МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КУЙБЫШЕВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА

КОМБИНАТОРИКА

ЗАДАНИЕ № 2

Утверждено
редакционно-издательским
советом института
в качестве
методических указаний
для студентов

КУЙБЫШЕВ 1986

УДК 519.1

Учебное задание № 2 содержит задачи по разделу дискретной математики "Комбинаторика", которые решаются с помощью метода производящих функций и метода рекуррентных соотношений.

Предназначено для студентов специальностей "Прикладная математика" и "АСУ" (дневного и вечернего отделений).

Составитель к.физ.-мат.н., доц. В.А.Колдоркина

Рецензенты: к.физ.-мат.н., доц. М.А.Панкратова;
к.физ.-мат.н., доц. Н.Н.Азаркевич

МЕТОД ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ. БИНОМ НЬЮТОНА

Производящей функцией для последовательности чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ называется функция $f(x)$, к которой сходится в некоторой области степенной ряд вида

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

где x – формальная переменная.

Например, из формулы

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + \ldots$$

вытекает, что функция $\frac{1}{1-x}$ является производящей для последовательности чисел I, I, I, ..., 1, ..., а для последовательности чисел I, 2, 3, 4, ..., производящей является функция $\frac{1}{(1-x)^2}$, так как

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n + \ldots$$

По определению, две производящие функции

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

равны, если $a_n = b_n$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$

Для производящих функций вводится алгебра формальных степенных рядов, или алгебра Коши, с операциями сложения, умножения, суперпозиции, подстановки, дифференцирования и интегрирования. В частности, производящая функция $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ по определению является произведением производящих функций

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

тогда и только тогда, когда для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} b_k c_{n-k}.$$

Последовательность чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ называется сверткой последовательностей $b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots$ и $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$, если

$$A(x) = B(x)\, C(x).$$

Пример I. Найти производящую функцию последовательности

$$f(n) = \begin{cases} 1, & n = 0,1,\dots,N \\ 0, & n > N \end{cases}.$$

Решение. По определению производящей функции имеем

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) x^n = \sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Пример 2. Найти производящую функцию для последовательности

$$f(n) = \begin{cases} n+1, & n = 0,1,\dots,N \\ 0, & n \geq N+1 \end{cases}.$$

Решение. По определению производящей функции и операции дифференцирования имеем

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) x^n = \sum_{n=0}^{N} (n+1) x^n = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{N+1} x^n\right) =$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^{N+2}}{1-x}\right) = \frac{1-(N+2)x^{N+1}+(N+1)x^{N+2}}{(1-x)^2}.$$

Формулой бинома Ньютона, или просто биномом Ньютона называется равенство вида

$$(a+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} x^k. \tag{I}$$

Если положить в этом равенстве a = I, то получим

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^k x^k + \dots + C_n^n x^n, \tag{2}$$

откуда видно, что $(1+x)^n$ является производящей функцией для чисел C_n^k, k = 0,I,..., n .

С помощью этой производящей функции можно доказать многие свойства чисел C_n^k .

Пример 3. Доказать тождество

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}. \tag{3}$$

Решение. Для доказательства умножим обе части равенства (2) на $(1+x)$ и выражение в левой части полученного равенства разложим по биному Ньютона:

$$\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^{k} x^{k} = \sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} x^{k}(1+x).$$

Слева и справа в последнем равенстве должен стоять один и тот же многочлен. Поэтому коэффициенты при x^k слева и справа должны быть одинаковыми. Это и доказывает тождество (3).

Выпишем биномиальные коэффициенты C_n^k разложения бинома Ньютона $(a+x)^n$ для каждого $n = 0,1,2,\ldots$ в отдельную строку. В результате получим бесконечную таблицу

$$\begin{array}{c}
C_0^0 \\
C_1^0 \quad C_1^1 \\
C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2 \\
C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3 \\
C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4
\end{array}$$

Эта таблица называется треугольником Паскаля. После вычисления всех C_n^k, входящих в этот треугольник, он принимает вид

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1
\end{array}$$

Все числа этого треугольника вычисляются по рекуррентной формуле (3).

Пример 4. В разложении бинома $(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})^9$ найти член, содержащий x^4.

Решение. Для (k + 1)-го члена разложения из формулы (1) имеем

$$T_{k+1} = C_9^k(\sqrt{x})^{9-k}(\sqrt[3]{x})^k = C_9^k\, x^{\frac{9-k}{2}+\frac{k}{3}},$$

откуда, согласно условию примера, следует

$$\frac{9-k}{2}+\frac{k}{3} = 4, \quad \text{т.е. } k=3.$$

При $n = 9$, $k = 3$ получаем $T_4 = C_9^3 x^4 = 84x^4$.

