dfrac{1}{2}x_4, \\
x_5 = & 0, \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R}.
\end{cases}
$$

Полученное выражение называется *общим решением* исходной однородной системы. Имеется в виду, что любое её решение можно получить, выбирая в качестве свободных переменных произвольные вещественные числа и вычисляя зависимые переменные по этим формулам. Напротив, любой набор чисел, являющийся решением системы, будет удовлетворять этим условиям. Короче говоря, числа $x_1, \ldots, x_5$ тогда и только тогда образуют решение исходной системы, когда они связаны указанными выше соотношениями.

Чтобы найти ФСР, будем придавать свободным переменным значения, обеспечивающие линейную независимость получаемых решений:

x_2	x_4	x_1	x_3	x_5
1	0	1/3	0	0
0	1	$-2/3$	$-1/2$	0

(В левой части таблички, соответствующей свободным переменным, должна стоять единичная матрица размера $s \times s$.)

Каждая строка даёт нам координаты вектора из ФСР:

$$
\bar{f}_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{f}_2 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Осталось записать общее решение в векторном виде:

$$
\bar{x}_{\text{общ}} = \alpha_1 \bar{f}_1 + \ldots + \alpha_s \bar{f}_s \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{R}.
$$

В нашем случае

$$
\bar{x}_{\text{общ}} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.
$$

Множество решений исходной однородной системы полностью описано. Использованный метод решения называется *методом Гаусса.*

Решение произвольной (быть может, неоднородной) системы линейных уравнений $A\bar{x} = \bar{b}$ получается несложной модификацией этого метода. А именно, её общее решение может быть представлено в векторном виде как

$$\bar{x}_{\text{общ}} = \bar{x}_{\text{ч}} + \bar{x}^{\text{одн}}_{\text{общ}},$$

где $\bar{x}_{\text{ч}}$ — *частное* решение нашей системы (то есть любое фиксированное её решение), а $\bar{x}^{\text{одн}}_{\text{общ}}$ — общее решение *приведённой* системы $A\bar{x} = \bar{0}$.

Пример. Решим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 & = -4. \end{cases}$$

Будем действовать методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2\mathrm{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -6 \end{array}\right).$$

Ранг равен двум (всего две строки и есть ненулевой минор второго порядка: $M^{1,2}_{1,2} = -1 \neq 0$). Значит, должно быть $r = \operatorname{rk} A = 2$ зависимых переменных и $s = n - r = 3 - 2 = 1$ свободных. Пусть x_1, x_2 — зависимые переменные, а x_3 — свободная. Перенесём свободную переменную в правую часть и выразим зависимые переменные через свободную:

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -6 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} -\mathrm{II} \\ \end{array} \sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -6 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \\ \times(-1) \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \end{array}.$$

Следовательно, общее решение имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = & x_3 + 7, \\ x_2 = & 2x_3 + 6, \quad x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Чтобы найти частное решение, подставим вместо свободной переменной нуль:

$$\bar{x}_{\text{ч}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Обратим теперь внимание, что если бы мы стали решать приведённую систему $A\bar{x} = \bar{0}$ методом Гаусса, то получили бы такое же общее решение, как у исходной системы $A\bar{x} = \bar{b}$, но с нулями вместо чисел 7 и 6. Итак, общее решение приведённой системы имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = \quad x_3, \\ x_2 = \quad 2x_3, \quad x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Значит, в ФСР приведённой системы лежит один вектор $\bar{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Окончательно, $\bar{x}_{\text{общ}} = \bar{x}_{\text{ч}} + \bar{x}^{\text{одн}}_{\text{общ}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_1 \in \mathbb{R}$.

Отметим, что при выборе других свободных и зависимых переменных у нас получился бы, конечно, другой вид общего решения.

Решите системы линейных уравнений:

4.1. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$

4.2. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$

4.3. $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 0, \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 0, \\ -x_3 + x_5 = 0, \\ -x_4 + x_6 = 0. \end{cases}$

4.4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$

4.5. $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

4.6. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 4x_5 = 0. \end{cases}$

4.7. $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 & = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 & = 0, \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 & = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 & = 0. \end{cases}$

4.8. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 & = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 & = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 & = 0, \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 & = 0. \end{cases}$

4.9. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 & = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 & = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 & = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 & = 22. \end{cases}$

4.10. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 & = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 & = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 & = 2. \end{cases}$

4.11. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 & = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 & = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 & = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 & = 12. \end{cases}$

4.12. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 & = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 & = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 & = 1. \end{cases}$

4.13. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 & = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 & = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 & = 3. \end{cases}$

4.14. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 & = 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 & = 7, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 & = 13. \end{cases}$

4.15. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 & = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 & = 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = 4. \end{cases}$

4.16. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 & = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 & = 7, \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 & = 18. \end{cases}$

4.17. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 & = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 & = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 & = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = 5, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 & = 7. \end{cases}$

4.18. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 & = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 & = 5, \\ 5x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 & = 1, \\ x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 & = 7. \end{cases}$

4.19. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 &= 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 &= 2. \end{cases}$

4.20. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 &= 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 &= 1. \end{cases}$

4.21. $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 &= 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= -7, \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 2. \end{cases}$

4.22. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 &= 4, \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 &= 5, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 &= 11, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 &= 6. \end{cases}$

4.23. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 4, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 1. \end{cases}$ **4.24.** $\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 21, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 8, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 &= 15, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 18. \end{cases}$

Исследуйте систему линейных уравнений и найдите её общее решение в зависимости от параметра λ:

4.25*. $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 &= 1. \end{cases}$ **4.26***. $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 &= 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 &= 1. \end{cases}$

4.27*. Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

4.28*. Напомним, что квадратные матрицы A и B одного размера называются *перестановочными* (*коммутирующими*), если $AB = BA$. Найдите все матрицы, перестановочные с матрицей

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.29*. Число называется *рациональным*, если оно может быть представлено в виде отношения двух целых чисел. Докажите, что если прямоугольник, длины сторон которого рациональны, разрезать на квадраты, то длины сторон этих квадратов тоже будут рациональны.

§5. Векторные пространства

Для произвольных множеств X, Y через $X \times Y$ будем обозначать их *декартово произведение* — множество упорядоченных пар вида (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$. Напомним также, что *отображение* $f\colon X \to Y$ — это правило, которое каждому $x \in X$ ставит в соответствие некоторый однозначно определённый элемент $f(x) \in Y$.

Под *векторным пространством* (над $\mathbb{R}$) понимается непустое множество V вместе с отображениями $V \times V \to V\colon (\bar{x}, \bar{y}) \mapsto \bar{x} + \bar{y}$ и $\mathbb{R} \times V \to V\colon (\alpha, \bar{x}) \mapsto \alpha\bar{x}$ (они называются соответственно *сложением* и *умножением на числа*), которые удовлетворяют следующим аксиомам:

1. $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$ для любых $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V$.
2. Существует $\bar{0} \in V$ такой, что $\bar{x} + \bar{0} = \bar{x}$ для любого $\bar{x} \in V$.
3. Для любого $\bar{x} \in V$ существует $-\bar{x} \in V$, для которого $\bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{0}$.
4. $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$ для любых $\bar{x}, \bar{y} \in V$.
5. $\alpha(\beta\bar{x}) = (\alpha\beta)\bar{x}$ для любых $\bar{x} \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

6. $(\alpha+\beta)\bar{x} = \alpha\bar{x} + \beta\bar{x}$ для любых $\bar{x} \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

7. $\alpha(\bar{x}+\bar{y}) = \alpha\bar{x} + \alpha\bar{y}$ для любых $\bar{x}, \bar{y} \in V, \alpha \in \mathbb{R}$.

8. $1\bar{x} = \bar{x}$ для любого $\bar{x} \in V$.

Элементы V называются *векторами*; вектор $\bar{0}$ называется *нулевым*; вектор $-\bar{x}$ называется *противоположным к* $\bar{x}$. Легко проверить, что $0\bar{x} = \bar{0}$ и $(-1)\bar{x} = -\bar{x}$ для всех $\bar{x} \in V$. Примерами векторных пространств являются n-мерное координатное пространство $\mathbb{R}^n$, пространство квадратных матриц n-ого порядка $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Mat}(n \times n)$, пространство $\mathbb{R}_n[x]$ многочленов от переменной x степени не выше n, пространство всех многочленов $\mathbb{R}[x]$, пространство $C[a,b]$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций. (Сложение и умножение на числа каждый раз определяются очевидным образом.)

Векторы $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n \in V$ называются *линейно независимыми*, если из того, что $\alpha_1\bar{v}_1 + \ldots + \alpha_n\bar{v}_n = \bar{0}$ для каких-то $\alpha_1, \ldots \alpha_n \in \mathbb{R}$, следует, что все α_i равны нулю. Набор линейно независимых векторов $e = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\} \subset V$ называется *базисом* V, если любой вектор можно однозначно представить в виде линейной комбинации векторов из e, то есть для любого $\bar{x} \in V$ существуют единственные $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ такие, что $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + \ldots + x_n\bar{e}_n$; числа x_i называются *координатами* вектора $\bar{x}$ в базисе e. Если в V существует хоть один базис, состоящий из конечного числа векторов, то все базисы состоят из одного и того же числа векторов, которое обозначается $\dim V$ и называется *размерностью* V; само V называется в этом случае *конечномерным*.

Пример. Векторы $\bar{e}_i$, у которых на i-ом месте стоит единица, а остальные координаты равны нулю, образуют базис $\mathbb{R}^n$, называемый *стандартным*. Таким образом, $\dim \mathbb{R}^n = n$. Матрицы $E_{i,j}$, у которых (i,j)-ый элемент равен единице, а остальные — нулю (они называются *матричными единицами*), образуют базис $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$; тем самым, $\dim \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) = n^2$. В пространстве $\mathbb{R}_n[x]$ есть *степенной* базис $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$, поэтому $\dim \mathbb{R}_n[x] = n+1$. Напротив, в пространствах $\mathbb{R}[x]$ и $C[a,b]$ нельзя построить базис из конечного числа векторов, то есть эти пространства бесконечномерны.

Пусть $e = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ и $e' = \{\bar{e}'_1, \ldots, \bar{e}'_n\}$ — два базиса V. Разложим каждый вектор e' по базису e:

$$\bar{e}'_j = t_{1j}\bar{e}_1 + \ldots + t_{nj}\bar{e}_n, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Обозначим через T квадратную матрицу n-ого порядка, (i,j)-ый элемент которой равен t_{ij}. Она называется *матрицей перехода* от e к e'; коротко мы будем записывать это так: $e' = eT$. Подчеркнём, что матрица перехода всегда обратима, причём $e = e'T^{-1}$ и $e = eE$.

Пусть $\bar{v} = x_1\bar{e}_1 + \ldots + x_n\bar{e}_n = x'_1\bar{e}'_1 + \ldots + x'_n\bar{e}'_n$; положим

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \bar{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Тогда $\bar{x} = T\bar{x}'$ и $\bar{x}' = T^{-1}\bar{x}$ (здесь вектор рассматривается как матрица размера $n \times 1$).

Пример. Пусть $\dim V = 2$, векторы $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{x}$ заданы своими координатами в некотором базисе $e = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ пространства V:

$$\bar{e}'_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}'_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Тогда $e' = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2\}$ тоже является базисом V, ибо определитель матрицы

$$T = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix},$$

j-ый столбец которой составлен из координат вектора $\bar{e}'_j$ в базисе e, отличен от нуля: $\det T = -1 \neq 0$. Это означает, что матрица T обратима, то есть векторы e можно выразить через векторы e'. Итак, e' — базис V, а T — матрица перехода: $e' = eT$. Координаты вектора $\bar{x}$ в базисе e' равны

$$\bar{x}' = T^{-1}\bar{x} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Подмножество $U \subset V$ называется *подпространством*, если оно замкнуто относительно операций сложения и умножения на числа, то есть $\bar{x} + \bar{y} \in U$ и $\alpha\bar{x} \in U$ для любых $\bar{x}, \bar{y} \in U, \alpha \in \mathbb{R}$. Любое подпространство само является векторным пространством относительно тех же операций, что и V. Отметим, что если $\dim U = \dim V$, то $U = V$. *Линейной оболочкой* набора векторов $S = \{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n\} \subset V$ называется минимальное по размерности подпространство $\langle S \rangle$, содержащее S; другими словами, это множество всех линейных комбинаций векторов из S:

$$\langle S \rangle = \{\alpha_1\bar{a}_1 + \ldots + \alpha_n\bar{a}_n, \alpha_i \in \mathbb{R}\}.$$

Размерность $\langle S \rangle$ называется *рангом* S и обозначается $\operatorname{rk} S$. Она равна рангу матрицы, составленной из координат векторов из S, записанных в любом фиксированном базисе V.

Пример. Найдём базис и размерность линейной оболочки системы векторов S вида

$$S = \left\{ \bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \bar{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \bar{a}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{a}_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Вычислим ранг соответствующей матрицы, проводя элементарные преобразования *только со строками*:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 9 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & -3 & -1 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2\mathrm{I} \\ +\mathrm{I} \\ -3\mathrm{I} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & -7 & -7 & -1 & -15 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & -10 & -10 & -8 & -28 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +7\mathrm{II} \\ -2\mathrm{II} \\ +10\mathrm{II} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 27 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 32 & 32 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \times 1/27 \\ \times(-1/3) \\ \times 1/32 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -\mathrm{III} \\ -\mathrm{III} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы равен трём, поэтому $\dim \langle S \rangle = \operatorname{rk} S = 3$. Более того, $M^{1,2,4}_{1,2,3} = 1 \neq 0$, поэтому в последней матрице первый, второй и четвёртый столбцы линейно независимы. Но элементарные преобразования со строками *не могут* повлиять на линейную зависимость или независимость столбцов, поэтому векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_4$ также линейно независимы — а значит, образуют базис линейной оболочки S.

