ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени академика С.П. Королева

ЖОРДАНОВА НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА МАТРИЦ

*Методические указания
к выполнению индивидуальных домашних заданий*

САМАРА 1996

Составитель Л.Н. П р о к о ф ь е в

УДК 517

Жорданова нормальная форма матриц: Методические указания к выполнению индивидуальных домашних заданий/ Самар. гос. аэрокосм. ун-т; Сост. *Л.Н. Прокофьев*. Самара, 1996. 24 с.

Содержатся краткие теоретические сведения, решения типовых задач и варианты индивидуальных заданий (25 вариантов) по разделу линейной алгебры — жордановым нормальным формам матриц. Могут быть использованы при организации самостоятельной работы студентов.

Предназначены для студентов специальности 22.02.

Подготовлены на кафедре «Прикладная математика».

Печатаются по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П. Королева

Рецензент А.А. К а л е н т ь е в

1. ЖОРДАНОВА НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА МАТРИЦ

Пусть f — линейный оператор, действующий в линейном пространстве V. Ясно, что если в V найдется n линейно-независимых собственных векторов оператора f, то в базисе, состоящем из этих векторов, матрица оператора f приводится к диагональному виду

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & 0 \\ 0 & & \ddots\lambda_n \end{pmatrix},$$

где λ_i — собственные значения f.

Так будет, в частности, в том случае, если характеристический многочлен оператора f имеет n попарно различных корней, так будет и в случае любого самосопряженного оператора как в унитарном, так и в евклидовом пространстве.

Однако к такому простому диагональному виду приводится матрица далеко не каждого линейного оператора. Например, пусть линейный оператор f имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ в некотором базисе e_1, e_2, тогда $\varphi(\lambda) = (2-\lambda)^2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2$.

Собственные векторы этого оператора определяются уравнением $0 \cdot \xi_1 + 1 \cdot \xi_2 = 0 \Leftrightarrow \xi_2 = 0$ (ξ_1 и ξ_2 — координаты вектора).

Таким образом, все собственные векторы имеют вид $x = (c, 0)$, где $c \neq 0$ или $x = c \cdot e_1$, где $e_1 = (1, 0)$. Поэтому не существует базиса, образованного собственными векторами оператора f, и, значит, его матрица ни в каком базисе не приводится к диагональному виду. Поэтому возникает вопрос о каком-то другом, достаточно простом виде, к которому можно привести матрицу всякого линейного оператора. В комплексном пространстве таким «простейшим», каноническим видом принято считать так называемую жорданову нормальную форму матрицы.

Определение. Жордановой клеткой называется квадратная матрица порядка m вида

$$J_m(\lambda_0)=\begin{pmatrix}\lambda_0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_0 & 1 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \lambda_0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_0\end{pmatrix}, \qquad (1)$$

в которой на главной диагонали стоит одно и то же число λ_0, над главной диагональю — всюду число 1, а все остальные элементы матрицы — нулевые.

Порядок жордановой клетки может быть каким угодно. В частности, он может быть равным и 1; в этом случае $J_1(\lambda_0)=(\lambda_0)$.

Легко видеть, что характеристический многочлен оператора $j_m(\lambda_0)$, матрицей которого служит жорданова клетка (1) порядка m, равен $(\lambda-\lambda_0)^m$; он имеет одно собственное значение λ_0 кратности m, и все его собственные векторы имеют вид ce_1, где $e_1=(1,0,\dots,0)$. Матрица оператора $J_m(\lambda_0)$ при m>1 ни в каком базисе не приводится к диагональному виду.

Определение. Жордановой матрицей называется матрица вида

$$J=\begin{pmatrix}J_{m_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0\\ 0 & J_{m_2}(\lambda_2) & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & J_{m_s}(\lambda_s)\end{pmatrix},$$

где $J_{m_k}(\lambda_k)$, $(k=\overline{1,s})$ — жордановы клетки (вообще говоря, разных порядков), а все остальные клетки этой матрицы — нулевые.

Легко видеть, что числа $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_s$ являются собственными значениями оператора j с матрицей J. Эти собственные значения необязательно должны быть разные, некоторые из них могут совпадать.

