Министерство высшего и среднего специального
образования РСФСР

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт имени академика С.П.Королева

# ЗАДАНИЯ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ И ИНТЕГРАЛЬНОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ С ФИЗИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ

Утверждено
редакционным советом
института
в качестве
методических указаний
для студентов

Куйбышев 1985

УДК 518

Предложенные задания иллюстрируют применение производных и интегралов к вычислению скоростей, ускорений, масс, сил, энергии и других физических величин. К задачам, содержание которых не всегда полно излагается в курсе высшей математики, приведены необходимые разъяснения. К большинству задач даны ответы.

Методические указания составлены в соответствии с действующей программой по математике. Они предназначены для проведения практических занятий и самостоятельной работы студентов I-2 курсов всех специальностей.

Составитель Г.А. К а л я б и н

Рецензенты: В.П.Пономарев, Ю.П.Самарин

## I. ПРИМЕНЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

Основой использования производной является ее определение как предела отношения приращения функции $\Delta y$ к приращению аргумента $\Delta x$ при стремлении $\Delta x$ к нулю.

Вычисление скоростей и ускорений

I.I. Найти скорость и ускорение точки в любой момент времени, если ее положение на прямой изменяется по закону: $x = b \sin \omega t + c \cos \omega t$ [*] а также наибольшее значение перемещения и скорости.

Указания к решению: по определению, скорость есть производная перемещения по времени: [**] $v = x'(t) = \dot{x}(t)$.

Ускорение же представляет собой скорость изменения скорости: $a = \dot{v} = \ddot{x}$. Дифференцируя закон движения, получаем:

$$v(t) = b\omega \cos\omega t - c\omega \sin\omega t,$$

$$a(t) = -b\omega^2 \sin\omega t - c\omega^2 \cos\omega t = -\omega^2 x(t)$$

Далее, в те моменты времени, когда перемещение точки достигает наибольшего или наименьшего значения, скорость движения должна обратиться в нуль; таким образом:

$$x = \text{макс} \Rightarrow v(t) = 0 \Rightarrow tg\,\omega t = b/c \Rightarrow x_{\text{макс}} = |\omega| \sqrt{b^2 + c^2}$$

---

[*] Здесь и далее через $b, c, \omega, A, B, C, k, R$ обозначаются различные постоянные величины.

[**] Обозначение $\dot{x}$, введенное И.Ньютоном, часто употребляется в механике.

Аналогично $v_{макс} = \omega^2\sqrt{b^2+c^2}$. Заметим еще, что для нахождения компонент вектора скорости точки, движущейся по плоскости или в пространстве, следует продифференцировать по времени перемещения вдоль соответствующих координатных осей.

## Задания для самостоятельной работы

I.2. По известным зависимостям от времени координат точки вычислить векторы и модули скорости и ускорения:

а) $x = R(t-\sin t)$, $y = R(1-\cos t)$ - циклоида - траектория точки обода колеса радиуса $R$, равномерно катящегося по оси $Ox$, $t$ - угол поворота, $0 \le t \le 2\pi$;

б) $x = b\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$ - астроида;

в) $x = R\cos\omega t$, $y = R\sin\omega t$, $z = kt$ - винтовая линия.

I.3. Перемещения точек по плоскости заданы в полярных координатах соотношениями:

а) $r = k\varphi$, $\varphi = \omega t$ - спираль Архимеда;

б) $r = R(1-\cos\varphi)$, $\varphi = \omega t$ - кардиоида.

Определить горизонтальные и вертикальные составляющие скоростей и ускорений.

Перейти к декартовым координатам: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

I.4.*) Самолет противника летит с постоянной скоростью $v_0$ по горизонтальной прямой, проходящей над пусковой установкой ПВО на высоте $H$. Система наведения управляет ракетой так, чтобы она всегда находилась в одной вертикальной плоскости с самолетом, а вектор ее скорости, модуль которой постоянен и равен $v_1 > v_0$, был направлен прямо на цель. Найти компоненты скорости и ускорения, а также радиус кривизны траектории ракеты в тот момент, когда она находится на высоте $h$, а расстояние до цели по горизонтали равно $b$.

## Производная как скорость изменения

I.5. При взвешивании частей неоднородного стержня оказалось, что отрезок $[0,x]$ имеет массу $m(x) = 2x + 3\ln(1+4x)$. Найти линейную плотность материала стержня в точке $x = 0{,}5$.

Указания к решению. Линейная плотность в точке $x$ определяется как предел отношения массы отрезка $[x, x+\Delta x]$ к $\Delta x$ при стремлении $\Delta x$ к нулю, т.е. $\rho(x) = m'(x)$.