Пусть U, V — подпространства векторного пространства W. Тогда их пересечение $U \cap V$ тоже будет подпространством. *Суммой* подпространств U

и V называется подпространство $U+V$, состоящее из векторов вида $\bar{x}+\bar{y}$, где $\bar{x}\in U$, $\bar{y}\in V$. Имеет место равенство

$$\dim U+\dim V=\dim(U+V)+\dim(U\cap V).$$

Пример. Найдём базис и размерность $\langle S\rangle+\langle T\rangle$ и $\langle S\rangle\cap\langle T\rangle$, где

$$S=\left\{\bar{a}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\3\end{pmatrix},\ \bar{a}_2=\begin{pmatrix}5\\-1\\3\\2\end{pmatrix},\ \bar{a}_3=\begin{pmatrix}3\\3\\3\\-4\end{pmatrix}\right\},$$

$$T=\left\{\bar{b}_1=\begin{pmatrix}-2\\0\\4\\1\end{pmatrix},\ \bar{b}_2=\begin{pmatrix}-1\\-2\\4\\4\end{pmatrix},\ \bar{b}_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\3\end{pmatrix}\right\}.$$

Как выше, находим, что $\dim\langle S\rangle=\dim\langle T\rangle=2$, $\{\bar{a}_1,\bar{a}_2\}$ — базис $\langle S\rangle$, $\{\bar{b}_1,\bar{b}_2\}$ — базис $\langle T\rangle$. Поскольку $\langle S\rangle+\langle T\rangle=\langle S\cup T\rangle$, то, действуя аналогично, получаем, что $\dim(\langle S\rangle+\langle T\rangle)=3$ и $\{\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{b}_1\}$ — базис $\langle S\rangle+\langle T\rangle$. Вектор $\bar{v}$ будет лежать в пересечении $\langle S\rangle$ и $\langle T\rangle$ тогда и только тогда, когда его можно разложить и по базису $\langle S\rangle$, и по базису $\langle T\rangle$, то есть существуют такие $x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{R}$, что $\bar{v}=x_1\bar{a}_1+x_2\bar{a}_2=y_1\bar{b}_1+y_2\bar{b}_2$. Иначе говоря, числа x_1,x_2,y_1,y_2 являются решениями системы линейных однородных уравнений, столбцы матрицы которой равны $\bar{a}_1,\bar{a}_2,-\bar{b}_1,-\bar{b}_2$. Действуя как в предыдущем параграфе, находим ФСР этой системы; она состоит из одного вектора:

$$\bar{f}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

(координаты этого вектора равны $x_1=1$, $x_2=0$, $y_1=-1$, $y_2=1$). Каждому вектору из ФСР соответствует вектор из базиса $\langle S\rangle\cap\langle T\rangle$. В данном случае пересечение будет одномерно, единственный базисный вектор имеет вид

$$\bar{v}_1=\bar{a}_1=-\bar{b}_1+\bar{b}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\3\end{pmatrix}.$$

Говорят, что пространство W есть *прямая сумма* своих подпространств U и V, если $W=U+V$ и $U\cap V=\{\bar{0}\}$. Эквивалентное определение: для любого

$\bar{x} \in W$ существуют единственные $\bar{y} \in U$, $\bar{z} \in V$, для которых $\bar{x} = \bar{y} + \bar{z}$. Вектор $\bar{y}$ называется *проекцией* $\bar{x}$ *на* U *вдоль* V, а вектор $\bar{z}$ — *проекцией* $\bar{x}$ *на* V *вдоль* U.

Пример. Пусть $U = \langle \bar{a}_1, \bar{a}_2 \rangle$, $V = \langle \bar{b}_1, \bar{b}_2 \rangle$, где

$$\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \bar{b}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \bar{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Докажем, что $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$. В самом деле, рассуждая, как выше, мы легко проверяем, что $\dim U = \dim V = 2$, $\dim(U + V) = 4$. Единственное четырёхмерное подпространство четырёхмерного пространства — это оно само, поэтому $\mathbb{R}^4 = U + V$. С другой стороны, $\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U + V) = 2 + 2 - 4 = 0$, так что $U \cap V = \{\bar{0}\}$. Но это и означает, что $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$.

Найдём теперь проекции вектора

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

на U и V. Пусть $\bar{x} = \bar{y} + \bar{z}$, где $\bar{y} \in U$, $\bar{z} \in V$. Раз $\bar{y} \in U$, то его можно разложить по базису U, то есть найдутся такие числа $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, что

$$\bar{y} = y_1\bar{a}_1 + y_2\bar{a}_2 = \begin{pmatrix} -y_1 + 2y_2 \\ y_2 \\ 3y_1 + 2y_2 \\ 2y_1 \end{pmatrix} \text{ и, следовательно, } \bar{z} = \bar{x} - \bar{y} = \begin{pmatrix} 6 + y_1 - 2y_2 \\ -4 - y_2 \\ 6 - 3y_1 - 2y_2 \\ 3 - 2y_1 \end{pmatrix}.$$

Условие $\bar{z} \in V$ означает, что $\operatorname{rk}\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{z}\} = 2$. Но

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 + y_1 - 2y_2 \\ 0 & -5 & -4 - y_2 \\ 1 & 0 & 6 - 3y_1 - 2y_2 \\ 2 & -1 & 3 - 2y_1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 - 3y_1 - 2y_2 \\ 0 & -5 & -4 - y_2 \\ 4 & 1 & 6 + y_1 - 2y_2 \\ 2 & -1 & 3 - 2y_1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ -4\mathrm{I} \\ -2\mathrm{I} \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 - 3y_1 - 2y_2 \\ 0 & -5 & -4 - y_2 \\ 0 & 1 & -18 + 13y_1 + 6y_2 \\ 0 & -1 & -9 + 4y_1 + 4y_2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6-3y_1-2y_2 \\ 0 & -1 & -9+4y_1+4y_2 \\ 0 & 1 & -18+13y_1+6y_2 \\ 0 & -5 & -4-y_2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \times(-1) \\ +\mathrm{II} \\ -5\mathrm{II} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6-3y_1-2y_2 \\ 0 & 1 & 9-4y_1-4y_2 \\ 0 & 0 & -27+17y_1+10y_2 \\ 0 & 0 & 41-20y_1-21y_2 \end{pmatrix}.$$

Чтобы ранг матрицы равнялся двум, необходимо и достаточно, чтобы последние две строки были нулевыми. Это равносильно тому, что y_1, y_2 являются решениями системы

$$\begin{cases} 17y_1+10y_2 &= 27, \\ 20y_1+21y_2 &= 41. \end{cases}$$

Решая эту систему (скажем, методом Гаусса), находим $y_1 = 1, y_2 = 1$. Осталось подставить их в $\bar{y}$ и в $\bar{z}$:

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{z} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отметим также, что любое подпространство в $\mathbb{R}^n$ можно представить как *пространство решений* некоторой системы линейных однородных уравнений. Иными словами, для любого подпространства $W \subset \mathbb{R}^n$ найдётся такая матрица A, что вектор $\bar{x}$ содержится в W в том и только в том случае, когда $A\bar{x} = \bar{0}$. Ясно, что ФСР системы будет базисом подпространства W.

Пример. Найдём систему линейных однородных уравнений, пространством решений которой является линейная оболочка системы векторов

$$S = \left\{ \bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}.$$

Рассуждая, как выше, мы легко находим, что $\dim W = 2$ и $\{\bar{a}_1 . \bar{a}_2\}$ — базис W, где $W = \langle S \rangle$. Вектор

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

будет содержаться в подпространстве W тогда и только тогда, когда его можно представить в виде линейной комбинации векторов $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$, то есть когда $\operatorname{rk}\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{x}\} = 2$. Но

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & x_1 \\ -1 & 4 & x_2 \\ 0 & -5 & x_3 \\ 3 & 2 & x_4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & x_2 \\ 2 & 1 & x_1 \\ 0 & -5 & x_3 \\ 3 & 2 & x_4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +2\mathrm{I} \\ \\ +3\mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & x_2 \\ 0 & 9 & x_1+2x_2 \\ 0 & -5 & x_3 \\ 0 & 14 & 3x_2+x_4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +2\mathrm{III} \\ \\ +3\mathrm{III} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1+2x_2+2x_3 \\ 0 & -5 & x_3 \\ 0 & -1 & 3x_2-3x_3+x_4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +5\mathrm{II} \\ +\mathrm{II} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1+2x_2+2x_3 \\ 0 & 0 & 5x_1+10x_2+12x_3 \\ 0 & 0 & x_1+4x_2-x_3+x_4 \end{pmatrix}.$$

Чтобы ранг этой матрицы равнялся двум, необходимо и достаточно, чтобы две последние строки были нулевые, то есть

$$\begin{cases} 5x_1+10x_2+12x_3 &= 0, \\ x_1+4x_2-x_3+x_4 &= 0. \end{cases}$$

Это и есть интересующая нас система линейных однородных уравнений.

Пусть V — конечномерное векторное пространство, векторы $\bar{e}'_1, \ldots, \bar{e}'_n$, $\bar{x} \in V$ заданы своими координатами в некотором базисе $e = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ пространства V. Докажите, что $e' = \{\bar{e}'_1, \ldots, \bar{e}'_n\}$ — тоже базис V, и найдите координаты вектора $\bar{x}$ в этом базисе.

5.1. $\bar{e}'_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\bar{e}'_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \end{pmatrix}$.

5.2. $\bar{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\bar{e}'_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \end{pmatrix}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

5.3. $\bar{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{e}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\bar{e}'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}$.

5.4. $\bar{e}'_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\bar{e}'_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\bar{e}'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$.

5.5. $\bar{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{e}'_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\bar{e}'_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

5.6. $\bar{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \bar{e}'_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \bar{e}'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \bar{e}'_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \bar{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

5.7. $\bar{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \bar{e}'_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \bar{e}'_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \ \bar{e}'_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \ \bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

5.8. $\bar{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \bar{e}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \bar{e}'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \bar{e}'_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \bar{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}.$

5.9*. Как изменится матрица перехода от базиса e к базису e', если а) поменять местами два вектора первого базиса б) поменять местами два вектора второго базиса в) записать векторы обоих базисов в обратном порядке?

5.10*. («*Схема Горнера*») Пусть $a \in \mathbb{R}$ — любое число. Докажите, что многочлены $1, x-a, (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n$ образуют базис пространства $\mathbb{R}_n[x]$. Найдите матрицу перехода от стандартного базиса $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ к этому базису и запишите координаты многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ в новом базисе.

5.11*. Докажите, что W не является подпространством в V.

а) $V = \mathbb{R}^2$, W — векторы плоскости с началом в начале координат O, концы которых лежат на данной прямой, не проходящей через O.

б) $V = \mathbb{R}^2$, W — векторы плоскости с началом в O, концы которых не лежат на данной прямой.

в) $V = \mathbb{R}^2$, W — векторы плоскости с началом в O, концы которых лежат на одной из двух данных прямых, пересекающихся в O.

г) $V = \mathbb{R}^2$, W — векторы плоскости с началом в O, концы которых лежат в первой четверти.

д) $V = \mathbb{R}^n$, W — векторы, координаты которых — целые числа.

е) $V = \mathbb{R}^n$, W — векторы, координаты которых — неотрицательные числа.

ё) $V = \mathbb{R}_n[x]$, W — многочлены фиксированной степени m.

ж) $V = \mathbb{R}_n[x]$, W — многочлены, не равные нулю в данной точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

з) $V = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, W — невырожденные матрицы.

и) $V = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, W — вырожденные матрицы.

5.12*. Докажите, что W является подпространством в V, постройте какой-нибудь базис W и найдите его размерность.

а) $V = \mathbb{R}^n$, $W = \{\bar{x} \in V \mid x_1 + \ldots + x_n = 0\}$.

б) $V = \mathbb{R}^n$, $W = \{\bar{x} \in V \mid x_1 = \ldots = x_n\}$.

в) $V = \mathbb{R}^n$, $W = \{\bar{x} \in V \mid x_1 = x_n\}$.

г) $V = \mathbb{R}^n$, $W = \{\bar{x} \in V \mid x_1 = x_3 = x_5 = \ldots = 0\}$.

д) $V = \mathbb{R}^n$, $W = \{\bar{x} \in V \mid A\bar{x} = \bar{0}\}$, где A — некоторая матрица размера $m \times n$ ранга r.

е) $V = \mathbb{R}_n[x]$, W — многочлены, равные нулю в данной точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

ё) $V = \mathbb{R}_n[x]$, W — многочлены, содержащие только чётные степени x.

ж) $V = \mathbb{R}_n[x]$, W — многочлены, содержащие только нечётные степени x.

з) $V = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, $W = \{A \in V \mid A^t = A\}$ — симметрические матрицы.

и) $V = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, $W = \{A \in V \mid A^t = -A\}$ — кососимметрические матрицы.

й) $V = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, W — матрицы с нулевым следом. (Напомним, что *следом* квадратной матрицы A размера $n \times n$ называется число $\operatorname{tr} A$, равное сумме её диагональных элементов: $\operatorname{tr} A = a_{11} + \ldots + a_{nn}$.)

к) $V = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, W — матрицы, перестановочные с диагональной матрицей A, у которой на диагонали стоят различные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

л) $V = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, W — матрицы, перестановочные со всеми матрицами.

Найдите базисы и размерности линейных оболочек наборов векторов:

5.13. $$\left\{ \bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \bar{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},\ \bar{a}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

5.14. $$\left\{ \bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix},\ \bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix},\ \bar{a}_4 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

5.15. $$\left\{ \bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},\ \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix},\ \bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix},\ \bar{a}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 14 \\ -6 \end{pmatrix},\ \bar{a}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\textbf{5.16.}\quad \left\{\bar a_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\ \bar a_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix},\ \bar a_3=\begin{pmatrix}2\\2\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\ \bar a_4=\begin{pmatrix}1\\1\\5\\5\\2\end{pmatrix},\ \bar a_5=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

Найдите системы линейных однородных уравнений, пространствами решений которых являются линейные оболочки следующих наборов векторов:

$$\textbf{5.17.}\quad \left\{\bar a_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \bar a_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\ \bar a_3=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

$$\textbf{5.18.}\quad \left\{\bar a_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\ \bar a_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\3\end{pmatrix},\ \bar a_3=\begin{pmatrix}3\\1\\1\\-1\\7\end{pmatrix},\ \bar a_4=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}.$$

Найдите базис и размерность $\langle S\rangle+\langle T\rangle$ и $\langle S\rangle\cap\langle T\rangle$:

$$\textbf{5.19.}\quad S=\left\{\bar a_1=\begin{pmatrix}7\\1\\2\end{pmatrix},\ \bar a_2=\begin{pmatrix}9\\5\\8\end{pmatrix},\ \bar a_3=\begin{pmatrix}5\\-3\\-4\end{pmatrix}\right\},$$

$$T=\left\{\bar b_1=\begin{pmatrix}8\\3\\5\end{pmatrix},\ \bar b_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \bar b_3=\begin{pmatrix}11\\-4\\-5\end{pmatrix}\right\}.$$

$$\textbf{5.20.}\quad S=\left\{\bar a_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\ \bar a_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\ \bar a_3=\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}\right\},$$

$$T=\left\{\bar b_1=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix},\ \bar b_2=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\ \bar b_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}\right\}.$$

$$\textbf{5.21.}\quad S=\left\{\bar a_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-2\end{pmatrix},\ \bar a_2=\begin{pmatrix}2\\3\\1\\0\end{pmatrix},\ \bar a_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\\-3\end{pmatrix}\right\},$$

$$T = \left\{ \bar{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \bar{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \bar{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}.$$

5.22. $$S = \left\{ \bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix},\ \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix},\ \bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\},$$

$$T = \left\{ \bar{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},\ \bar{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ \bar{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}.$$

5.23. $$S = \left\{ \bar{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 4 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix},\ \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix},\ \bar{a}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 5 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} \right\},$$

$$T = \left\{ \bar{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \bar{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix},\ \bar{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}.$$

5.24. $$S = \left\{ \bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$T = \left\{ \bar{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \bar{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \bar{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Докажите, что $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$, и найдите проекцию вектора $\bar{x} \in \mathbb{R}^4$ на подпространство U вдоль подпространства V:

5.25. $U = \langle \bar{a}_1, \bar{a}_2 \rangle,\ V = \langle \bar{b}_1, \bar{b}_2 \rangle,$

$$\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \bar{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \bar{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \bar{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

5.26. $U = \langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3 \rangle,\ V = \langle \bar{b}_1 \rangle,$

$$\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},\ \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix},\ \bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \bar{b}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

5.27. $U = \langle \bar{a}_1 \rangle,\ V = \langle \bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3 \rangle,$

$$\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix},\ \bar{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \bar{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix},\ \bar{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix},\ \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ -13 \\ -21 \end{pmatrix}.$$

5.28. $U = \langle \bar{a}_1, \bar{a}_2 \rangle,\ V = \langle \bar{b}_1, \bar{b}_2 \rangle,$

$$\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},\ \bar{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ \bar{b}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \bar{x} = \begin{pmatrix} 18 \\ 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

5.29*. Докажите, что $W = U \oplus V$, и найдите проекции векторов стандартного базиса (единичных *ортов* $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$) на U вдоль V и на V вдоль U, где $W = \mathbb{R}^n$, $U = \{\bar{x} \in W \mid x_1 = \ldots = x_n\}$, $V = \{\bar{x} \in W \mid x_1 + \ldots + x_n = 0\}$.