П р и м е р 1. Является ли матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

матрицей Жордана?

Р е ш е н и е. Разобьем матрицу А на блоки следующим образом:

$$A = \left(\begin{array}{c|cc|ccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right).$$

Очевидно, что блоки, стоящие на диагонали, являются клетками Жордана:

$$J_1(3) = (3),\ J_2(-2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\ J_3(4) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$A = \begin{pmatrix} J_1(3) & 0 & 0 \\ 0 & J_2(-2) & 0 \\ 0 & 0 & J_3(4) \end{pmatrix} \overset{\text{обознач.}}{=\!=\!=} \left(J_1(3), J_2(-2), J_3(4)\right),$$

является матрицей Жордана.

П р и м е р 2. Матрица

$$J = \left(\begin{array}{ccc|cc} \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{array}\right)$$

является жордановой матрицей 5-го порядка, состоит из двух жордановых клеток 3-го и 2-го порядков. Числа α и β являются собственными значениями оператора j, характеристический многочлен которого равен $(\lambda-\alpha)^3(\lambda-\beta)^2$.

Если e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 — базис, соответствующий матрице J, то имеем:

$$j(e_1) = \alpha e_1,\ j(e_2) = e_1 + \alpha e_2,\ j(e_3) = e_2 + \alpha e_3,\ j(e_4) = \beta e_4,\ j(e_5) = e_4 + \beta e_5.$$

Базисные векторы e_1 и e_4 являются собственными векторами оператора j с собственными значениями α и β соответственно. Векторы e_2, e_5, e_3 не являются собственными векторами.

П р и м е р 3. Записать в развернутом виде матрицы Жордана:

а) $J_1(10)$; б) $J_2(-7)$; в) $(J_2(0), J_2(-1))$; г) $(J_1(-4), J_3(-3))$;

д) $(J_2(-2), J_1(0); J_3(6))$.

Р е ш е н и е.

а) (10); б) $\begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

2. ПРИВЕДЕНИЕ МАТРИЦЫ К ЖОРДАНОВОЙ ФОРМЕ

Если существует такая невырожденная матрица C, что $J = C^{-1}AC$ — жорданова матрица, то матрица J называется жордановой формой матрицы A. При этом матрица A называется приводящейся к жордановой форме, а C — матрицей, приводящей матрицу A к жордановой форме. Если C — вещественная матрица, то будем говорить, что матрица A приводится к жордановой форме в вещественном пространстве, если же C — комплексная матрица, то говорят, что матрица A приводится к жордановой форме в комплексном пространстве.

Теорема 1. Всякая квадратная числовая матрица приводится в комплексном пространстве к жордановой форме и эта форма единственна (с точностью до расположения блоков).

Теорема 2. Вещественная квадратная матрица приводится в вещественном пространстве к жордановой форме тогда и только тогда, когда все характеристические числа матрицы вещественны.

Существуют методы нахождения жордановых форм матриц, основанные на построении канонического (жорданова) базиса. Следующие теоремы позволяют находить жорданову форму матриц, не вычисляя канонического базиса.

Теорема 3. Число m клеток Жордана в жордановой форме матрицы A совпадает с максимальным числом линейно независимых собственных векторов этой матрицы, т.е.

$$m' = \sum_{i=1}^{k} \left(n - rang\left(\lambda_i \mathrm{E} - \mathrm{A} \right) \right), \tag{2}$$

где к — число различных собственных значений матрицы А; n — ее порядок; λ_i — собственные значения матрицы.

Для матрицы А порядка $n \leq 3$ формула (2) дает возможность определить жорданову форму матрицы с точностью до порядка следования клеток Жордана. Жордановы клетки имеют вид $J_h(\lambda_i)$: если λ_i — корень характеристического уравнения матрицы А кратности s и $J_{h_1}(\lambda_i)$; $J_{h_2}(\lambda_i)$..., $J_{h_l}(\lambda_i)$ — клетки Жордана с собственным значением λ_i жордановой формы матрицы А, то $\sum_{j=1}^{l} h_j = s$. В частности, если λ_i — простой корень характеристического уравнения матрицы А, то ему соответствует одна жорданова клетка $J_1(\lambda_i)$.