Ответ: $\rho|_{x=0.5} = (2+12/(1+4x)) = 6$

---

*) Звездочкой помечены задания повышенной трудности.

## Задания для самостоятельной работы

1.6. Зависимость атмосферного давления от высоты описывается формулой $p = p_0 e^{-ch}$ и на высоте $h_1$ = 1600 м равно половине давления $p_0$ = 760 мм рт.ст. на уровне моря. Определить скорость изменения давления относительно высоты при $h$ = 1 км.

1.7. Полная внутренняя энергия тела $U$ связана с температурой $T$ соотношением: $U = aT^3(1+bT^2)^{-1}$. Выяснить, как зависит от температуры теплоёмкость тела $C(T)$, если $a$ = 5 Дж/град$^{-3}$; $b = 10^{-4}$ град$^{-2}$.

Теплоёмкость тела определяется как отношение бесконечно малого приращения внутренней энергии к бесконечно малому приращению температуры: $C(T) = U'(T)$.

1.8. Заряд, протекший к моменту времени $t$ через участок электрической цепи с сопротивлением $R$ = 5 Ом, равен $Q(t) = 7t + 3\sin 2t$. Найти мгновенные значения силы тока $I(t)$ в цепи и выделяемой мощности $W(t)$.

Сила тока $I(t) = \dot{Q}(t)$; выделяемая мощность $W = I^2R$.

1.9. Температура точек плоской пластины задается в декартовой системе координат формулой $T = 21\ln(1+x^2+2y^2+3z^2)$. Определить направление и величину теплового потока $\vec{q}$ в точке M (3; 2; 1), если коэффициент теплопроводности $\lambda$ = 0,01 Вт/см.град.

$\vec{q} = -\lambda \operatorname{grad} T$, где $\operatorname{grad} T$ – градиент температуры, т.е. вектор частных производных $(\partial T/\partial x, \partial T/\partial y, \partial T/\partial z)$, указывающий направление и величину самого быстрого изменения величины $T(x,y,z)$.

1.10. В условиях предыдущей задачи датчик температуры перемещается по параболе: $x = at$, $y = bt^2$, $z \equiv 0$, где $a$ = 1 см/с; $b$ = 1 см/с$^2$. Определить величину производной $dT/dt$ показаний датчика в момент времени $t$ = 5 с.

Можно подставить в формулу для $T$ значения $x(t), y(t), z(t)$ или же воспользоваться формулой полной производной:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}$$

1.11. Потенциал электрического поля точечного заряда $e$ равен $\varphi = \varphi(x,y,z) = e/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Найти вектор напряженности поля.

Напряженность поля, т.е. сила, действующая на пробный единичный заряд, помещенный в данную точку пространства, вычисляется по формуле $\vec{E} = grad\ \varphi$. Разность потенциалов $\varphi(M_2)-\varphi(M_1)$ при этом представляет собой работу поля по перемещению из $M_1$ в $M_2$ единичного заряда. Эта работа для электростатического и других потенциальных полей не зависит от формы пути.

Нахождение наибольших и наименьших значений

I.I2. При каком отношении высоты $H$ цилиндрического бака к его радиусу $R$ отношение квадрата его объема к кубу полной поверхности будет наибольшим?

Указания к решению. Пусть $H = xR$, где $x$ - искомое отношение. По известным формулам стереометрии находим $V = \pi R^2 H = \pi R^3 x$,

$$S_{полн} = 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R^2(1+x);\ V^2/S^3_{полн} = f(x) =$$
$$= x^2/(8\pi(1+x)^3)$$

Чтобы определить максимум $f$, приравниваем нулю $f'(x)$ или, действуя более удобным для вычислений способом, записываем цепочку соотношений:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow f'(x)/f(x) = 0 \Longleftrightarrow (\ln f(x))' = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (2/x) - 3/(1+x) = 0 \Longleftrightarrow x = 2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow f_{макс} = f(2) = 1/54\pi$$

Задания для самостоятельной работы

I.I3. Расходы на полетное обслуживание определенного типа самолета (без учета стоимости топлива) составляет $A$ (рублей в час). Стоимость топлива, расходуемого за час полета, пропорциональна квадрату скорости $v$ (коэффициент пропорциональности равен $B$ р.ч$^2$/км$^2$). Определить экономически наивыгоднейшую скорость и минимально возможные общие расходы $F_{мин}$ на I км полета.