5.30*. Пусть $W = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, U — подпространство симметрических матриц, а V — кососимметрических матриц. Докажите, что $W = U \oplus V$, и найдите проекции матрицы A на U вдоль V и на V вдоль U, где

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \leqslant j, \\ 0, & \text{если } i > j. \end{cases}$$

5.31*. Пусть $W = \mathbb{R}_n[x]$, U — подпространство многочленов, содержащих только чётные степени x, а V — только нечётные степени x. Докажите, что $W = U \oplus V$, и найдите проекции многочлена $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ на U вдоль V и на V вдоль U.

5.32*. а) Пусть U — подпространство в V. Для произвольного вектора $\bar{v} \in V$ обозначим множество векторов вида $\bar{v} + \bar{u}$, $\bar{u} \in U$, через $[\bar{v}]$; будем называть это множество *классом* вектора $\bar{v}$. Покажите, что если два класса содержат один и тот же вектор, то они совпадают. б) Обозначим множество всех классов через V/U. Проверьте, что операции $[\bar{v}_1] + [\bar{v}_2] = [\bar{v}_1 + \bar{v}_2]$ и $\alpha[\bar{v}] = [\alpha\bar{v}]$ корректно определены и задают на V/U структуру векторного пространства (оно называется *факторпространством* по модулю U). в) Докажите, что $\dim V/U = \dim V - \dim U$.

5.33*. В n-мерном пространстве V даны векторы $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_m$, где $m \geqslant n+2$. Докажите, что существуют такие числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, не все равные нулю, что $\alpha_1 + \ldots + \alpha_m = 0$ и $\alpha_1\bar{v}_1 + \ldots + \alpha_m\bar{v}_m = \bar{0}$.

5.34*. Пусть $e = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ — некоторый базис векторного пространства V, а векторы $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$, где $k < n$, линейно независимы. Известно, что если при любом i от 1 до k вектор $\bar{e}_i$ в базисе e заменить на вектор $\bar{v}_i$, то снова получится базис V. Следует ли отсюда, что $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k, \bar{e}_{k+1}, \ldots, \bar{e}_n$ – базис?

§6. Линейные операторы

Пусть V, W — векторные пространства (над $\mathbb{R}$). Отображение $\varphi\colon V \to W$ называется *линейным оператором*, если $\varphi(\bar{x} + \bar{y}) = \varphi\bar{x} + \varphi\bar{y}$ и $\varphi(\alpha\bar{x}) = \alpha\varphi\bar{x}$ для любых $\bar{x}, \bar{y} \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (мы пишем просто $\varphi\bar{x}$ вместо $\varphi(\bar{x})$). Множества

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{x} \in V \mid \varphi\bar{x} = \bar{0}\} \text{ и}$$
$$\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi\bar{x}, \bar{x} \in V\}$$

называются соответственно *ядром* и *образом* оператора φ. Легко проверить, что ядро и образ являются подпространствами в V и W соответственно. Их размерности связаны соотношением

$$\dim \operatorname{Im}\varphi + \dim \operatorname{Ker}\varphi = \dim V.$$

Линейный оператор $\varphi\colon V \to W$ называется *изоморфизмом*, если $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$ и $\operatorname{Im}\varphi = W$. В этом случае он является *взаимно однозначным* отображением, то есть для любого $\bar{y} \in W$ существует ровно один $\bar{x} \in V$ такой, что $\varphi\bar{x} = \bar{y}$. Если существует хоть один изоморфизм из V в W, то эти пространства называются *изоморфными*. Обозначение: $V \cong W$.

Пример. Найдём ядро и образ линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, действующего по правилу

$$\varphi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3x_1+x_2+x_3\\2x_1-x_2-2x_3\\x_1+2x_2+3x_3\end{pmatrix}.$$

Вектор $\bar{x}$ лежит в ядре φ тогда и только тогда, когда

$$\varphi\bar{x} = \begin{pmatrix}3x_1+x_2+x_3\\2x_1-x_2-2x_3\\x_1+2x_2+3x_3\end{pmatrix} = \bar{0}.$$

Найдём ФСР этой системы линейных однородных уравнений методом Гаусса:

$$\bar{f}_1 = \begin{pmatrix}-7\\-8\\5\end{pmatrix}.$$

Это и есть базис ядра, то есть $\operatorname{Ker}\varphi = \langle \bar{f}_1\rangle$. С другой стороны, образ φ есть линейная оболочка образов векторов любого базиса V. Например, если e — стандартный базис $\mathbb{R}^3$, то $\operatorname{Im}\varphi = \langle \varphi\bar{e}_1, \varphi\bar{e}_2, \varphi\bar{e}_3\rangle$. Считаем:

$$\varphi\bar{e}_1 = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \quad \varphi\bar{e}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \quad \varphi\bar{e}_3 = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}.$$

Действуя как в предыдущем параграфе, находим, что $\dim\operatorname{Im}\varphi = 2$, $\{\varphi\bar{e}_1, \varphi\bar{e}_2\}$ — базис образа; это подпространство задаётся системой линейных однородных уравнений, состоящей из одного уравнения $x_1 - x_2 - x_3 = 0$.

Пусть $e = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ — произвольный базис векторного пространства V, $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор. Обозначим через a_{ij} коэффициенты разложения образов базисных векторов по тому же самому базису e:

$$\varphi\bar{e}_j = a_{1j}\bar{e}_1 + a_{2j}\bar{e}_2 + \ldots + a_{nj}\bar{e}_n, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Составим из чисел a_{ij} матрицу

$$A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

Она называется *матрицей оператора* φ *в базисе* e. Обозначение: $\varphi \overset{e}{\rightsquigarrow} A$. Другими словами, j-ый столбец матрицы оператора φ в базисе e состоит из коэффициентов разложения $\varphi\bar{e}_j$ по базису e. Ясно, что $\dim \operatorname{Im} \varphi = \operatorname{rk} A$.

Значение матрицы оператора заключается в следующем. Если $\bar{x}$ — столбец из координат вектора $\bar{v}$ в базисе e, а A — матрица оператора $\varphi\colon V \to V$ в базисе e, то столбец из координат вектора $\varphi\bar{v}$ в том же самом базисе e будет иметь вид $A\bar{x}$. Проще говоря, оператор действует на векторы с помощью умножения на свою матрицу.

Пример. 1. Матрица оператора φ из предыдущего примера в стандартном базисе $\mathbb{R}^3$ имеет вид $\varphi \overset{e}{\rightsquigarrow} A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, так как координаты векторов $\varphi\bar{e}_j$ — это и есть их коэффициенты разложения по стандартному базису.

2. Пусть $V = \operatorname{Mat}_2(\mathbb{R})$, $e = \{\bar{e}_1 = E_{1,1}, \bar{e}_2 = E_{1,2}, \bar{e}_3 = E_{2,1}, \bar{e}_4 = E_{2,2}\}$ — базис из матричных единиц, φ действует по правилу $\varphi(X) = X^t A$, где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ — фиксированная матрица. Вычисляем:

$$\varphi\bar{e}_1 = E_{1,1}^t \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a_{11} \cdot E_{1,1} + a_{12} \cdot E_{1,2} = a_{11}\bar{e}_1 + a_{12}\bar{e}_2,$$

$$\varphi\bar{e}_2 = E_{1,2}^t \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot E_{2,1} + a_{12} \cdot E_{2,2} = a_{11}\bar{e}_3 + a_{12}\bar{e}_4,$$

$$\varphi\bar{e}_1 = E_{1,1}^t \cdot A = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a_{21} \cdot E_{1,1} + a_{22} \cdot E_{1,2} = a_{21}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2,$$

$$\varphi\bar{e}_4 = E_{2,2}^t \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{21} \cdot E_{2,1} + a_{22} \cdot E_{2,2} = a_{21}\bar{e}_3 + a_{22}\bar{e}_4.$$

Следовательно, $\varphi \overset{e}{\rightsquigarrow} A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{21} & 0 \\ a_{12} & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{21} \\ 0 & a_{12} & 0 & a_{22} \end{pmatrix}$.

3. Пусть $V = \mathbb{R}_2[x]$, $e = \{\bar{e}_1 = 1, \bar{e}_2 = x, \bar{e}_3 = x^2\}$ — степенной базис, $\varphi(f) = 3f - f'$. Вычисляем:

$$\begin{aligned} \varphi\bar{e}_1 &= 3 - 1' = 3 = 3\bar{e}_1, \\ \varphi\bar{e}_2 &= 3x - x' = 3x - 1 = -\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2, \\ \varphi\bar{e}_3 &= 3x^2 - (x^2)' = 3x^2 - 2x = -2\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3. \end{aligned}$$

Значит, $\varphi \overset{e}{\rightsquigarrow} A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Если e, e' — два базиса пространства V, T — матрица перехода (то есть $e' = eT$) и $\varphi \overset{e}{\rightsquigarrow} A$, $\varphi \overset{e'}{\rightsquigarrow} A'$, то

$$A' = T^{-1}AT.$$

Пример. 1. Пусть V — любое двумерное пространство, $\bar{e}_1' = 3\bar{e}_1 + 4\bar{e}_2$, $\bar{e}_2' = -4\bar{e}_1 - 5\bar{e}_2$, $\varphi \overset{e}{\rightsquigarrow} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда $T = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, поэтому в новом базисе оператор φ будет задаваться матрицей

$$\varphi \overset{e'}{\rightsquigarrow} A' = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 45 & -58 \\ 31 & -40 \end{pmatrix}.$$

2. Пусть $V = \mathbb{R}^2$, e', e'' — базисы V вида

$$\bar{e}_1' = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_2' = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_1'' = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_2'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Если обозначить стандартный базис V через e, то $e' = eT'$ и $e'' = eT''$, где $T' = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, $T'' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. (Кстати, невырожденность матриц T' и T'' доказывает, что e' и e'' *действительно* являются базисами.)

Предположим, что $\varphi \overset{e'}{\rightsquigarrow} A' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Чтобы найти матрицу A'' оператора φ в базисе e'', заметим, что $e'' = e'T$, где $T = (T')^{-1}T'' = \begin{pmatrix} -31 & -8 \\ 27 & 7 \end{pmatrix}$, поэтому

$$\varphi \overset{e''}{\rightsquigarrow} A'' = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 437 & 113 \\ -1690 & -437 \end{pmatrix}.$$

На самом деле, соответствие между матрицами и операторами более глубокое, чем кажется на первый взгляд. А именно, если φ, ψ — два линейных оператора, действующих из V в V, а $\alpha \in \mathbb{R}$, то мы можем определить новые операторы $\varphi + \psi$ и $\alpha\varphi$ правилом $(\varphi + \psi)(\bar{x}) = \varphi\bar{x} + \psi\bar{x}$ и $(\alpha\varphi)(\bar{x}) = \alpha\varphi\bar{x}$ для любого $\bar{x} \in V$. (Тем самым, множество $\operatorname{End} V$ всех линейных операторов, действующих из V в V, превращается в векторное пространство.)

Кроме этого, *композиция* операторов $\varphi\psi = \varphi \circ \psi$, действующая по правилу $(\varphi\psi)(\bar{x}) = \varphi(\psi\bar{x})$, тоже будет линейным оператором.

Так вот, если e — какой-то фиксированный базис V, $\varphi \overset{e}{\rightsquigarrow} A$ и $\psi \overset{e}{\rightsquigarrow} B$, то

$$\varphi + \psi \overset{e}{\rightsquigarrow} A + B, \quad \alpha\varphi \overset{e}{\rightsquigarrow} \alpha A, \quad \varphi\psi \overset{e}{\rightsquigarrow} AB.$$

Пример. Пусть $V = \mathbb{R}^2$, e', e'' — два базиса V,

$$\varphi \overset{e'}{\rightsquigarrow} A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \psi \overset{e''}{\rightsquigarrow} B'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ где}$$

$$\bar{e}'_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}'_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}''_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}''_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Найдём тогда матрицу оператора $\eta = \psi\varphi - 2\psi$ в базисе e''. Для этого заметим, что если, как и выше, через e обозначить стандартный базис V, то $e' = eT'$, $e'' = eT''$ и $e'' = e'T$, где

$$T' = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad T'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad T = (T')^{-1}T'' = \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 14 & -5 \end{pmatrix},$$

поэтому $\varphi \overset{e''}{\rightsquigarrow} A'' = T^{-1}A'T = \begin{pmatrix} 19 & 11 \\ 46 & -17 \end{pmatrix}$. Отсюда мы получаем, что

$$\psi\varphi - 2\psi \overset{e''}{\rightsquigarrow} B''A'' - 2B'' = \begin{pmatrix} -11 & 6 \\ 19 & 65 \end{pmatrix}.$$

Найдите ядра и образы следующих линейных операторов $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

6.1. $\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}$.

6.2. $\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 + 11x_2 + 30x_3 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 \\ 3x_1 + 3x_2 + 8x_3 \end{pmatrix}$.

6.3. $\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x_1 + x_2 - 5x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ 5x_2 - x_3 \end{pmatrix}$.

6.4. $\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + 6x_3 \\ x_1 - 3x_2 \\ 3x_1 - 7x_2 + 12x_3 \end{pmatrix}$.

6.5. $\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 \\ 3x_1 - 3x_2 - 6x_3 \end{pmatrix}$.

6.6. $\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10x_1 + 5x_2 - 15x_3 \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ -4x_1 - 2x_2 + 6x_3 \end{pmatrix}$.

6.7. $\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 2x_1 - x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \end{pmatrix}$.

6.8. $\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ x_1 - x_2 - x_3 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 \end{pmatrix}$.

6.9. $\varphi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-x_2+x_3-x_4\\2x_1-x_2+x_4\\3x_1-2x_2+x_3\\7x_1-4x_2+x_3+2x_4\end{pmatrix}.$

6.10. $\varphi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_3+x_4\\x_2+3x_3-10x_4\\-8x_4\\x_1+2x_2-3x_3-5x_4\end{pmatrix}.$

6.11. $\varphi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-x_3+2x_4\\x_2+x_3\\-x_3-x_4\\x_1+x_2-x_3+x_4\end{pmatrix}.$

6.12. $\varphi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x_1-x_2+3x_3+2x_4\\2x_1+2x_2-6x_3-4x_4\\x_1+x_2-3x_3-2x_4\\5x_1+5x_2-15x_3-10x_4\end{pmatrix}.$

6.13***.** Какие из следующих отображений $\varphi\colon V\to V$ будут линейными операторами? Найдите их ядра и образы.