Теорема 4. Пусть $g_h(\lambda_i)$ — число клеток жордана порядка h с собственным числом λ_i в жордановой форме матрицы А. Имеет место формула

$$g_h(\lambda_i) = rang(\lambda_i E - A)^{h-1} - 2rang(\lambda_i E - A)^h + rang(\lambda_i E - A)^{h+1}. \tag{3}$$

Таким образом, для любой заданной матрицы $A \in M_n$ из множества M_n квадратных матриц порядка n ее жорданову нормальную форму (без выяснения , каким именно преобразованием подобия она достигается) можно определить , выполняя следующие действия:

1. Найти для А все ее различные собственные значения.

2. Для каждого из различных λ_i образовать степени $(\lambda_i E - A)^k$, где к=0,1,...,n и, определяя ранги этих матриц, установить для А размеры и число жордановых клеток, отвечающих собственному значению λ_i.

Замечание. Этот алгоритм бывает полезен для обработки вручную небольших матриц, но он мало пригоден для машинных вычислений в силу неустойчивости самой задачи определения ранга матрицы. Последнее очевидно, если взять, например, матрицу $A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$, имеющую ранг 2 при всех $\varepsilon \neq 0$, и 1 при $\varepsilon = 0$.

П р и м е р 4. Найти жорданову форму матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 3 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0$$

данной матрицы имеет корень $\lambda = 2$ кратности $s = 3$. Так как матрица

$$2E - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

имеет ранг $r = 1$, то число m клеток Жордана в жордановой форме матрицы A определяется формулой (2): $m = 3 - \operatorname{rang}(2\mathrm{E} - \mathrm{A}) = 3 - 1 = 2$. Поскольку матрица А третьего порядка, а в жордановой форме — две клетки жордана, то (с точностью до расположения блоков) жорданова форма имеет вид

$$\left(J_1(2), J_2(2)\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

П р и м е р 5. Найти жорданову форму матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение данной матрицы имеет корень $\lambda = 2$ кратности $s = 4$. Так как ранг матрицы

$$2E - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

равен 3, то m=4-3=1. Следовательно, жорданова форма матрицы A содержит одну клетку Жордана $J_4(2)$ и имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

П р и м е р 6. Найти жорданову форму матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е . Характеристическое уравнение данной матрицы имеет корень $\lambda_1 = 1$ кратности s=4. Так как ранг матрицы

$$1 \cdot E - A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & -3 \\ 2 & 7 & 0 & -13 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

равен 2, то m=4-2=2. Следовательно, жорданова форма матрицы A состоит из двух клеток Жордана. Возможны случаи:

а) две клетки порядка 2;

б) одна клетка порядка 1 и одна клетка порядка 3. Определим количество клеток 2-го порядка по формуле (3):

$$g_2(1) = \text{rang}(E - A) - 2\text{rang}(E - A)^2 + \text{rang}(E - A)^3.$$

Так как

$$(E-A)^2=\begin{pmatrix}3&9&0&-18\\1&3&0&-6\\3&9&0&-18\\1&3&0&-6\end{pmatrix},\quad (E-A)^3=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

то $\operatorname{rang}(E-A)^2=1$, $\operatorname{rang}(E-A)^3=0$ и $g_2(1)=2-2=0$.

Это значит, что клетки порядка 2 не существует. Поэтому имеет место второй случай. Таким образом, жорданова форма матрицы А имеет вид (с точностью до расположения блоков)

$$(J_3(1),J_1(1))=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\\hline 0&0&0&1\end{array}\right).$$

3. НАХОЖДЕНИЕ МАТРИЦЫ, ПРИВОДЯЩЕЙ ДАННУЮ МАТРИЦУ К ЖОРДАНОВОЙ ФОРМЕ

В некоторых вопросах необходимо знать не только нормальную форму J данной матрицы А, но и преобразующую невырожденную матрицу С.