Пример 5. В разложении бинома $(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{2}})^n$ найти члены с наибольшим коэффициентом, если биномиальный коэффициент C_n^2 есть среднее арифметическое между двумя соседними с ним биномиальными коэффициентами.

Решение. По условию имеем $2C_n^2 = C_n^1 + C_n^3$;

откуда

$$\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{3!(n-3)!}, \text{ т.е. } (n-1)n = n + \frac{(n-2)(n-1)n}{6},$$

или $n^2 - 9n + 14 = 0$; $n_1 = 7$ ($n_2 = 2$ не подходит, так как здесь $n \geq 3$). Число членов разложения четное, равное восьми, откуда в силу свойства биномиальных коэффициентов имеем

$$T_4 = C_7^3 (a^{\frac{2}{3}})^{7-3} (a^{\frac{1}{2}})^3 = 35a^4 \sqrt[6]{a},$$

$$T_5 = C_7^4 (a^{\frac{2}{3}})^{7-4} (a^{\frac{1}{2}})^4 = 35a^4.$$

Пример 6. Используя формулу бинома Ньютона, доказать тождество

$$C_n^0 2^n - C_n^1 2^{n-1} + C_n^2 2^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} 2^1 + (-1)^n C_n^n 2^0 = 1.$$

Решение. В самом деле, левая часть этого тождества есть разложение бинома $(2-1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^{n-k} (-1)^k$, которое, очевидно, равно единице.

Пример 7. Доказать, что при $n > 0$ имеет место тождество

$$C_n^1 x(1-x)^{n-1} + 2C_n^2 x^2 (1-x)^{n-2} + \ldots + kC_n^k x^k (1-x)^{n-k} + \ldots +$$
$$+ nC_n^n x^n = nx.$$

Решение. В самом деле, общий член левой части равенства преобразуем следующим образом:

$$kC_n^k x^k (1-x)^{n-k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} = nx \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \times$$
$$\times x^{k-1} (1-x)^{(n-1)-(k-1)} = nx C_{n-1}^{k-1} x^{k-1} (1-x)^{(n-1)-(k-1)}$$

Левую часть доказанного тождества представим в виде

$$nx = (C_{n-1}^0 (1-x)^{n-1} + C_{n-1}^1 x(1-x)^{n-2} + \ldots + C_{n-1}^{n-1} x^{n-1}) =$$
$$= nx(x+1-x)^{n-1} = nx.$$

Пример 8. Найти член разложения бинома $(\sqrt{x} - \log_2 3^{\frac{1}{\sqrt{x}}})^{10}$, не содержащий x.

Решение. По формуле (I) для (k +I)-го члена $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k}(-b)^k$ разложения бинома $(a-b)^n = (a+(-b))^n$ имеем

$$T_{k+1} = C_{10}^k (\sqrt{x})^{10-k} (-\log_2 3^{\frac{1}{\sqrt{x}}})^k = (-1)^k C_{10}^k (\log_2 3)^k (\sqrt{x})^{10-2k}$$

Отсюда следует, что для искомого члена разложения должно выполняться равенство $10-2k = 0$, т.е. $k = 5$.

В самом деле, при $k = 5$ имеем

$$T_{5+1} = C_{10}^5 (\sqrt{x})^{10-5} (-\log_2 3^{\frac{1}{\sqrt{x}}})^5 = -252 (\log_2 3^{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}) = -252 (\log_2 3)^5 =$$
$$= -252 \log_2^5 3,$$

т.е. член T_6 не содержит x.

Полиномиальная формула дает разложение для выражения $(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n$. Она имеет вид

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n = \sum \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)!}{k_1! k_2! \ldots k_m!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}, \tag{4}$$

где сумма распространена на всевозможные разбиения $k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ числа n на m целых неотрицательных слагаемых.

Пример 9. Записать разложение для $(x+y+z)^5$.

Решение. Число 5 можно разбить на три слагаемых пятью способами: 5+0+0 = 4+I+0 = 3+2+0 = 3+I+I = 2+2+I. Поэтому по формуле (4)

$$(x+y+z)^5 = x^5 + y^5 + z^5 + 5x^4y + 5xy^4 + 5zy^4 + 5x^4y + 5x^4z +$$
$$+ 5xz^4 + 10x^2y^3 + 10x^3y^2 + 10x^2z^3 + 10x^3z^2 + 10y^2z^3 +$$
$$+ 10y^3z^2 + 20xyz^3 + 20x^3yz + 20xy^3z + 30x^2y^2z +$$
$$+ 30x^2yz^2 + 30xy^2z^2.$$

Идея применения метода производящих функций такова: необходимо вычислить все члены некоторой последовательности $\{a_n\}$, так или иначе связанной с комбинаторной задачей. С помощью рекуррентного соотноше-

2-1052

ния для a_n или исходя непосредственно из комбинаторных соображений вычисляют производящую функцию

$$A(S)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n S^n.$$

Раскладывая затем $A(S)$ в ряд и находя коэффициент при S^n, тем самым находят a_n.