а) V — любое, $\varphi(\bar{x})=\bar{a}$, где $\bar{a}\in V$ — фиксированный вектор.

б) V — любое, $\varphi(\bar{x})=\bar{x}+\bar{a}$, где $\bar{a}\in V$ — фиксированный вектор.

в) V — любое, $\varphi(\bar{x})=\alpha\bar{x}$, где $\alpha\in\mathbb{R}$ — фиксированное число.

г) $V=\mathbb{R}^3$, $\varphi(\bar{x})=(\bar{x},\bar{a})\bar{b}$, где $\bar{a},\bar{b}\in V$ — фиксированные векторы, а круглые скобки обозначают скалярное произведение.

д) $V=\mathbb{R}^3$, $\varphi(\bar{x})=[\bar{a},\bar{x}]$, где $\bar{a}\in V$ — фиксированный вектор, а квадратные скобки обозначают векторное произведение.

е) $V=\mathbb{R}_n[x]$, $\varphi(f)(x)=f(\alpha x+\beta)$, где $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ — фиксированные числа.

ё) $V=\mathbb{R}_n[x]$, $\varphi(f)(x)=f(x+1)-f(x)$.

ж) $V=\mathbb{R}_n[x]$, $\varphi(f)(x)=f^{(k)}(x)$.

з) $V=\mathbb{R}^3$, $\varphi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-x_2\\x_2+x_3+5\\x_3\end{pmatrix}.$

и) $V=\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, $\varphi(X)=AX-XA$, где $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$

Найдите матрицы следующих операторов в указанных базисах.

6.14. $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, e — стандартный базис,

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + x_3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}.$$

6.15. $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, e — стандартный базис,

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 \end{pmatrix}.$$

6.16. $\varphi\colon \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, e — базис из матричных единиц, $\varphi(X) = AX$, где A — фиксированная матрица.

6.17. $\varphi\colon \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, e — базис из матричных единиц, $\varphi(X) = XB$, где B — фиксированная матрица.

6.18. $\varphi\colon \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, e — базис из матричных единиц, $\varphi(X) = AXB$, где A, B — фиксированные матрицы.

6.19. $\varphi\colon \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, e — базис из матричных единиц, $\varphi(X) = AX + XB$, где A, B — фиксированные матрицы.

6.20. $\varphi\colon \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, e — базис из матричных единиц, $\varphi(X) = X^t$.

6.21. $\varphi\colon \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, e — базис из матричных единиц, $\varphi(X) = AX + X^tB$, где A, B — фиксированные матрицы.

6.22. $\varphi\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, e — степенной базис, $\varphi(f) = f'$.

6.23. $\varphi\colon \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$, e — степенной базис, $\varphi(f) = f' - 2f''$.

6.24. $\varphi\colon \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_4[x]$, e — степенной базис, $\varphi(f) = f + 2f' - 3f'' - 4f'''$.

6.25*. а) $\varphi\colon \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$, e — степенной базис, $\varphi(f) = f'$.

б) $\varphi\colon \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$, $e = \{\bar{e}_1 = x^n, \bar{e}_2 = x^{n-1}, \ldots, \bar{e}_{n+1} = 1\}$, $\varphi(f) = f'$.

в) $\varphi\colon \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$, $e = \{\bar{e}_1 = 1, \bar{e}_2 = x - 1, \bar{e}_3 = (x-1)^2/2, \ldots, \bar{e}_{n+1} = (x-1)^n/n!\}$, $\varphi(f) = f'$.

г) $\varphi\colon V \to V$, где $V = \{A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} = 0\}$ — пространство матриц размера 2×2 с нулевым следом, $\varphi(Y) = HY - YH$, $e = \{\bar{e}_1 = X_+, \bar{e}_2 = X_-, \bar{e}_3 = H\}$, где $X_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $X_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

д) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — оператор поворота вокруг начала координат на угол α против часовой стрелки, e — стандартный базис.

Найдите матрицу A' линейного оператора $\varphi\colon V \to V$ в новом базисе e', если известна его матрица A в старом базисе e.

6.26. V — любое трёхмерное пространство, $\bar{e}'_1 = \bar{e}_1 - 3\bar{e}_2 - \bar{e}_3$, $\bar{e}'_2 = -\bar{e}_1$, $\bar{e}'_3 = 6\bar{e}_1 + \bar{e}_2$,

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

6.27. V — любое четырёхмерное пространство, $\bar{e}'_1 = \bar{e}_1$, $\bar{e}'_2 = \bar{e}_3$, $\bar{e}'_3 = \bar{e}_2$, $\bar{e}'_4 = \bar{e}_4$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.28. V — любое четырёхмерное пространство, $\bar{e}'_1 = \bar{e}_1$, $\bar{e}'_2 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$, $\bar{e}'_3 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$, $\bar{e}'_4 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 + \bar{e}_4$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

6.29. Пусть $V = \mathbb{R}_2[x]$ и $\varphi\colon V \to V$ действует по правилу $\varphi(f) = 2f - f'$. Найдите его матрицу в базисе $e' = \{\bar{e}'_1 = 3x^2 + 2x + 1, \bar{e}'_2 = x^2 + 3x + 2, \bar{e}'_3 = 2x^2 + x + 3\}$.

6.30. Пусть $V = \mathbb{R}_2[x]$ и $\varphi\colon V \to V$ действует по правилу $\varphi(f) = f + f' + f''$. Найдите его матрицу в базисе $e' = \{\bar{e}'_1 = x^2 + 1, \bar{e}'_2 = x^2 + x, \bar{e}'_3 = x - 2\}$.

6.31. Пусть $V = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ и $\varphi\colon V \to V$ действует по правилу $\varphi(X) = X^t$. Найдите его матрицу в базисе

$$\bar{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}'_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}'_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.32. Пусть $V = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ и $\varphi\colon V \to V$ действует по правилу $\varphi(X) = 2X - X^t$. Найдите его матрицу в базисе

$$\bar{e}'_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}'_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}'_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть V — любое трёхмерное пространство, e, e' — его базисы. Зная матрицу A' оператора $\varphi\colon V \to V$ в базисе e', найдите его матрицу в базисе e.

6.33. $\bar{e}'_1 = 4\bar{e}_1 + 6\bar{e}_2 + 9\bar{e}_3$, $\bar{e}'_2 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3$, $\bar{e}'_3 = 3\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2 + 8\bar{e}_3$,

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.34. $\bar{e}'_1 = -\bar{e}_1 - 4\bar{e}_2 + \bar{e}_3$, $\bar{e}'_2 = \bar{e}_1$, $\bar{e}'_3 = 3\bar{e}_1 + \bar{e}_2$, $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Зная матрицу A' линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ в базисе e', найдите его матрицу A'' в базисе e''.

6.35. $\bar{e}'_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{e}'_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{e}'_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\bar{e}''_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{e}''_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\bar{e}''_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

6.36. $\bar{e}'_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\bar{e}'_2 = \begin{pmatrix} -16 \\ 7 \\ -13 \end{pmatrix}$, $\bar{e}'_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$,

$\bar{e}''_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{e}''_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\bar{e}''_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}$.

Линейные операторы φ, ψ, η действуют из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$. Зная матрицу A' оператора φ в базисе e' и матрицу B'' оператора ψ в базисе e'', найдите матрицу оператора η в базисе e''.

6.37. $\eta = \varphi^2 + 2\psi$, $A' = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B'' = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$,

$\bar{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\bar{e}'_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\bar{e}''_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{e}''_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

6.38. $\eta = \varphi\psi - \psi\varphi$, $A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, $B'' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$,

$\bar{e}'_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\bar{e}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\bar{e}''_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\bar{e}''_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

6.39*. а) Пусть $\varphi\colon U \to V$ и $\psi\colon V \to W$ — линейные операторы. Докажите, что

$$\dim(\operatorname{Im}\varphi \cap \operatorname{Ker}\psi) = \dim\operatorname{Im}\varphi - \dim\operatorname{Im}\psi\varphi = \dim\operatorname{Ker}\psi\varphi - \dim\operatorname{Ker}\varphi.$$

б) Пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор. Докажите, что для любого $n \geqslant 0$

$$\dim\operatorname{Ker}\varphi^{n+1} = \dim\operatorname{Ker}\varphi + \sum_{k=1}^{n}\dim(\operatorname{Im}\varphi^k \cap \operatorname{Ker}\varphi),$$

$$\dim\operatorname{Im}\varphi = \dim\operatorname{Im}\varphi^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\dim(\operatorname{Im}\varphi^k \cap \operatorname{Ker}\varphi).$$

6.40*. а) Докажите, что конечномерные векторные пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности совпадают. б) (*Теорема об изоморфизме*) Покажите, что $V/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi$ для любого линейного оператора $\varphi\colon V \to W$ (определение факторпространства см. в задаче 5.32). в) Пусть $\dim V = n$. Докажите, что пространства $\operatorname{End} V$ и $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$ изоморфны.

§7. Собственные векторы

Пусть V — произвольное векторное пространство (над $\mathbb{R}$), $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор. Ненулевой вектор $\bar v \in V$ называется *собственным* для φ, если существует такое число $\lambda \in \mathbb{R}$, что $\varphi\bar v = \lambda\bar v$; в этом случае λ называется *собственным числом* оператора φ.

Если пространство V конечномерно, то собственные числа — это в точности решения *характеристического уравнения* $\det(A - \lambda E) = 0$, где A — матрица φ в произвольном базисе V, а E — единичная матрица. Это уравнение на самом деле имеет вид

$$\lambda^n - c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} - \ldots + (-1)^n \cdot c_n = 0,$$

где $n = \dim V$, а c_i — сумма главных миноров матрицы A i-ого порядка. (Минор называется *главным*, если наборы номеров его строк и столбцов совпадают.) В частности, при $n = 2, 3$ и 4 это уравнение будет записываться соответственно как

$$\lambda^2 - \operatorname{tr} A \cdot \lambda + \det A = 0,$$

$$\lambda^3 - \operatorname{tr} A \cdot \lambda^2 + c_2\lambda - \det A = 0, \text{ где}$$

$$c_2 = M_{1,2}^{1,2} + M_{1,3}^{1,3} + M_{2,3}^{2,3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\lambda^4 - \operatorname{tr} A \cdot \lambda^3 + c_2\lambda^2 - c_3\lambda + \det A = 0, \text{ где}$$
$$c_2 = M_{1,2}^{1,2} + M_{1,3}^{1,3} + M_{1,4}^{1,4} + M_{2,3}^{2,3} + M_{2,4}^{2,4} + M_{3,4}^{3,4},$$
$$c_3 = M_{1,2,3}^{1,2,3} + M_{1,2,4}^{1,2,4} + M_{1,3,4}^{1,3,4} + M_{2,3,4}^{2,3,4}.$$

Множество собственных векторов с данным собственным числом λ вместе с нулевым вектором называется *собственным подпространством* (и действительно является подпространством в V):

$$V_\lambda = \{\bar{v} \in V \mid \varphi\bar{v} = \lambda\bar{v}\}.$$

Легко понять, что V_λ — это пространство решений системы линейных однородных уравнений с матрицей $B = A - \lambda E$.

Пример. Пусть V — трёхмерное пространство, оператор $\varphi\colon V \to V$ задан в некотором базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения его собственных чисел составим характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$:

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0.$$

Это уравнение легко привести к виду $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$, откуда сразу находятся корни $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$.

Теперь найдём собственные подпространства V_1 и V_2. По определению, вектор $\bar{x}$ лежит в подпространстве V_2 тогда и только тогда, когда $\varphi\bar{x} = 2\bar{x}$. Если координаты этого вектора заданы в том же базисе, что и матрица A оператора φ, то это равенство можно переписать на матричном языке: $A\bar{x} = 2\bar{x}$ (напомним, оператор действует на вектор с помощью умножения на свою матрицу). Иначе говоря, вектор $\bar{x}$ должен быть решением системы линейных однородных уравнений с матрицей $B = A - 2E$. Решая эту систему методом Гаусса, находим ФСР (базис собственного подпространства V_2):

$$\bar{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тем самым, $V_2 = \langle \bar{f}_1, \bar{f}_2 \rangle$. Аналогично находим, что $V_1 = \langle \bar{f}_3 \rangle$, где

$$\bar{f}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

является ФСР системы уравнений с матрицей $A - E$.

Оператор $\varphi\colon V \to V$ задан своей матрицей A в некотором базисе. Найдите его собственные числа и соответствующие им собственные подпространства.

7.1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ **7.2.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **7.3.** $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$

7.4. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ **7.5.** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$ **7.6.** $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$

7.7. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ **7.8.** $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ **7.9.** $\begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

7.10. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **7.11.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **7.12.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

7.13. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **7.14.** $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -8 & 5 & 4 \\ 6 & -12 & 8 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ **7.15.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

7.16*. Найдите собственные числа и соответствующие им собственные подпространства оператора транспонирования, действующего в пространстве квадратных матриц n-ого порядка.

7.17*. Пусть $V = \mathbb{R}[x]$ — пространство многочленов, $\varphi\colon V \to V$ действует по правилу $\varphi(f) = (x^2-1)f'' + 2xf'$. Докажите, что для любого k *многочлен Лежандра* $P_k(x) = \big((x^2-1)^k\big)^{(k)}$ является собственным вектором для φ. Найдите его собственное число λ_k.

§8. Билинейные и квадратичные формы

Пусть V — произвольное векторное пространство (над $\mathbb{R}$). Отображение $f\colon V \times V \to \mathbb{R}\colon \bar{x}, \bar{y} \mapsto f(\bar{x}, \bar{y})$ называется *билинейной формой*, если для любых $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$ выполняются следующие условия:

1. $f(\bar{x}+\bar{y}, \bar{z}) = f(\bar{x}, \bar{z}) + f(\bar{y}, \bar{z})$.
2. $f(\bar{x}, \bar{y}+\bar{z}) = f(\bar{x}, \bar{y}) + f(\bar{x}, \bar{z})$.
3. $f(\alpha\bar{x}, \bar{y}) = \alpha \cdot f(\bar{x}, \bar{y})$.
4. $f(\bar{x}, \alpha\bar{y}) = \alpha \cdot f(\bar{x}, \bar{y})$.

Коротко говоря, билинейная форма — это функция двух векторных аргументов, линейная по каждому аргументу. Примеры билинейных форм: V — пространство геометрических векторов на плоскости, начинающихся в начале координат, $f(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, \bar{y})$ — обычное скалярное произведение; $V = \mathbb{R}^n$, $f(\bar{x}, \bar{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$; $V = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, $f(X, Y) = \operatorname{tr} XY$ или $f(X, Y) = \operatorname{tr} XY^t$; $V = \mathbb{R}[x]$ или $V = C[a, b]$, где $a, b \in \mathbb{R}$ – фиксированные числа, $f(g, h) = \int_a^b g(x)h(x)dx$.