Существуют различные методы нахождения матрицы С, приводящей матрицу А к жордановой форме $J=C^{-1}AC$. Рассмотрим один из них. Если жорданова форма матрицы А порядка n диагональна, то столбцами матрицы С являются координаты n линейно независимых собственных векторов линейного оператора с матрицей А в некотором базисе

$$e_1, e_2, \ldots, e_n. \tag{4}$$

Пусть жорданова форма матрицы А не является диагональной. Если f — линейный оператор, матрица которого в базисе (4) есть А, а в базисе (жордановом)

$$e_1', e_2', \ldots, e_n' \tag{5}$$

матрицей оператора f является жорданова матрица J, то матрица C есть матрица перехода от базиса (4) к базису (5). Для нахождения матрицы C поступаем следующим образом:

1. Находим жорданову форму данной матрицы.

2. Находим координаты базисных векторов $e_1', e_2', \dots, e_n'$ в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Для этого:

а) По матрице J оператора f в базисе (5) записываем образы базисных векторов $e_1', e_2', \dots, e_n'$ в том же базисе (5). Из этой записи видим, является ли вектор $e_i' \left(i=\overline{1,n}\right)$ собственным ветором оператора f или нет (см. пример 2);

б) координаты тех векторов базиса (5) в базисе (4), которые являются собственными веторами оператора f, находим из системы $(\lambda E - A)X = 0$; координаты векторов базиса (5), которые не являются собственными векторами оператора f, находим из соответствующих соотношений, полученных в предыдушем пункте, записав их в координатной форме.

3. Составляем матрицу C перехода от базиса (4) к базису (5).

П р и м е р 7. Найти матрицу C, приводящую матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

к жордановой форме в вещественном пространстве.

Р е ш е н и е. 1. Жордановой формой матрицы A является матрица

$$J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Из определения матрицы оператора в данном базисе и вида матрицы J имеем

$$f\left(e_1'\right) = 4e_1', f\left(e_2'\right) = e_2', f\left(e_3'\right) = e_2' + e_3'. \tag{6}$$

Из этих равенств следуст, что e_1' и e_2' – собственные векторы оператора f с собственными значениями соответствено 4 и 1.

Вектор e_3' не является собственным вектором оператора f.

Обозначим координаты вектора e_1' в базисе e_1, e_2, e_3 через x_1, x_2, x_3.

Эти координаты найдем из системы

$$(4E - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{или } \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ \qquad 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ \qquad -x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $x_1 = 7l$, $x_2 = 3l$, $x_3 = 3l$ $(l \in R)$.

Таким образом, $e_1' = 7le_1 + 3le_2 + 3le_3$, где $l \neq 0$.

Координаты y_1, y_2, y_3 вектора e_2' в базисе e_1, e_2, e_3 найдем из системы

$$(E - A)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{cases} 0y_1 + 3y_2 + 4y_3 = 0, \\ 0y_1 + y_2 + 2y_3 = 0, \\ 0y_1 + y_2 + 2y_3 = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $y_1 = p$, $y_2 = y_3 = 0$ $(p \in R)$.

Таким образом,

$$e_2' = pe_1' + 0e_2 + 0e_3 \quad (p \neq 0). \qquad (7)$$

Обозначим координаты вектора e_3' в базисе e_1, e_2, e_3 через z_1, z_2, z_3.

С учетом формул (6) и (7) найдем эти координаты из системы

$$A\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{cases} 0z_1 + 3z_2 + 4z_3 = p, \\ 0z_1 + z_2 + 2z_3 = 0, \\ 0z_1 + z_2 + 2z_3 = 0. \end{cases}$$

Решив ее, получим $z_1 = s,\ z_2 = p,\ z_3 = -\dfrac{p}{2} \quad (s, p \in R)$.

Таким образом, $e_3' = se_1 + pe_2 - \dfrac{p}{2}e_3$, где $|s| + |p| \neq 0$.

3. Матрица C, приводящая матрицу A к жордановой форме, является матрицей перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису e_1', e_2', e_3' и имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 7l & p & s \\ 3l & 0 & p \\ 3l & 0 & -\dfrac{p}{2} \end{pmatrix} \quad (|C| \neq 0).$$

П р и м е р 8. Найти матрицу C, приводящую матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

к жордановой форме в вещественом пространстве.