I.I4. Две (положительные по физическому смыслу) величины связаны соотношением $x^3 + 2y^3 = 3xy$. Найти наибольшие возможные значения $x$ и $y$.

Непосредственно продифференцировать неявное соотношение между $x$ и $y$.

I.I5. Температура точек треугольной пластины: $x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 6$ дается функцией $T = x^2 y(4-x-y)$. Определить наибольшее и наименьшее значения температуры и указать точки, в которых эти значения достигаются.

Во внутренней точке максимума или минимума должно выполняться $\partial T/\partial x = \partial T/\partial y = 0$. Граничные точки области надо исследовать отдельно.

I.I6.* При исследовании зависимости между физическими величинами $x$, $y$ оказалось, что значениям $x_1, \dots, x_n$ первой величины соответствуют значения $y_1, \dots, y_n$ второй. Как нужно выбрать числа $a$ и $b$, что зависимость $y = ax + b$ наилучшим образом приближалась к результатам экспериментов в том смысле, что величина $f = (y_1 - ax_1 - b)^2 + \dots + (y_n - ax_n - b)^2$ принимает наименьшее значение?

Приравнять $0$ производные $f$ по $a$ и $b$. Описанный в задаче "метод наименьших квадратов" широко используется для подбора наилучших коэффициентов в эмпирических формулах, причем не только в случае, когда искомая зависимость является линейной.

## 2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНТЕГРАЛОВ

Важная роль, которую играет определенный интеграл в различных задачах геометрии, механики и физики, связана с тем, что он является пределом сумм произведений длин отрезков разбиения на значения функции в точках этих отрезков при бесконечном измельчении разбиения, т.е. при условии макс $|\Delta x_j| \to 0$.

### Вычисление площадей и длин

2.I. Масса I см$^2$ листа бумаги $\mu$ = I0 мг. Найти массу вырезанной из этой бумаги фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$, $y = 18 - x^2$ ( $x, y$ - измерены в см).

Указания к решению. Сначала находим пределы изменения переменной $x$, приравнивая значения $y$ в уравнениях верхней и нижней частей границы: $x^2 = 18 - x^2 \Longleftrightarrow x = \pm 3$. Масса бумажной фигуры равна произведению поверхностной плотности листа $\mu$ на ее площадь, которая в свою очередь вычисляется с помощью интеграла:

$$S = \int_{-3}^{3} \left((18 - x^2) - x^2\right) dx = \left(18x - \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_{-3}^{3} = 72$$

Ответ: $M$ = 720 мг.

### Задания для самостоятельной работы

2.2. Скорость движения тела пропорциональна квадрату времени, в момент $t$ = 2 с (от начала движения) равна 24 м/с. За какое время тело пройдет 2000 м?

2.3. Вычислить путь, проходимый в пространстве точкой обода колеса радиуса $R$ за один его поворот.

Воспользоваться уравнением циклоиды из задачи I.2,а.

2.4. Замкнутый маршрут самолета описывается уравнением кардиоды (см.I,3,б). Найти полную длину маршрута и величину площади, захватываемой им.

## Объемы тел и площади поверхностей вращения

2.5. Вычислить массу жидкого водорода (плотность $\rho$ = 0,Iг/см$^3$) вмещающегося в бак, который представляет собой эллипсоид вращения:

$$(x^2+y^2)/z^2/b^2+a^2 \leq 1 ,$$

если большая полуось $a$ = 2 м, а малая $b$ = I м.

Указания к решению. Масса однородного тела равна произведению его плотности на объем: $M=\rho V$. Для вычисления $V$ рассматриваем семейство горизонтальных плоскостей $z=const$, которые пересекают бак по кругам радиуса $r=r(z)=b\sqrt{1-(z/a)^2}$ и, следовательно, площадь сечения $S(z)=\pi r^2(z)=\pi b^2(1-(z^2/a^2))$ Уровни $z=\pm a$ соответствуют верхней и нижней точкам бака. Далее находим:

$$V=\int_{-a}^{a} S(z)dz=\pi b^2\int_{-a}^{a}(1-z^2/a^2)dz=\frac{4}{3}\pi a b^2$$

Ответ: $M=\frac{4}{3}\pi\rho a b^2$ = 837,6 кг.

## Задания для самостоятельной работы

2.6.* В условиях предыдущей задачи определить, при какой толщине $K_1$ стенки бака ее масса не будет превышать 5% массы вмещаемого топлива. Плотность материала стенки $\rho_1$ = 2,7 г/см$^3$.