Если пространство V конечномерно и $e = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ — произвольный базис V, то значение формы f на паре векторов $\bar{x}, \bar{y}$, координаты которых записаны в базисе e, вычисляется по формуле

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j,$$

где $a_{ij} = f(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$. Квадратная матрица A размера $n \times n$, составленная из чисел a_{ij}, называется *матрицей формы f в базисе e*. Обозначение: $f \overset{e}{\rightsquigarrow} A$. Если e' — другой базис V, A' — матрица формы f в этом базисе и T — матрица перехода от e к e', то $A' = T^tAT$. Зная матрицу билинейной формы в данном базисе, легко найти её значение на произвольной паре векторов, координаты которых записаны в том же базисе:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}^tA\bar{y},$$

где под $\bar{x}^t$ понимается строка, составленная из координат вектора $\bar{x}$ (это просто другая запись предыдущей формулы).

Пример. Пусть V — какое-то трёхмерное пространство, e — базис V, f — билинейная форма на V вида

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = 3x_1y_1 - x_1y_3 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_3y_1 + 5x_3y_2 + 4x_3y_3$$

(координаты всех векторов даны в базисе e). Тогда

$$f \overset{e}{\rightsquigarrow} A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Например, если $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\bar{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, то

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}^t A \bar{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 9.$$

Если теперь e' — другой базис V, причём $\bar{e}'_1 = \bar{e}_1 - \bar{e}_3$, $\bar{e}'_2 = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2$, $\bar{e}'_3 = \bar{e}_2 - 3\bar{e}_3$, то $e' = eT$, где $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, поэтому

$$f \overset{e'}{\rightsquigarrow} A' = T^t A T = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 3 \\ 7 & 12 & 6 \\ 16 & -5 & 11 \end{pmatrix}.$$

Билинейная форма f называется *симметрической*, если $f(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{y}, \bar{x})$ для любых $\bar{x}, \bar{y} \in V$. Это условие равносильно тому, что её матрица (в любом базисе) является симметрической, то есть $A^t = A$. По каждой симметрической билинейной форме f можно построить *квадратичную форму* — отображение $F \colon V \to \mathbb{R}$ вида $F(\bar{x}) = f(\bar{x}, \bar{x})$. По определению,

$$F(\bar{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j = \bar{x}^t A \bar{x},$$

где A — матрица билинейной формы f в том базисе, в котором даны координаты $\bar{x}$ (она также называется *матрицей квадратичной формы* F).

В пространстве V существует базис, в котором форма F имеет диагональную матрицу, у которой по диагонали сначала стоит несколько единиц, затем несколько минус единиц, а затем нули. Иначе говоря, если записать координаты вектора $\bar{y}$ в этом базисе, то

$$F(\bar{y}) = y_1^2 + \ldots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \ldots - y_r^2,$$

где $r \leqslant n = \dim V$ (такой вид формы называется *каноническим*). Проще говоря, в некотором базисе можно оставить в записи квадратичной формы лишь квадраты переменных, избавившись от попарных произведений (эту процедуру по историческим причинам принято называть *приведением формы к главным осям*).

Обозначим через $r_+ = k$ и $r_- = r - k$ число «положительных» и «отрицательных» квадратов в каноническом виде формы F соответственно. Они называются *положительным* и *отрицательным индексами инерции*. Имеет место так называемый *закон инерции*: индексы инерции зависят только от самой формы F, но не от способа её приведения к каноническому виду. Числа $\operatorname{rk} F = r = r_+ + r_-$ и $\sigma = r_+ - r_-$ называются *рангом* и *сигнатурой* формы F соответственно. Согласно закону инерции, они тоже зависят лишь от самой формы F. Отметим, что ранг формы — это ранг её матрицы в любом базисе.

Пример. Приведём форму

$$F(\bar{x}) = x_1^2 - 5x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3$$

к каноническому виду *методом Лагранжа*. Для этого сгруппируем все слагаемые, содержащие x_1, и выделим полный квадрат:

$$\begin{aligned} F(\bar{x}) &= (x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3) - 5x_2^2 + 3x_3^2 + 6x_2x_3 \\ &= (x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 12x_2x_3) \\ &\quad - 4x_2^2 - 9x_3^3 + 12x_2x_3 - 5x_2^2 + 3x_3^2 + 6x_2x_3 \\ &= (x_1 - 2x_2 + 3x_3)^2 - 9x_2^2 + 3x_3^2 + 18x_2x_3. \end{aligned}$$

Сделаем замену координат (то есть перейдём к новому базису) вида

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 + 3x_3, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

и запишем форму F в новых координатах: $F(\bar{y}) = y_1^2 - 9y_2^2 + 3y_3^2 + 18y_2y_3$. Теперь продолжим процедуру выделения полных квадратов до тех пор, пока не получим канонический вид:

$$\begin{aligned} F(\bar{y}) &= y_1^2 - 9(y_2^2 - 2y_2y_3) + 3y_3^2 \\ &= y_1^2 - 9(y_2^2 - 2y_2y_3 + y_3^2) + 9y_3^2 + 3y_3^2 \\ &= y_1^2 - 9(y_2 - y_3)^2 + 12y_3^2 = z_1^2 - z_2^2 + z_3^2, \end{aligned}$$

где $z_1 = y_1$, $z_2 = 3(y_1 - y_2)$ и $z_3 = 2\sqrt{3}y_3$.

Итак, мы привели форму к каноническому виду $F(\bar{z}) = z_1^2 - z_2^2 + z_3^2$ (строго говоря, нужно ещё переставить z_2 и z_3, чтобы сначала шли «положительные» квадраты). Подчеркнём, что $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ — это координаты одного и того же вектора, только в разных базисах. Видим, что $r_+ = 2$, $r_- = 1$, $r = 3$. Если бы на каком-то шаге не оказалось ни одного «нового» квадрата, то следовало бы выбрать любое попарное произведение $x_i x_j$ и сделать замену координат

$$\begin{cases} x_i = y_i + y_j, \\ x_j = y_i - y_j, \\ x_k = y_k \text{ при всех остальных } k. \end{cases}$$

Симметрическая билинейная форма f и соответствующая ей квадратичная форма F называются *положительно определёнными*, если

$$F(\bar{x}) = f(\bar{x}, \bar{x}) \geqslant 0$$

для любого вектора $\bar{x}$, причём равенство достигается лишь при $\bar{x} = \bar{0}$. Если $\dim V = n$, то это условие равносильно тому, что $r_+ = r = n$. Согласно *критерию Сильвестра*, форма будет положительно определённой в том и только том случае, когда все *угловые* миноры Δ_i её матрицы (в произвольном базисе) положительны. Здесь Δ_i — минор вида $\Delta_i = M_{1,2,\ldots,i}^{1,2,\ldots,i}$.

Пример. Выясним, при каких значениях λ квадратичная форма

$$F(\bar{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + \lambda x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3$$

будет положительно определена. Её матрица в том базисе, в котором даны координаты вектора $\bar{x}$, имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Вычислим угловые миноры: $\Delta_1 = 1 > 0$, $\Delta_2 = 4 > 0$, $\Delta_3 = 2\lambda - 9$. По критерию Сильвестра, форма F будет положительно определена тогда и только тогда, когда $\lambda > 9/2$.

Пусть f — билинейная форма на пространстве V. Найдите матрицу A формы f в том базисе, в котором заданы координаты векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$.

8.1. $f(\bar{x}, \bar{y}) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 - 4x_1y_3 + x_2y_1 - 5x_2y_3 + x_3y_3$.

8.2. $f(\bar{x}, \bar{y}) = -x_1y_2 + x_2y_1 - 2x_2y_2 + 3x_2y_3 - x_3y_1 + x_3y_3$.

Пусть билинейная форма f задана своей матрицей A в некотором базисе e пространства V, векторы $\bar{x}, \bar{y} \in V$ заданы своими координатами в том же базисе. Вычислите $f(\bar{x}, \bar{y})$.

8.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\bar{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

8.4. $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Найдите матрицу A' билинейной формы f в базисе e', если известна её матрица A в базисе e.

8.5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $\bar{e}'_1 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2$, $\bar{e}'_2 = \bar{e}_1 + \bar{e}_3$, $\bar{e}'_3 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$.

8.6. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\bar{e}'_1 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - \bar{e}_3$, $\bar{e}'_2 = \bar{e}_2 - \bar{e}_3$, $\bar{e}'_3 = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - 3\bar{e}_3$.

8.7*. Найдите матрицы следующих форм в указанных базисах. Какие из них будут симметрическими?

а) $V = \mathbb{R}^n$, $f(\bar{x}, \bar{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$, e — стандартный базис.

б) $V = \mathbb{R}^{2n}$, $f(\bar{x}, \bar{y}) = x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3 + \ldots + x_{2n-1}y_{2n} - x_{2n}y_{2n-1}$, e — стандартный базис.

в) V — пространство геометрических векторов, выходящих из начала координат O на плоскости (или в пространстве), $f(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, \bar{y})$ — скалярное произведение, e — произвольный декартов базис.

г) $V = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, $f(X, Y) = \mathrm{tr}\, XY$, e — базис из матричных единиц.

д) $V = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, $f(X, Y) = \mathrm{tr}\, XY^t$, e — базис из матричных единиц.

е) $V = \mathbb{R}_n[x]$, $f(g, h) = \int_{-1}^{1} g(x)h(x)dx$, e — степенной базис.

Приведите следующие квадратичные формы к каноническому виду, найдите их положительный и отрицательный индексы инерции.

8.8. $F(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

8.9. $F(\bar{x}) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$.

8.10. $F(\bar{x}) = x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.

8.11. $F(\bar{x}) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$.

8.12. $F(\bar{x}) = 2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 - 27x_2x_3$.

8.13. $F(\bar{x}) = -12x_1^2 - 3x_2^2 - 12x_3^2 + 12x_1x_2 - 24x_1x_3 + 8x_2x_3$.

8.14. $F(\bar{x}) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

8.15. $F(\bar{x}) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$.

8.16. $F(\bar{x}) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$.

8.17. $F(\bar{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$.

При каких значениях параметра λ следующие квадратичные формы будут положительно определены?

8.18. $F(\bar{x}) = 5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

8.19. $F(\bar{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$.

8.20. $F(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

8.21. $F(\bar{x}) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$.

8.22. $F(\bar{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$.

8.23. $F(\bar{x}) = x_1^2 - \lambda x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_2x_3$.

8.24. $F(\bar{x}) = \lambda x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

8.25*. Докажите, что формы из пунктов д) и е) задачи 8.7 положительно определены. Найдите положительный и отрицательный индексы инерции формы из пункта г) той же задачи.

8.26*. Докажите, что следующие формы положительно определены:

$$\text{а) } F(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j.$$

$$\text{б) } F(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}.$$

8.27*. *Ядром* симметрической билинейной формы f называется подмножество V вида $\operatorname{Ker} f = \{\bar{x} \in V \mid f(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \text{ для любого } \bar{y} \in V\}$. Форма называется *невырожденной*, если её ядро состоит только из нулевого вектора. а) Докажите, что если V конечномерно, то форма является невырожденной тогда и только тогда, когда невырожденной является её матрица в любом базисе V. б) Проверьте, что положительно определённая форма всегда будет невырожденной.

§9. Евклидовы пространства

Скалярным произведением на вещественном векторном пространстве V называется произвольная симметрическая положительно определённая билинейная форма $\bar{x}, \bar{y} \in V \mapsto (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}$. Пространство V вместе с заданным на нём скалярным произведением называется *евклидовым пространством*. Примеры: V — двумерное или трёхмерное пространство геометрических векторов, выходящих из начала координат, $(\bar{x}, \bar{y})$ — обычное скалярное произведение; $V = \mathbb{R}^n$, $(\bar{x}, \bar{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 \ldots + x_ny_n$ — так называемое *стандартное* скалярное произведение; $V = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, $(X, Y) = \mathrm{tr}\, XY^t$; $V = \mathbb{R}[x]$ или $V = C[a, b]$, где $a, b \in \mathbb{R}$ — фиксированные числа, $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ (задача 8.25 убеждает нас в том, что в двух последних примерах билинейные формы действительно являются скалярными произведениями).

Векторы $\bar{x}, \bar{y} \in V$ называются *перпендикулярными* (*ортогональными*, *нормальными*), если их скалярное произведение равно нулю, то есть $(\bar{x}, \bar{y}) = 0$; обозначение $\bar{x} \perp \bar{y}$. Если $L \subset V$ — произвольное подпространство, то *ортогональным дополнением* к нему называется множество векторов из V, которые ортогональны любому вектору из L:

$$L^{\perp} = \{\bar{x} \in V \mid \bar{x} \perp \bar{y} \text{ для любого } \bar{y} \in L\}.$$

Ортогональное дополнение само является подпространством, причём если пространство V конечномерно, то $V = L \oplus L^{\perp}$ (то есть $L \cap L^{\perp} = \{\bar{0}\}$, $\dim L + \dim L^{\perp} = \dim V$) и $(L^{\perp})^{\perp} = L$.

Например, если V — трёхмерное пространство геометрических векторов, выходящих из начала координат O, а L — подпространство векторов, заканчивающихся на фиксированной плоскости Π, проходящей через O, то $L^{\perp}$ — это прямая, проходящая через O перпендикулярно Π (точнее говоря, множество векторов, заканчивающихся на этой прямой).

Пример. Пусть V — евклидово пространство $\mathbb{R}^5$ со стандартным скалярным произведением, $L = \langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4 \rangle$, где

$$\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Найдём базис ортогонального дополнения к L. Для этого заметим сначала (см. параграф 5), что $\dim L = \mathrm{rk}\,\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4\} = 3$ и векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$

образуют базис подпространства L, то есть $L = \langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3 \rangle$. По определению, вектор $\bar{x}$ будет лежать в $L^\perp$ в том и только том случае, когда он перпендикулярен *любому* вектору из L. Но для этого необходимо и достаточно, чтобы он был ортогонален *базисным* векторам L (ибо любой вектор из L есть линейная комбинация базисных, а скалярное произведение — билинейная форма):

$$\bar{x} \in L^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x} \perp \bar{a}_1, \\ \bar{x} \perp \bar{a}_2, \\ \bar{x} \perp \bar{a}_3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\bar{x}, \bar{a}_1) = 0, \\ (\bar{x}, \bar{a}_2) = 0, \\ (\bar{x}, \bar{a}_3) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 & = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 3x_5 & = 0, \\ x_2 - x_3 + 4x_4 - x_5 & = 0. \end{cases}$$

Получается, что $L^\perp$ — это в точности пространство решений полученной системы линейных однородных уравнений; значит, базис ортогонального дополнения есть просто ФСР этой системы. Методом Гаусса находим ФСР:

$$\bar{f}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 13 \\ 1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{f}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 13 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, $\bar{f}_1, \bar{f}_2$ — базис ортогонального дополнения, то есть $L^\perp = \langle \bar{f}_1, \bar{f}_2 \rangle$.

Если бы L *само* было задано системой линейных однородных уравнений, то следовало бы вначале методом Гаусса найти его базис, а потом действовать так же, как выше.