Р е ш е н и е. 1. Жордановой формой матрицы A является матрица

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Из определения матрицы оператора в данном базисе и вида матрицы J имеем: $f(e_1') = e_1'$, $f(e_2') = e_1' + e_2'$, $f(e_3') = e_2' + e_3'$.

Из этих равенств следует, что e_1' — собственный вектор оператора f с собственным значением 1, а e_2' и e_3' не являются собственными векторами оператора f.

Координаты x_1, x_2, x_3 вектора e_1' в базисе e_1, e_2, e_3 находим

из системы $(E - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

или

$$\begin{cases} 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 0, \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 0x_3 = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $x_1 = x_2 = p$, $x_3 = 0$ $(p \in R)$.

Таким образом, $e_1' = pe_1 + pe_2$, где $p \neq 0$.

Координаты y_1, y_2, y_3 вектора e_2' найдем из системы

$$A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ p \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{cases} y_1 + y_3 = p + y_1 \\ y_2 + y_3 = p + y_2, \\ y_1 - y_2 + y_3 = y_3. \end{cases}$$

Решив эту систему получим $y_1 = y_2 = s$, $y_3 = p$ $(s, p \in R)$.

Таким образом, $e_2' = se_1 + se_2 + pe_3$, где $|s| + |p| \neq 0$.

Координаты z_1, z_2, z_3 вектора e_3' найдем из системы

$$A\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{cases} z_1 + z_3 = s + z_1, \\ z_2 + z_3 = s + z_2, \\ z_1 - z_2 + z_3 = p + z_3. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $z_1 = p + l,\ z_2 = l,\ z_3 = s\,(p, l, s \in R)$.

Таким образом, $e_3' = (p + l)e_1 + le_2 + se_3$, где $|l| + |s| \neq 0$.

3. Матрица С, приводящая матрицу А к жордановой форме, имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} p & s & p+l \\ p & s & l \\ 0 & p & s \end{pmatrix} \quad (|C| \neq 0).$$

4. ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ

Найти жорданову форму данной матрицы $A_i\ (i = 1, 2)$ и матрицу С, приводящую матрицу A_i к жордановой форме.

Вариант 1

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 2

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 10 & -5 \\ 0 & 7 & -2 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вариант 3

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 4

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 1 \\ -1 & 0 & -17 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 5

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вариант 6

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Вариант 7

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 8

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Вариант 9

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 10

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вариант 11

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вариант 12

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 13

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Вариант 14

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вариант 15

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вариант 16

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} -16 & -17 & 87 & -108 \\ 8 & 9 & -42 & 54 \\ -3 & -3 & 16 & -18 \\ -1 & -1 & 6 & -8 \end{pmatrix}.$$

Вариант 17

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 18

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & -10 & 10 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вариант 19

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 20

$$A_1 = \begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 99 & 0 & 0 & 101 \\ 0 & 99 & 0 & 0 \\ 0 & 101 & 99 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 99 \end{pmatrix}.$$

Вариант 21

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вариант 22

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 23

$$A_1 = \begin{pmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 18 & -9 & -3 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вариант 24

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 & 15 \\ -1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вариант 25

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

РЕКОМЕНДУЕМЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. М.: Наука, 1979.

Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

Апатенок Р.Ф., Маркина А.М., Хейнман В.Б. Сборник задач по линейной алгебре и аналитической геометрии. Минск: Вышэйшая школа, 1990.

ЖОРДАНОВА НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА МАТРИЦ

Составитель П р о к о ф ь е в Леонтий Николаевич

Редактор Т.И. К у з н е ц о в а
Техн. редактор Н.М. К а л е н ю к
Корректор Т.И. Щ е л о к о в а

Подписано в печать 24.12.96. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная
Усл. печ. л.1,4. Усл. кр.-отт. 1,52. Уч.-изд. л. 1,5.
Тираж 100 экз. Заказ 9. Арт. С-57/96.

Самарский государственный аэрокосмический университет
им. академика С.П. Королева.
443086 Самара, Московское шоссе, 34

ИПО Самарского государственного аэрокосмического
университета.
443001 Самара, ул. Ульяновская, 18