Пример 10. Найти все члены последовательности Фибоначчи, которая задается по закону

$$B_0=1,\ B_1=2,\ B_n=B_{n-1}+B_{n-2} \quad (\text{при } n\geq 2). \qquad (5)$$

Решение. Рассмотрим функцию $B(S)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}B_n S^n$.

Умножив обе части равенства (5) на S^n и сложив затем все полученные равенства, будем иметь

$$\sum_{n=2}^{\infty}B_n S^n=S\sum_{n=2}^{\infty}B_{n-1}S^{n-1}+S^2\sum_{n=2}^{\infty}B_{n-2}S^{n-2}.$$

Принимая во внимание, что $\sum\limits_{n=2}^{\infty}B_n S^n=B(S)-1-2S$,

$$\sum_{n=2}^{\infty}B_{n-1}S^{n-1}=\sum_{m=1}^{\infty}B_m S^m=B(S)-1 \qquad (\text{где } m=n-1),$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}B_{n-2}S^{n-2}=\sum_{p=0}^{\infty}B_p S^p=B(S) \qquad (\text{где } p=n-2),$$

получим $B(S)-1-2S=S[B(S)-1]+S^2B(S)$,

откуда $B(S)=\dfrac{S+1}{1-S-S^2}$.

Вычислив коэффициент при S^n в разложении $B(S)$ в ряд, найдем B_n.

Разложим в ряд функцию $\dfrac{1}{1-S-S^2}=\dfrac{1}{(S-S_1)(S-S_2)}$,

где $S_1=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $S_2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Имеем

$$\frac{1}{(S-S_1)(S-S_2)}=\left(\frac{1}{S-S_1}-\frac{1}{S-S_2}\right)\frac{1}{S_2-S_1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{S_1}\,\frac{1}{1-\frac{S}{S_1}}+\frac{1}{S_2}\,\frac{1}{1-\frac{S}{S_2}}\right).$$

Используя равенство $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$, будем иметь $\dfrac{1}{1-S-S^2}=$
$=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(S_2^{\frac{1}{n+1}}-S_1^{\frac{1}{n+1}}\right)S^n$, поэтому коэффициент при S^n в разложении функции $B(S)$ равен

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{S_2^{n+1}} - \frac{1}{S_1^{n+1}}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{S_2^n} - \frac{1}{S_1^n}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right).$$

Общая комбинаторная задача на разбиение чисел такова: найти, сколькими способами можно разбить число N на слагаемые, равные соответственно a, b, ..., m, причем порядок слагаемых не учитывать.

Такая задача решается с помощью производящих функций. В этом случае производящая функция имеет вид

$$f(x) = (1 + x^a + x^{2a} + \ldots + x^{ka} + \ldots) \times (1 + x^b + x^{2b} + \ldots + x^{sb} + \ldots) \times$$
$$\times (1 + x^m + x^{2m} + \ldots + x^{gm} + \ldots) = \frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)\ldots(1-x^m)}.$$

Если надо найти, сколькими способами можно разбить число N на K слагаемых, принимающих значения $n_1, \ldots, n_s$, причем учитывается порядок слагаемых, то производящая функция имеет вид

$$f(x) = (x^{n_1} + x^{n_2} + \ldots + x^{n_s})^K.$$

Задача упрощается, если числа $n_1, \ldots, n_s$ образуют арифметическую прогрессию – в этом случае $x^{n_1}, \ldots, x^{n_s}$ образуют геометрическую прогрессию, а это позволяет упростить выражение для $f(x)$.

<u>Пример II</u>. Сколькими способами можно представить число I7 в виде суммы четырех слагаемых, принимающих значение 3, 4, 5 (причем порядок слагаемых имеет значение)?

<u>Решение</u>. В качестве производящей функции возьмем $(x^3+x^4+x^5)^4$ так как при раскрытии скобок этого выражения каждое слагаемое x^N встретится столько раз, сколькими способами N разбивается на сумму 4-х слагаемых, принимающих значения 3, 4, 5. При этом встретятся и члены, получаемые друг из друга перестановкой слагаемых в показателе (например, $x^3x^4x^5x^3$ и $x^4x^3x^3x^5$).