Поскольку $V = L \oplus L^\perp$ для любого конечномерного V и любого его подпространства $L \subset V$, в этом случае для каждого вектора $\bar{x} \in V$ определены проекции $\bar{x}$ на L и $L^\perp$ вдоль друг дружки. Иначе говоря, существуют единственные $\bar{y} \in L$, $\bar{z} \in L^\perp$ такие, что $\bar{x} = \bar{y} + \bar{z}$. Вектор $\bar{y}$ называется *ортогональной проекцией* $\bar{x}$ на L, а вектор $\bar{z}$ — *ортогональной составляющей*.

Пример. Пусть $V = \mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением, $\bar{x} \in V$, $L = \langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3 \rangle$, где

$$\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Найдём ортогональную проекцию $\bar{x}$ на подпространство L и ортогональную составляющую. Для этого заметим сначала, что $\dim L = \operatorname{rk} \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\} = 2$

и векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ образуют базис L. Значит, если $\bar{x} = \bar{y} + \bar{z}$, $\bar{y} \in L$, $\bar{z} \in L^{\perp}$, то вектор $\bar{y}$ однозначно выражается через $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$, то есть существуют единственные $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, для которых

$$\bar{y} = y_1\bar{a}_1 + y_2\bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 2y_1 + y_2 \\ 3y_1 + y_2 \\ -y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\bar{z} = \bar{x} - \bar{y} = \begin{pmatrix} 7 - 2y_1 - y_2 \\ 7 - 3y_1 - y_2 \\ 1 + y_2 \\ 2 + y_1 \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы вектор $\bar{z}$ лежал в $L^{\perp}$, необходимо и достаточно, чтобы он был перпендикулярен базисным векторам подпространства L:

$$\bar{z} \in L^{\perp} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{z} \perp \bar{a}_1, \\ \bar{z} \perp \bar{a}_2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\bar{z}, \bar{a}_1) = 0, \\ (\bar{z}, \bar{a}_2) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14y_1 + 5y_2 & = 33, \\ 5y_1 + 3y_2 & = 13. \end{cases}$$

Решая эту совместную определённую систему методом Гаусса, получаем, что $y_1 = 2$, $y_2 = 1$. Значит,

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \bar{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Длиной (*нормой*) вектора $\bar{x}$ в евклидовом пространстве V называется число $\|\bar{x}\| = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}$. Для любых векторов $\bar{x}, \bar{y} \in V$ выполняется *неравенство Коши–Буняковского*: $|(\bar{x}, \bar{y})| \leqslant \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|$, причём равенство выполняется тогда и только тогда, когда $\bar{x}$ и $\bar{y}$ пропорциональны. Ясно, что $\|\bar{x}\| \geqslant 0$ для любого $\bar{x} \in V$, причём равенство нулю равносильно тому, что $\bar{x} = \bar{0}$. Норма обладает следующими свойствами:

1. $\|\lambda\bar{x}\| = |\lambda| \cdot \|\bar{x}\|$ для любых $\bar{x} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$.
2. $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leqslant \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$ для любых $\bar{x}, \bar{y} \in V$.

Второе свойство называется *неравенством треугольника*; отметим, что равенство в нём достигается тогда и только тогда, когда векторы $\bar{x}, \bar{y}$ пропорциональны (это сразу следует из неравенства Коши–Буняковского).

Произвольный базис $e = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ конечномерного евклидова пространства V называется *ортогональным*, если базисные векторы попарно перпендикулярны, то есть $\bar{e}_i \perp \bar{e}_j$ при $i \neq j$. Ортогональный базис называется *ортонормированным* (*декартовым*), если длины всех базисных векторов равны единице, то есть $\|\bar{e}_i\| = 1$ для любого i. К примеру, стандартный базис $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением является ортонормированным. Из любого ортогонального базиса $g = \{\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n\}$ легко получить ортонормированный базис $f = \{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n\}$, полагая $\bar{f}_i = \dfrac{1}{\|\bar{g}_i\|} \cdot \bar{g}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

В любом конечномерном евклидовом пространстве *существует* ортогональный базис (а значит, существует и ортонормированный). Более того, если $f = \{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n\}$ — произвольный базис V, то найдётся единственный (с точностью до умножения каждого вектора на произвольную ненулевую константу) ортогональный базис g, удовлетворяющий условию $\langle \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_i \rangle = \langle \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_i \rangle$ для любого i от 1 до n. Базис g называется *ортогонализацией* f *по Граму–Шмидту* и может быть последовательно найден по формулам

$$\bar{g}_1 = \bar{f}_1,$$

$$\bar{g}_k = \bar{f}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\bar{g}_i, \bar{f}_k)}{(\bar{g}_i, \bar{g}_i)} \cdot \bar{g}_i \text{ для любого } k \text{ от } 2 \text{ до } n.$$

Пример. Пусть $V = \mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением, $L = \langle \bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3, \bar{f}_4 \rangle$, где

$$\bar{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{f}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{f}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \bar{f}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Будучи подпространством в V, L само является евклидовым пространством. Найдём ортогональный базис L. Для этого заметим, что $\dim L = 3$ и векторы $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$, $\bar{f}_3$ образуют базис L. Применим к этому базису процедуру ортогонализации по Граму–Шмидту: $\bar{g}_1 = \bar{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\quad \bar{g}_1 = \bar{f}_2 - \dfrac{(\bar{g}_1, \bar{f}_2)}{(\bar{g}_1, \bar{g}_1)} \cdot \bar{g}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\bar{g}_3 = \bar{f}_3 - \dfrac{(\bar{g}_1, \bar{f}_3)}{(\bar{g}_1, \bar{g}_1)} \cdot \bar{g}_1 - \dfrac{(\bar{g}_2, \bar{f}_3)}{(\bar{g}_2, \bar{g}_2)} \cdot \bar{g}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Итак, $\{\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3\}$ — ортогональный базис подпространства L.

Во всех задачах, если не оговорено иное, через V обозначается евклидово пространство $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением.

Найдите базис ортогонального дополнения к линейной оболочке системы векторов $L = \langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3 \rangle$.

9.1. $\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

9.2. $\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Найдите уравнения, задающие ортогональное дополнение к подпространству L, заданному системой уравнений.

9.3. $L\colon \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 & = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 & = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 & = 0. \end{cases}$

9.4. $L\colon \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 & = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 11x_3 - 13x_4 & = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 18x_3 - 23x_4 & = 0. \end{cases}$

Найдите ортогональную проекцию $\bar{y}$ вектора $\bar{x}$ на подпространство L и ортогональную составляющую $\bar{z}$.

9.5. $L = \left\langle \bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$

9.6. $L = \left\langle \bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$

9.7. L задаётся системой уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 & = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 & = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 & = 0, \end{cases} \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Постройте ортогональный базис линейной оболочки системы векторов.

9.8. $L = \left\langle \bar{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \bar{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \bar{f}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} \right\rangle$.

9.9. $L = \left\langle \bar{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \bar{f}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \bar{f}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \right\rangle$.

9.10. $L = \left\langle \bar{f}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \bar{f}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \bar{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{f}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \right\rangle$.

9.11. $L = \left\langle \bar{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \bar{f}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \bar{f}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \bar{f}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

9.12*. Рассмотрим пространство $V = \mathbb{R}_n[x]$ со скалярным произведением $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$. Покажите, что при ортогонализации степенного базиса V получается базис, состоящий из многочленов, пропорциональных многочленам Лежандра (их определение см. в задаче 7.17).

9.13*. Пусть $V = C[-1, 1]$ — пространство непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ функций со скалярным произведением $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$. а) Найдите ортогональное дополнение к подпространству постоянных функций. б) Найдите ортогональное дополнение к подпространству чётных функций.

9.14*. Докажите, что для ненулевых векторов $\bar{x}, \bar{y}$ в евклидовом пространстве V существует единственное число $\varphi \in [0, \pi]$ такое, что $\cos\varphi = \dfrac{(\bar{x}, \bar{y})}{\|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|}$. (Оно называется *углом* между векторами $\bar{x}$ и $\bar{y}$. Если $(\bar{x}, \bar{y}) > 0$, то угол называется *острым*, если $(\bar{x}, \bar{y}) < 0$ — *тупым*, если $(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ — *прямым*.)

9.15*. а) Пусть векторы $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_{n+1}$, лежащие в n-мерном евклидовом пространстве, образуют попарно тупые углы. Докажите, что любые n из них являются базисом. б) Докажите, что в n-мерном евклидовом пространстве $n+2$ вектора не могут образовывать попарно тупые углы.

9.16*. Найдите ортогональное дополнение к пространству симметрических матриц в евклидовом пространстве $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ со скалярным произведением $(X, Y) = \operatorname{tr} XY^t$.

§10. Сопряжённые и самосопряжённые операторы

Пусть V — евклидово пространство, $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор. Оператор $\varphi^*\colon V \to V$ называется *сопряжённым* к φ, если $(\varphi\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, \varphi^*\bar{y})$ для любых $\bar{x}, \bar{y} \in V$. Если V конечномерно, e — произвольный ортонормированный базис V и $\varphi \overset{e}{\rightsquigarrow} A$, то $\varphi^* \overset{e}{\rightsquigarrow} A^t$ (это показывает, что всякий линейный оператор обладает единственным сопряжённым).

Пример. 1. Пусть линейный оператор $\varphi\colon V \to V$ имеет в базисе e' векторного пространства V матрицу $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Найдём матрицу сопряжённого оператора в базисе e', если $\bar{e}'_1 = 2\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2$, $\bar{e}'_2 = -3\bar{e}_1 + 4\bar{e}_2$, где e — какой-то ортонормированный базис V. Заметим для этого, что $e' = eT$, где $T = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ — матрица перехода. Значит,

$$\varphi \overset{e}{\rightsquigarrow} A = TA'T^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \varphi^* \overset{e}{\rightsquigarrow} B = A^t = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\varphi^* \overset{e}{\rightsquigarrow} B' = T^{-1}BT = \begin{pmatrix} 127 & -166 \\ 90 & -124 \end{pmatrix}.$$

2. Пусть линейный оператор $\varphi\colon V \to V$ имеет в базисе e векторного пространства V матрицу $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Найдём матрицу сопряжённого оператора в том же самом базисе e, если скалярное произведение задано билинейной формой $(\bar{x}, \bar{y}) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 5x_2y_2$ (координаты всех векторов даны в базисе e).

Матрица данной билинейной формы в базисе e имеет вид $S = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$. Видно, что $S^t = S$, так что перед нами симметрическая билинейная форма. Кроме того, угловые миноры матрицы S равны $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 1 > 0$, поэтому (по критерию Сильвестра) наша форма положительно определена. Таким образом, указанная билинейная форма $(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}^t S\bar{y}$ *действительно* является скалярным произведением.

Предположим, что $\varphi^* \overset{e}{\rightsquigarrow} B$. Тогда, по определению,

$$(\varphi\bar{x}, \bar{y}) = (A\bar{x}^t)S\bar{y} = \bar{x}^t A^t S\bar{y}, \quad (\bar{x}, \varphi^*\bar{y}) = \bar{x}^t SB\bar{y}.$$

Для равенства скалярных произведений при всех $\bar{x}, \bar{y} \in V$ необходимо и достаточно, чтобы $A^tS = SB$, то есть $B = S^{-1}A^tS$. Итак,

$$\varphi^* \overset{e}{\rightsquigarrow} B = S^{-1}A^tS = \begin{pmatrix} -52 & 85 \\ -33 & 54 \end{pmatrix}.$$

Оператор $\varphi\colon V \to V$ называется *самосопряжённым*, если он совпадает со своим сопряжённым, то есть $\varphi = \varphi^*$. Если пространство V конечномерно, то в нём существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов самосопряжённого оператора φ. Иначе говоря, в V найдётся ортонормированный базис, в котором φ задаётся диагональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

где λ_i — собственные числа оператора φ.

Пример. Найдём ортонормированный базис евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением, состоящий из собственных векторов самосопряжённого оператора $\varphi\colon V \to V$, который в стандартном базисе задаётся матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Сначала найдём собственные числа φ — корни характеристического уравнения $\lambda^3 - 12\lambda^2 + 45\lambda - 50 = (\lambda - 5)^2(\lambda - 2) = 0$ (см. параграф 7). Очевидно, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$. Базис собственного подпространства V_2 — это в точности ФСР системы линейных однородных уравнений с матрицей $A - 2E$. Решая её методом Гаусса, получаем, что $V_2 = \langle \bar{f}_3 \rangle$, где

$$\bar{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, базис V_5 — это ФСР однородной системы с матрицей $A - 5E$. Решая её методом Гаусса, получаем, что $V_5 = \langle \bar{f}_1, \bar{f}_2 \rangle$, где

$$\bar{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{f}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Проблема заключается в том, что эти два вектора не ортогональны. Применяя к ним процедуру ортогонализации по Граму–Шмидту (см. предыдущий параграф), находим, что $V_5 = \langle \bar{g}_1, \bar{g}_2 \rangle$, где векторы

$$\bar{g}_1 = \bar{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{g}_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

уже ортогональны. Чтобы получить ортонормированный базис из собственных векторов, осталось поделить найденные векторы на их длины:

$$\bar v_1 = \frac{1}{\|\bar g_1\|}\bar g_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \bar v_2 = \frac{1}{\|\bar g_2\|}\bar g_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix},$$

$$\bar v_3 = \frac{1}{\|\bar f_3\|}\bar f_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

В ортонормированном базисе v оператор φ будет задаваться диагональной матрицей $D = \begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\0 & 5 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

Линейный оператор $\varphi\colon V \to V$ задан своей матрицей A' в базисе e' евклидова пространства V. Найдите матрицу B' сопряжённого оператора φ^* в том же базисе e'.

10.1. V — двумерное пространство, e — какой-то ортонормированный базис V, $\bar e_1' = \bar e_1 + 3\bar e_2$, $\bar e_2' = -2\bar e_1 - 5\bar e_2$, $A' = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$.

10.2. V — двумерное пространство, e — какой-то ортонормированный базис V, $\bar e_1' = \bar e_1$, $\bar e_2' = \bar e_1 + \bar e_2$, $A' = \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & -1\end{pmatrix}$.

10.3. $V = \mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением, e — стандартный базис, $\bar e_1' = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\bar e_2' = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $\bar e_3' = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\0 & 5 & -1\\2 & 7 & -3\end{pmatrix}$.

Линейный оператор $\varphi\colon V \to V$ задан своей матрицей A в базисе e евклидова пространства V со скалярным произведением, заданным билинейной формой $(\bar x, \bar y)$. Найдите матрицу B сопряжённого оператора φ^* в базисе e.

10.4. $(\bar x, \bar y) = x_1y_1 + 5x_2y_2 + 6x_3y_3 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2$ (координаты всех векторов даны в базисе e), $A = \begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\2 & 0 & -1\\3 & -2 & 0\end{pmatrix}$.