2.7. Найти массу стальной детали (плотность $\rho$ = 7,8 г/см$^3$), пять граней которой являются плоскостями: $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=4$, $y=5$, а шестая описывается уравнением $z = 1 + xy$. Все переменные $x$, $y$, $z$, измерены в сантиметрах.

## Центры тяжести, энергия, работа, сила

2.8. Бак (см. 2.5) заполнен жидким водородом наполовину. Найти потенциальную энергию топлива относительно самой нижней точки бака. Выяснить, где расположен центр тяжести содержимого бака.

Указания к решению. Потенциальная энергия тонкого горизонтального слоя топлива, заключенного между уровнями $z$ и $z+\Delta z$, приближенно равна $\Delta U=\rho g(z+a)S(z)\Delta z$. Относительная погрешность этой формулы стремится к нулю вместе с $\Delta z$. Представляя полость бака в виде совокупности слоев указанного вида, после предельного перехода при макс $|\Delta z_j| \to 0$, будем иметь

$$U=\int_{-a}^{0} dU(z)=\pi\rho g b^2\int_{-a}^{0}(z+a)\left(1-\frac{z^2}{a^2}\right)dz=\frac{5}{12}\pi\rho g a^2 b^2\approx 5\,кДж$$

Центр тяжести по соображениям симметрии находится на оси вращения, т.е. $x_c=y_c=0$. Координату $z_c$ находим из соотношения $U=Mg(z_c+a)/2$, где $M$ - масса полного бака (см. решение задания 2.5).

Ответ: $z_c=-\frac{3}{8}a=-0.75\,м$

Задания для самостоятельной работы

2.9. Найти положение центра тяжести детали из задания 2.7.

2.10. Найти полную силу давления, оказываемую топливом на стенку бака, описанного в задаче 2.8.

2.11. Бак с топливом из предыдущей задачи приведен во вращение вокруг оси $Oz$. Подсчитать момент инерции топлива и определить, при какой угловой скорости вращения полная кинетическая энергия $(T)$ частиц жидкости будет равна их полной потенциальной $(U)$ энергии в поле тяжести относительно уровня $z=-a$.

2.12. В самой нижней части бака (см. 2.8) сделано малое отверстие площади $\sigma$ = 1 мм$^2$. Найти, за какое время топливо полностью вытечет из бака.

Скорость истечения жидкости согласно формуле Торричелли равна $v=\sqrt{2gh}$, где $h$ - высота столба жидкости над отверстием, $g$ = 9,8 м/с$^2$.

2.13. Подсчитать работу, которую необходимо затратить на сжатие некоторого количества газа от объема $V_0$ = 0,1 м$^3$ до $V_1$ = 0,03 м$^3$, если начальное давление равно $10^5$ Па, а процесс перехода (адиабатический) описывается уравнением Пуассона $PV^\gamma=const$, $\gamma=7/5$.

При переходе газа при постоянном давлении $P$ от объема $V$ к $V+\Delta V$ совершаемая им работа $\Delta A=P\Delta V$.

2.14. Сила $F$, возвращающая пружину в положение равновесия, равна $kx+bx^3$ где $k$ = 5 - жесткость пружины при малых деформациях, Н/см; $b$ = 0,2 - коэффициент, учитывающий нелинейные свойства, Н/см$^3$; $x$ - смещение от равновесия, см. Подсчитать, какую работу нужно совершить для растяжения на величину $\ell$ = 20 см первоначально нерастянутой пружины.

2.15. Сопротивление участка электрической цепи $R$ = 60 Ом, а напряжение в сети равномерно убывает от $U_0$ = 220 В в начальный момент до 0 при $T$ = 1 ч. Сколько тепла выделится на рассматриваемом участке?

О т в е т ы:

1.2 а). $v_x = R(1-\cos t)$, $v_y = R\sin t$, $|\vec{v}| = 2R|\sin\frac{t}{2}|$,
$a_x = R\sin t$, $a_y = R\cos t$, $|\vec{a}| = R$.

1.2 б). $v_x = -3b\sin t\cos^2 t$, $v_y = 3b\sin^2 t\cos t$, $|\vec{v}| = 3b|\sin 2t|$,
$a_x = 3b\cos t(2-3\cos^2 t)$, $a_y = 3b\sin t(2-3\sin^2 t)$.

1.2 в). $v_x = -R\omega\sin\omega t$, $v_y = R\omega\cos\omega t$, $|\vec{v}| = \omega R$,
$a_x = -R\omega^2\cos\omega t$, $a_y = -R\omega^2\sin\omega t$, $|\vec{a}| = \omega^2 R$.