10.5. $(\bar x, \bar y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$ (координаты всех векторов даны в базисе e), $A = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\-1 & -3 & 1\\1 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

10.6*. а) Пусть $\bar{a}, \bar{b}$ — какие-то фиксированные векторы евклидова пространства V. Найдите сопряжённый оператор к оператору $\varphi\colon V \to V$ вида $\varphi(\bar{x}) = (\bar{x}, \bar{a})\bar{b}$, $\bar{x} \in V$. б) Пусть $\bar{a}$ — какой-то фиксированный вектор пространства V трёхмерных геометрических векторов с обычным скалярным произведением. Найдите сопряжённый оператор к оператору φ вида $\varphi(\bar{x}) = [\bar{x}, \bar{a}]$, $\bar{x} \in V$ (квадратные скобки обозначают векторное произведение).

10.7*. Пусть $V = \mathbb{R}[x]$ со скалярным произведением $(f, g) = \sum_{i=0}^{\infty} i! a_i b_i$, где $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$, $g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots$ (проверьте, что это действительно скалярное произведение!). а) Найдите сопряжённый оператор к оператору дифференцирования $\varphi(f) = f'$. б) Найдите сопряжённый оператор к оператору $\varphi(f) = x^3 f''$.

10.8*. Пусть $V = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ со скалярным произведением $(X, Y) = \mathrm{tr}\, XY^t$. а) Найдите сопряжённый оператор к оператору $\varphi\colon V \to V$ вида $\varphi(X) = AX$, где $A \in V$ — какая-то фиксированная матрица. б) Докажите, что оператор транспонирования является самосопряжённым. Постройте ортонормированный базис V, состоящий из собственных векторов этого оператора.

Самосопряжённый оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ задан своей матрицей A в стандартном базисе $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением. Найдите ортонормированный базис $\mathbb{R}^n$, состоящий из собственных векторов оператора φ, и матрицу φ в этом базисе.

10.9. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -7 \\ -2 & -7 & 1 \end{pmatrix}$.

10.10. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -6 \\ -3 & -6 & 7 \end{pmatrix}$.

10.11. $\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1/2 & -7/2 \\ -\sqrt{2} & -7/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

10.12. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

10.13. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & 13 \end{pmatrix}$.

10.14. $\begin{pmatrix} 9 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & 9 \end{pmatrix}$.

10.15. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

10.16. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

10.17*. Пусть $V = \mathbb{R}[x]$ — пространство многочленов со скалярным произведением $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$. Проверьте, что оператор φ из задачи 7.17 является самосопряжённым.

10.18*. Пусть V — конечномерное евклидово пространство, $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор. а) Покажите, что $\operatorname{Ker}\varphi^* = (\operatorname{Im}\varphi)^{\perp}$ и $\operatorname{Im}\varphi^* = (\operatorname{Ker}\varphi)^{\perp}$. б) Выведите отсюда, что в любом базисе матрицы операторов φ и φ^* будут иметь одинаковые ранги.

10.19*. Пусть V — конечномерное евклидово пространство, $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор. Рассмотрим четыре системы уравнений:

1. $\varphi\bar{x} = \bar{y}, \quad \bar{y} \in V.$
2. $\varphi^*\bar{z} = \bar{w}, \quad \bar{w} \in V.$
3. $\varphi\bar{x} = \bar{0}.$
4. $\varphi^*\bar{z} = \bar{0}.$

Докажите, что выполняется так называемая *альтернатива Фредгольма*: либо первая и вторая системы совместны при всех правых частях, причём в этом случае каждая из них имеет единственное решение, либо пространства решений U и W третьей и четвёртой систем имеют одинаковую размерность, причём в этом случае первая система совместна тогда и только тогда, когда $\bar{y} \in W^{\perp}$, а вторая — тогда и только тогда, когда $\bar{w} \in U^{\perp}$.

10.20*. Пусть V — конечномерное евклидово пространство, φ, ψ — самосопряжённые операторы на V, A, B — их матрицы в некотором ортонормированном базисе e пространства V, причём $\det A \neq 0$ и матрица $D = A^{-1}B$ диагональна; обозначим её (i, i)-ый элемент через λ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Докажите, что если $\lambda_i \neq \lambda_j$, то вектор $\bar{e}_j$ перпендикулярен обоим векторам $\varphi\bar{e}_i$ и $\psi\bar{e}_i$.

10.21*. Для произвольных симметрических матриц $A, B \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$ будем писать $A > 0$, если A является матрицей положительно определённой квадратичной формы на каком-то n-мерном пространстве, и $A > B$, если $A - B > 0$. Покажите, что если $A > 0$ и $\det(A - E) \neq 0$, то $\det A \neq 0$ и $A + A^{-1} > 2E$.

Ответы

1.1. 18. **1.2.** -9. **1.3.** -3. **1.4.** 18. **1.5.** 4. **1.6.** -63. **1.7.** 17. **1.8.** -8. **1.9.** -6. **1.10.** 100. **1.11.** 27. **1.12.** 78. **1.13.** 1. **1.14.** 52. **1.15.** 5. **1.16.** 1. **1.17.** 1. **1.18.** 10. **1.19.** в) 1. **1.20.** $(1-a^2)^{n-1}$.
1.21. Четыре четвёрки, одна тройка, четыре двойки, остальные единицы.

2.1. $\begin{pmatrix}5 & 2\\ 7 & 0\end{pmatrix}$. **2.2.** $\begin{pmatrix}1 & 5 & -5\\ 3 & 10 & 0\\ 2 & 9 & -7\end{pmatrix}$. **2.3.** $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. **2.4.** $\begin{pmatrix}11 & -22 & 29\\ 9 & -27 & 32\\ 13 & -17 & 26\end{pmatrix}$.

2.5. $\begin{pmatrix}8 & 6 & 4 & 2\\ 5 & 0 & -5 & -10\\ 7 & 7 & 7 & 7\\ 10 & 9 & 8 & 7\end{pmatrix}$. **2.6.** $\begin{pmatrix}10 & 17 & 19 & 23\\ 17 & 23 & 27 & 25\\ 16 & 12 & 9 & 20\\ 7 & 1 & 3 & 10\end{pmatrix}$. **2.7.** $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$.

2.8. $\begin{pmatrix}13 & -14\\ 21 & -22\end{pmatrix}$. **2.9.** $\begin{pmatrix}304 & -61\\ 305 & -62\end{pmatrix}$. **2.10.** $\begin{pmatrix}1 & 16 & 0\\ 0 & 10 & 0\\ 0 & -180 & 5\end{pmatrix}$. **2.11.** $\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

2.12. $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -38 & 41 & -34\\ 27 & -29 & 24\end{pmatrix}$. **2.13.** $\begin{pmatrix}-8 & 29 & -11\\ -5 & 18 & -7\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix}$. **2.14.** $\begin{pmatrix}7 & -4\\ -5 & 3\end{pmatrix}$.

2.15. $\begin{pmatrix}-\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3}\\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3}\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$. **2.16.** $\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$. **2.17.** $\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

2.18. $\begin{pmatrix}22 & -6 & -26 & 17\\ -17 & 5 & 20 & -13\\ -1 & 0 & 2 & -1\\ 4 & -1 & -5 & 3\end{pmatrix}$. **2.19.** $\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$. **2.20.** $\begin{pmatrix}6 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}$.

2.21. $\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}$. **2.22.** $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$. **2.23.** $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$. **2.24.** $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

2.25. $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ при чётном n, $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$ при нечётном n. **2.26.** $\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

2.27. $\begin{pmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & \lambda^n\end{pmatrix}$. **2.28.** $\begin{pmatrix}\cos n\alpha & -\sin n\alpha\\ \sin n\alpha & \cos n\alpha\end{pmatrix}$. **2.29.** Если $A = J^m$, то $a_{i,j} = \begin{cases}1 & \text{при } j=i+m, 1\leqslant i\leqslant n-m,\\ 0 & \text{в остальных случаях}\end{cases}$. **2.33.** $\begin{pmatrix}E & -A & AB\\ 0_n & E & -B\\ 0_n & 0_n & E\end{pmatrix}$.

3.1. 2. **3.2.** 3. **3.3.** 3. **3.4.** 2. **3.5.** 3. **3.6.** 2. **3.7.** 3. **3.8.** 2. **3.9.** Ранг равен 3 при $\lambda \neq 0$ и 2 при $\lambda = 0$. **3.10.** Ранг равен 3 при $\lambda \neq 3$ и 2 при $\lambda = 3$. **3.13.** Ранг равен 21 при $X \neq 0$ и 1 при $X = 2$.

4.1. Система имеет только нулевое решение, ФСР не существует. **4.2.** $\bar{x}_{\text{общ}} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5/2 \\ 7/2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. **4.3.** Система имеет только нулевое решение, ФСР не существует. **4.4.** $\bar{x}_{\text{общ}} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. **4.5.** $\bar{x}_{\text{общ}} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.

4.6. $\bar{x}_{\text{общ}} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -9/4 \\ 3/4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.

4.7. $\bar{x}_{\text{общ}} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2/3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. **4.8.** $\bar{x}_{\text{общ}} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. **4.9.** Система имеет единственное решение $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4.10. $\bar{x}_{\text{общ}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. **4.11.** Система имеет единственное решение $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$. **4.12.** $\bar{x}_{\text{общ}} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\22\\-16\end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\-33\\24\end{pmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. **4.13.** Система несовместна. **4.14.** $\bar{x}_{\text{общ}} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix} + \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\-3\\0\end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\-4\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. **4.15.** $\bar{x}_{\text{общ}} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix} + \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\-15\\18\end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\10\\-12\end{pmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. **4.16.** $\bar{x}_{\text{общ}} = \begin{pmatrix}2\\1\\22/5\\8/5\end{pmatrix} + \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix}5\\0\\34\\16\end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\5\\-17\\-8\end{pmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. **4.17.** $\bar{x}_{\text{общ}} = \begin{pmatrix}-2\\2\\3\\-1\end{pmatrix} + \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix}8\\-13\\-6\\7\end{pmatrix}$, $\alpha_1 \in \mathbb{R}$. **4.18.** Система несовместна. **4.19.** Система несовместна. **4.20.** $\bar{x}_{\text{общ}} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\\1\end{pmatrix} + \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\-8\\0\\2\end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\4\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. **4.21.** $\bar{x}_{\text{общ}} = \begin{pmatrix}1\\8\\13\\0\\-34\end{pmatrix} + \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-3\\0\end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-2\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. **4.22.** $\bar{x}_{\text{общ}} = \begin{pmatrix}1\\-3\\1/2\\-5/2\\5/2\end{pmatrix} + \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-2\\-2\end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\-2\\-4\\-4\end{pmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. **4.23.** $\bar{x}_{\text{общ}} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\\-8\\4\end{pmatrix} + \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix}3\\0\\4\\-14\\4\end{pmatrix} +$

$+\alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. **4.24.** Система несовместна. **4.25.** При $\lambda = -2$ система несовместна. При $\lambda = 1$ общее решение имеет вид $\bar{x}_{\text{общ}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. При $\lambda \neq 1, \lambda \neq -2$ система имеет единственное решение $\bar{x} = \frac{1}{\lambda+2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. **4.26.** При $\lambda = -3$ система несовместна. При $\lambda = 1$ общее решение имеет вид $\bar{x}_{\text{общ}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. При $\lambda \neq 1, \lambda \neq -3$ система имеет единственное решение $\bar{x} = \frac{1}{\lambda+3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. **4.27.** Общий вид решения:

$$\begin{pmatrix} 7-3\alpha_1 & 5-3\alpha_2 & 7-3\alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 5\alpha_1-9 & 5\alpha_2-3 & 5\alpha_3-7 \end{pmatrix},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ — любые числа. **4.28.** Общий вид решения:

$$\text{а)}\ \begin{pmatrix} \alpha_1 & 2\alpha_2 \\ 2\alpha_2 & \alpha_1+3\alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \text{б)}\ \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad \text{в)}\ \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 \end{pmatrix},$$

где $\alpha_i \in \mathbb{R}$ — произвольные числа.

5.1. $\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$. **5.2.** $\begin{pmatrix}3/2\\-1/2\end{pmatrix}$. **5.3.** $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$. **5.4.** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. **5.5.** $\begin{pmatrix}-27\\9\\4\end{pmatrix}$.

5.6. $\begin{pmatrix}0\\2\\1\\2\end{pmatrix}$. **5.7.** $\begin{pmatrix}-3\\3\\1\\-1\end{pmatrix}$. **5.8.** $\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\-1\end{pmatrix}$. **5.10.** $f(x) = b_0+\ldots+b_n(x-a)^n$, где $b_n = a_n$ и $b_i = a_i+ab_{i+1}$ для всех $i = 0, \ldots, n-1$. **5.13.** Размерность равна 3, $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_4$ — базис. **5.14.** Размерность равна 2, $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ — базис. **5.15.** Размерность равна 2, $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ — базис. **5.16.** Размерность равна 3, $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_5$ — базис.

5.17. $\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 &= 0,\\ x_2 - x_3 + x_4 &= 0.\end{cases}$ **5.18.** $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 &= 0,\\ x_3 + x_4 &= 0,\\ 3x_1 + 2x_4 - x_5 &= 0.\end{cases}$

5.19. $\langle S\rangle + \langle T\rangle$ совпадает с $\langle S\rangle \cap \langle T\rangle$, $\dim(\langle S\rangle + \langle T\rangle) = \dim(\langle S\rangle \cap \langle T\rangle) = 2$, $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ — их общий базис. **5.20.** $\dim(\langle S\rangle + \langle T\rangle) = 3$, $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_1$ — её базис, $\dim(\langle S\rangle \cap \langle T\rangle) = 1$, $2\bar{a}_1 + \bar{a}_2 = \bar{b}_1 + \bar{b}_2$ — его базис. **5.21.** $\dim(\langle S\rangle + \langle T\rangle) = 4$, $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{b}_1$ — её базис, $\dim(\langle S\rangle \cap \langle T\rangle) = 2$, $-2\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + a_3 = \bar{b}_1$, $5\bar{a}_1 - \bar{a}_2 - 2\bar{a}_3 = \bar{b}_2$ — его базис. **5.22.** $\dim(\langle S\rangle + \langle T\rangle) = 4$, $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{b}_3$ — её базис, $\dim(\langle S\rangle \cap \langle T\rangle) = 2$, $3\bar{a}_1 + \bar{a}_2 - 5a_3 = \bar{b}_1$, $4\bar{a}_1 + \bar{a}_2 - 7\bar{a}_3 = \bar{b}_2$ — его базис. **5.23.** $\dim(\langle S\rangle + \langle T\rangle) = 4$, $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{b}_1$ — её базис, $\dim(\langle S\rangle \cap \langle T\rangle) = 2$, $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\3\\1\\-1\end{pmatrix}$ — его базис. **5.24.** $\dim(\langle S\rangle + \langle T\rangle) = 4$, $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{b}_1$ — её базис, $\dim(\langle S\rangle \cap \langle T\rangle) = 2$, $\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ — его базис. **5.25.** $\begin{pmatrix}-1\\-3\\1\\3\end{pmatrix}$. **5.26.** $\begin{pmatrix}6\\9\\8\\7\end{pmatrix}$.

5.27. $\begin{pmatrix}-2\\-18\\-16\\-24\end{pmatrix}$. **5.28.** $\begin{pmatrix}3\\1\\2\\0\end{pmatrix}$. **5.29.** Проекция вектора $\bar{e}_i$ на U имеет i-ую координату, равную $(n-1)/n$; все остальные координаты равны $-1/n$. Все координаты проекции $\bar{e}_i$ на V равны $1/n$. **5.30.** Проекции любой матрицы A

на U и на V равны $\frac{1}{2}\cdot(A+A^t)$ и $\frac{1}{2}\cdot(A-A^t)$ соответственно. **5.31.** Проекции f на U и на V равны $a_0+a_2x^2+a_4x^4+\ldots$ и $a_1x+a_3x^3+a_5x^5+\ldots$ соответственно. **5.34.** Нет.

6.1. $\dim\operatorname{Ker}\varphi=1$, $\dim\operatorname{Im}\varphi=2$, $\operatorname{Ker}\varphi=\left\langle\begin{pmatrix}-1\\7\\4\end{pmatrix}\right\rangle$, $\operatorname{Im}\varphi=\langle\varphi\bar e_1,\varphi\bar e_2\rangle$ задаётся одним уравнением $x_1-x_2+x_3=0$. **6.2.** $\dim\operatorname{Ker}\varphi=1$, $\dim\operatorname{Im}\varphi=2$, $\operatorname{Ker}\varphi=\left\langle\begin{pmatrix}1\\-25\\9\end{pmatrix}\right\rangle$, $\operatorname{Im}\varphi=\langle\varphi\bar e_1,\varphi\bar e_2\rangle$ задаётся одним уравнением $x_1-4x_2+x_3=0$. **6.3.** $\dim\operatorname{Ker}\varphi=1$, $\dim\operatorname{Im}\varphi=2$, $\operatorname{Ker}\varphi=\left\langle\begin{pmatrix}-6\\1\\5\end{pmatrix}\right\rangle$, $\operatorname{Im}\varphi=\langle\varphi\bar e_1,\varphi\bar e_2\rangle$ задаётся одним уравнением $x_1+4x_2-x_3=0$. **6.4.** $\dim\operatorname{Ker}\varphi=1$, $\dim\operatorname{Im}\varphi=2$, $\operatorname{Ker}\varphi=\left\langle\begin{pmatrix}-18\\-6\\1\end{pmatrix}\right\rangle$, $\operatorname{Im}\varphi=\langle\varphi\bar e_1,\varphi\bar e_2\rangle$ задаётся одним уравнением $2x_1+3x_2-x_3=0$. **6.5.** $\dim\operatorname{Ker}\varphi=2$, $\dim\operatorname{Im}\varphi=1$, $\operatorname{Ker}\varphi=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$, $\operatorname{Im}\varphi=\langle\varphi\bar e_1\rangle$ задаётся двумя уравнениями $x_1+x_2=0$, $3x_1+x_3=0$. **6.6.** $\dim\operatorname{Ker}\varphi=2$, $\dim\operatorname{Im}\varphi=1$, $\operatorname{Ker}\varphi=\left\langle\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\right\rangle$, $\operatorname{Im}\varphi=\langle\varphi\bar e_1\rangle$ задаётся двумя уравнениями $x_1+5x_2=0$, $2x_1+5x_3=0$. **6.7.** $\operatorname{Ker}\varphi=\{\bar 0\}$, $\operatorname{Im}\varphi=\mathbb{R}^3$. **6.8.** $\operatorname{Ker}\varphi=\{\bar 0\}$, $\operatorname{Im}\varphi=\mathbb{R}^3$. **6.9.** $\dim\operatorname{Ker}\varphi=2$, $\dim\operatorname{Im}\varphi=2$, $\operatorname{Ker}\varphi=\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-3\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$, $\operatorname{Im}\varphi=\langle\varphi\bar e_1,\varphi\bar e_2\rangle$ задаётся двумя уравнениями $x_1+x_2-x_3=0$, $x_1+3x_2-x_4=0$. **6.10.** $\operatorname{Ker}\varphi=\{\bar 0\}$, $\operatorname{Im}\varphi=\mathbb{R}^4$. **6.11.** $\dim\operatorname{Ker}\varphi=1$, $\dim\operatorname{Im}\varphi=3$, $\operatorname{Ker}\varphi=\left\langle\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$, $\operatorname{Im}\varphi=\langle\varphi\bar e_1,\varphi\bar e_2,\varphi\bar e_3\rangle$ задаётся одним уравнением $x_1+x_2+x_3-x_4=0$. **6.12.** $\dim\operatorname{Ker}\varphi=3$, $\dim\operatorname{Im}\varphi=1$,

$\operatorname{Ker}\varphi = \left\langle \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$, $\operatorname{Im}\varphi = \langle\varphi\bar{e}_1$ задаётся тремя уравнениями $2x_1 + x_2 = 0,\ x_1 + x_3 = 0,\ 5x_1 + x_4 = 0.$ **6.26.** $A' = \begin{pmatrix}3 & 0 & -2\\85 & -3 & -30\\11 & 0 & -7\end{pmatrix}$.

6.27. $A' = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & -1\\0 & 1 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$. **6.28.** $A' = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 1 & 0\\1 & -4 & -8 & -7\\1 & 4 & 4 & 4\\1 & 3 & 6 & 7\end{pmatrix}$. **6.29.** $A' = \frac{1}{18}\cdot\begin{pmatrix}40 & 13 & 1\\-44 & 19 & -29\\16 & -11 & 49\end{pmatrix}$. **6.30.** $A' = \begin{pmatrix}-5 & -7 & -1\\6 & 8 & 1\\-4 & -5 & 0\end{pmatrix}$. **6.31.** $A' = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$. **6.32.** $A' = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\1 & 1 & 3 & 0\\-1 & -1 & -2 & 1\end{pmatrix}$. **6.33.** $A = \begin{pmatrix}-4 & 16 & -8\\-8 & 30 & -15\\-13 & 48 & -24\end{pmatrix}$. **6.34.** $A = \begin{pmatrix}1 & -4 & -12\\0 & -4 & -15\\0 & 1 & 4\end{pmatrix}$. **6.35.** $A'' = \begin{pmatrix}13 & -5 & 8\\41 & -18 & 39\\9 & -3 & 8\end{pmatrix}$. **6.36.** $A'' = \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\3 & -1 & -2\\2 & -3 & 1\end{pmatrix}$. **6.37.** $\eta \overset{e''}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}88 & 45\\-45 & -4\end{pmatrix}$.

6.38. $\eta \overset{e''}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}181 & -33\\384 & -181\end{pmatrix}$.

7.1. $V_1 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$. **7.2.** $V_2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$. **7.3.** $V_1 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$, $V_0 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\rangle$. **7.4.** $V_1 = \left\langle \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$. **7.5.** $V_3 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \right\rangle$, $V_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \right\rangle$. **7.6.** $V_1 = \left\langle \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$, $V_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix}3\\5\\6\end{pmatrix} \right\rangle$. **7.7.** $V_1 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \right\rangle$.

7.8. $V_1 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$, $V_2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix} \right\rangle$. **7.9.** $V_1 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$, $V_2 = \left\langle \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$. **7.10.** $V_1 = \left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$, $V_0 = \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$.

7.11. $V_1 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$, $V_0 = \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$. **7.12.** $V_2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$. **7.13.** $V_1 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$, $V_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$.

7.14. $V_1 = \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\3\\-3\end{pmatrix} \right\rangle$, $V_2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$. **7.15.** $V_2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$, $V_{-2} = \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$. **7.17.** $\lambda_k = k(k+1)$.

8.1. $A = \begin{pmatrix}2 & -3 & -4\\1 & 0 & -5\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. **8.2.** $A = \begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\1 & -2 & 3\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}$. **8.3.** -43. **8.4.** -2.

8.5. $A' = \begin{pmatrix}0 & -6 & -9\\-2 & 20 & 30\\-3 & 30 & 45\end{pmatrix}$. **8.6.** $A' = \begin{pmatrix}11 & 8 & 15\\6 & 5 & 12\\11 & 10 & 29\end{pmatrix}$.

8.8. $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, $r_+ = 2$, $r_- = 1$. **8.9.** $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$, $r_+ = 1$, $r_- = 2$. **8.10.** $y_1^2 - y_2^2$, $r_+ = 1$, $r_- = 1$. **8.11.** $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, $r_+ = 2$, $r_- = 1$. **8.12.** $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, $r_+ = 2$, $r_- = 1$. **8.13.** $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$, $r_+ = 1$, $r_- = 2$. **8.14.** $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$, $r_+ = 1$, $r_- = 2$. **8.15.** $y_1^2 - y_2^2$, $r_+ = 1$, $r_- = 1$. **8.16.** $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$, $r_+ = 1$, $r_- = 3$. **8.17.** $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, $r_+ = 2$, $r_- = 1$. **8.18.** $\lambda > 2$. **8.19.** $|\lambda| < \sqrt{5/3}$. **8.20.** $-4/5 < \lambda < 0$. **8.21.** Ни при каких λ. **8.22.** Ни при каких λ. **8.23.** $\lambda < -20$. **8.24.** $\lambda > 3/5$.

9.1. $L^{\perp} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$. **9.2.** $L^{\perp} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

9.3. $x_1 + x_2 = 0$. **9.4.** $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 0, \\ -18x_1 + x_2 + 18x_3 + 11x_4 & = 0. \end{cases}$ **9.5.** $\bar{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$,

$\bar{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. **9.6.** $\bar{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\bar{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$. **9.7.** $\bar{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\bar{z} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5/2 \\ -5/2 \\ 2 \end{pmatrix}$. **9.8.** $\bar{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\bar{g}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\bar{g}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

9.9. $\bar{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\bar{g}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. **9.10.** $\bar{g}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\bar{g}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

9.11. $\bar{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\bar{g}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\bar{g}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{g}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Годится, впрочем, и просто стандартный базис $\mathbb{R}^4$.

10.1. $B' = \begin{pmatrix} 34 & -59 \\ 19 & -33 \end{pmatrix}$. **10.2.** $B' = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$. **10.3.** $B' = \begin{pmatrix} -36 & -37 & -15 \\ 30 & 30 & 14 \\ 26 & 27 & 9 \end{pmatrix}$. **10.4.** $B' = \begin{pmatrix} 128 & 413 & 514 \\ 36 & 117 & 145 \\ -61 & -197 & -245 \end{pmatrix}$. **10.5.** $B' = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ -5 & -7 & -2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$. **10.6.** а) $\varphi^*(\bar{x}) = (\bar{x}, \bar{b})\bar{a}$. б) $\varphi^* = -\varphi$. **10.7.** а) $\varphi^*(f) = xf$. б) $\varphi^*(f) = x^2 f'''$. **10.8.** а) $\varphi^*(X) = A^t X$. **10.9.** $\bar{v}_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\bar{v}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$, $\bar{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\varphi \overset{v}{\rightsquigarrow} D = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&9&0\\0&0&-6\end{pmatrix}$. **10.10.** $\bar{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$, $\bar{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix}1\\-5\\-3\end{pmatrix}$, $\bar{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$, $\varphi \overset{v}{\rightsquigarrow} D = \begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&12\end{pmatrix}$.

10.11. $\bar{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}2\sqrt{2}\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\bar{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\bar{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$, $\varphi \overset{v}{\rightsquigarrow} D = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$. **10.12.** $\bar{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\bar{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\bar{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\varphi \overset{v}{\rightsquigarrow} D = \begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&9\end{pmatrix}$. **10.13.** $\bar{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\bar{v}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\bar{v}_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$, $\varphi \overset{v}{\rightsquigarrow} D = \begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-3&0\\0&0&15\end{pmatrix}$. **10.14.** $\bar{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\bar{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\bar{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\varphi \overset{v}{\rightsquigarrow} D = \begin{pmatrix}10&0&0\\0&10&0\\0&0&7\end{pmatrix}$. **10.15.** $\bar{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\bar{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\bar{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\bar{v}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\varphi \overset{v}{\rightsquigarrow} D = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$. **10.16.** $\bar{v}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\bar{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\bar{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\0\end{pmatrix}$, $\bar{v}_4 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-3\end{pmatrix}$, $\varphi \overset{v}{\rightsquigarrow} D = \begin{pmatrix}3&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$.

Список литературы

[V1] Винберг Э.Б. Курс алгебры. — М.: Факториал Пресс, 2004. — 544 с.

[V2] Винберг Э.Б. Линейные представления групп. — М.: Наука, 1985. — 144 с.

[G] Городенцев А.Л. Алгебра. Курс лекций в первом модуле 2008/2009 учебного года факультета математики Высшей школы экономики, см. `http://math.hse.ru/courses_math/09/math_total.html`.

[D] Дёмин И.В. Задачи по линейной алгебре. Практикум для студентов механико-математического факультета. I семестр. — Самара: Издательство «Самарский университет», 1994. — 64 с.

[DR] Дёмин И.В., Рудман Р.М. Задачи по линейной алгебре. Учебное пособие. — Самара: Издательство «Самарский университет», 2002. — 48 с.

[ZO1] Зуланке Р., Онищик А.Л. Алгебра и геометрия: в 3 томах. — Том 1: Введение. — М.: МЦНМО, 2004. — 408 с.

[ZO2] Зуланке Р., Онищик А.Л. Алгебра и геометрия: в 3 томах. — Том 2: Модули и алгебры. — М.: МЦНМО, 2008. — 336 с.

[K1] Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 1: Основы алгебры. — М.: МЦНМО, 2009. — 272 с.

[K2] Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 2: Линейная алгебра. — М.: МЦНМО, 2009. — 368 с.

[K3] Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 3: Основные структуры алгебры. — М.: МЦНМО, 2009. — 272 с.

[K4] Кострикин А.И., под ред. Сборник задач по алгебре. — М.: МЦНМО, 2009. — 408 с.

[KM] Кострикин А.И, Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. — М.: Лань, 2008. — 304 с.

[Pa] Панов А.Н. Сборник задач по линейной алгебре и геометрии. Учебное пособие. — Самара: Издательство «Самарский университет», 2006. — 40 с.

[Pr] Прасолов В.В. Задачи и теоремы линейной алгебры. — М.: Наука, 1996. — 304 с., см. также `http://www.mccme.ru/prasolov`.

[Ps] Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. — М.: «Бином. Лаборатория знаний», 2003. — 384 с.

[Ol] Студенческие олимпиады на кафедре высшей алгебры механико-математического факультета МГУ им. М.В, Ломоносова, см. `http://mech.math.msu.su/algebra/Olympiad`.

[E] Etingof P., et al. Introduction to representation theory, see arXiv: `math.RT/0901.0827v4`.

Содержание

Учебное издание

Игнатьев Михаил Викторович

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Сборник задач

Публикуется в авторской редакции
Компьютерная верстка, макет М. В. Игнатьев

Подписано в печать 17.01.2013.
Гарнитура Times New Roman. Формат $60 \times 84/16$.
Typeset by LaTeX. Бумага офсетная. Печать оперативная.
Усл.-печ. л. 4,65. Уч.-изд. л. 5,0. Тираж 100 экз. Заказ № 2281.
Издательство «Самарский университет»,
443011, Самара, ул. Академика Павлова, 1.

Отпечатано на УОП СамГУ.