1.3 а). $v_x = k\omega(\cos\omega t - t\omega\sin\omega t)$, $v_y = k\omega(\sin\omega t + t\omega\cos\omega t)$,
$a_x = -k\omega^2(2\sin\omega t + t\omega\cos\omega t)$, $a_y = k\omega^2(2\cos\omega t - t\omega\sin\omega t)$.

1.4. $v_x = v_1\cos\theta$, $v_y = v_1\sin\theta$, $\theta = \operatorname{arctg}((H-h)/b)$,
$\dot\theta = -v_0(H-h)/(b^2+(H-h)^2)$, $R = v_1/|\dot\theta|$,
$|\vec{a}| = v_1|\dot\theta|$, $a_x = |\vec{a}|\sin\theta$, $a_y = -|\vec{a}|\cos\theta$.

1.6. $\dfrac{dp}{dh} = -\dfrac{p_0\ln 2}{h_1}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{h/h_1} \simeq -0.21\ \dfrac{\text{мм.рт.ст.}}{\text{м}}$.

1.7. $C(T) = aT^2(1+2(1+abT^2)^{-1}) = 5T^2\left(1+\dfrac{2}{1+5\cdot10^{-4}T^2}\right)$

1.8. $I = 7 + 6\cos 2t$, $W = 263 + 420\cos 2t + 90\cos 4t$.

1.9. $\vec{q} = 0.02(3\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k})$, $|\vec{q}| \simeq 0.12$.

1.10. $\dfrac{dT}{dt} = 21(2a^2t + 8b^2t^3)/(1+at^2+2bt^4) \simeq 16.6$.

1.11. $\vec{E} = e(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})/R^3$, $R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $|\vec{E}| = e/R^2$.

1.13. $v_{опт} = \sqrt{A/B}$, $F_{мин} = 2\sqrt{AB}$.

1.14. $y_{макс} = 1$ при $x=1$; $x_{макс} = \sqrt[3]{2}$ при $y = 1/\sqrt[3]{2}$.

1.15. $T_{макс} = 4$ при $x=2, y=1$; $T_{мин} = -64$ при $x=4, y=2$.

1.16. $$a^* = \frac{n(x_1 y_1 + .. + x_n y_n) - (y_1 + .. + y_n)(x_1 + ... + x_n)}{n(x_1^2 + .. + x_n^2) - (x_1 + .. + x_n)^2},$$

$$b^* = \frac{(x_1^2 + .. + x_n^2)(y_1 + .. + y_n) - (x_1 y_1 + .. + x_n y_n)(x_1 + .. + x_n)}{n(x_1^2 + .. + x_n^2) - (x_1 + .. + x_n)^2}$$

2.2. 10 с. 2.3. $8R$. 2.4. $L = 8R$, $S = \frac{3}{2}\pi R^2$

2.6. $k_1 \le 0.05\sqrt{g/g_1}\, S_{бок} \simeq 0.36$ мм. 2.7. 936 г.

2.9 $x_C = 2.55$ см, $y_C = 3.2$ см, $z_C = 4.62$ см.

2.10. $F_{давл} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}}\, \rho g\, \frac{a^2 + ab + b^2}{a+b} \simeq 1690$ Н.

2.11. $J = \frac{4\pi}{15}\rho a b^4 \simeq 168$ кг$\cdot$м$^2$; $\omega^* = \frac{5\sqrt{3}}{4}\,\frac{\sqrt{ag}}{b} \simeq 9{,}6\,\frac{рад}{сек} \simeq 1.5\,\frac{об}{сек}$

2.12. $T \approx 1.28\,\frac{b^2}{\sigma}\sqrt{\frac{a}{g}} \simeq 160$ часов. 2.13. $A \simeq 6.2$ кДж.

2.14. 4.5 Дж. 2.15. $\approx 97$ кДж.

## Литература


1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М., 1972.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов. Т.I, М., 1972.
3. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.I, М., 1976.

Составитель Геннадий Анатольевич К а л я б и н

ЗАДАНИЯ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ
И ИНТЕГРАЛЬНОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ
С ФИЗИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ

Редактор Е.Г.Ф и л и п п о в а
Техн.редактор Н.М.К а л е н ю к
Корректор Е.Г.Ф и л и п п о в а

Подписано в печать I2.I0.85 г. Формат 60x84 $^{I}/_{I6}$.
Бумага оберточная белая. Печать оперативная.
Усл.п.л. 0,7. Уч.-изд.л. 0,6. Т. 200 экз.
Заказ 6406 Бесплатно.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт имени академика С.П.Королева,
г. Куйбышев, ул. Молодогвардейская, I5I.