Раскрытие скобок в выражении $f(x) = (x^3+x^4+x^5)^4 = x^{12}(1+x+x^2)^4$ можно произвести, например, по полиномиальной формуле. Но проще иной способ. Заметим, что $1+x+x^2 = \frac{1-x^3}{1-x}$. Поэтому $f(x)$ можно записать в виде

$$f(x) = \frac{x^{12}(1-x^3)^4}{(1-x)^4} = x^{12}(1-x^3)^4(1-x)^{-4}.$$

По формуле бинома Ньютона имеем

$$(1-x^3)^4 = 1-4x^3+6x^6-4x^9+x^{12}.$$

Заметим, что Ньютону удалось обобщить формулу (I) на случай нецелых показателей. Именно, он доказал, что если α – положительное число и $|x|<\alpha$, то для любого действительного значения α имеет место равенство

$$(x+a)^\alpha = a^\alpha + \alpha a^{\alpha-1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}a^{\alpha-2}x^2+\ldots+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}a^{\alpha-k}x^k+\ldots \quad (6)$$

В случае, когда α – целое отрицательное число, т.е. $\alpha=-n$, формула (6) принимает вид

$$(x+a)^{-n} = a^{-n} - na^{-n-1}x + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}a^{-n-2}x^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\times a^{-n-3}x^3+\ldots+(-1)^k\frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}a^{-n-k}x^k+\ldots \quad (7)$$

Применяя формулу (7) к нашему примеру, будет иметь

$$(1-x)^{-4} = 1+4x+10x^2+20x^3+\ldots+\frac{4\cdot 5\cdot\ldots(n+3)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}x^n+\ldots$$

Поэтому $f(x) = x^{12}(1-4x^3+6x^6-4x^9+x^{12})\times$
$\times(1+4x+10x^2+20x^3+35x^4+56x^5+\ldots)$.

Перемножая почленно эти разложения, найдем, что коэффициент при x^n в разложении равен I6. Значит, разложение можно сделать I6 способами.

Пример I2. Сколькими способами можно получить 25 очков, бросая 7 костей?

Решение. Здесь надо образовать производящую функцию:

$$f(x) = (x+x^2+\ldots+x^6)^7.$$

По формуле для суммы геометрической прогрессии эту функцию можно записать в виде

$$f(x) = \frac{x^7(1-x^6)^7}{(1-x)^7} = x^7(1-x^6)^7(1-x)^{-7}.$$

Разложим $(1-x^6)^7$ по формуле (I), а $a(1-x)^{-7}$ - по формуле ряда Ньютона (7). Получим

$$f(x)=x^7(1-7x^6+21x^{12}-35x^{18}+35x^{24}-21x^{30}+7x^{36}-x^{42})\times$$
$$\times(1+7x+28x^2+84x^3+210x^4+462x^5+\ldots).$$

Перемножая эти разложения, вычислим коэффициент при x^{25}. Он и даст ответ на поставленную задачу.

Задачи для самостоятельного решения

I. Найти производящую функцию для последовательности

$$f(n)=\begin{cases}(n+1)(n+2) & n=0,1,2,\ldots,N-1\\ 0, & n\geq N\end{cases}$$

2. Найти производящие функции для следующих последовательностей:

а) $f(n)=1$, $n=0,1,2,\ldots$;

б) $f(n)=\alpha^n$, $n=0,1,2,\ldots$;

в) $f(n)=\alpha n$, $n=0,1,2,\ldots$;

г) $f(n)=\begin{cases}0, & n=0\\ \frac{\alpha^n}{n!}, & n=1,2,3,\ldots\end{cases}$.

3. Доказать, что сумма всех биномиальных коэффициентов равна 2^n

4. Доказать, что сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах.

5. Выписать коэффициенты разложения бинома $(a+b)^8$.

6. В некотором государстве нет двух жителей с одинаковым набором зубов. Какова может быть наибольшая численность населения этого государства?

7. Найти средний член разложения бинома

$$\left(\frac{1}{x^2}+x\sqrt{x}\right)^{12}.$$

8. В разложении бинома $(\sqrt[4]{x}-\sqrt[6]{x})^9$ найти член, содержащий x^2.

9. В разложении бинома $(\sqrt[9]{x^{-8}}+\sqrt[3]{x^2})^7$ найти член, не содержащий x.

10. В разложении бинома $\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{a} - \frac{a}{\sqrt{x^2}}\right)^{18}$ найти член, не содержащий a.

11. В разложении бинома $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}} - \sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}$ найти член, содержащий a и b в одинаковых степенях.

12. Сумма биномиальных коэффициентов трех последних членов разложения бинома $\left(a^2\sqrt{b} - \frac{b^2}{\sqrt[3]{a^2}}\right)^n$ равна 29. Найти член разложения, в котором сумма показателей степеней чисел a и b вдвое больше показателя степени бинома.

13. В разложении бинома $\left(ab^2 - \sqrt[5]{\frac{a}{b}}\right)^n$ сумма коэффициентов третьего члена от начала и третьего члена от конца в 17 раз больше показателя степени бинома. Найти член разложения, в котором показатель степени a вдвое больше показателя степени числа b.

14. В разложении бинома $\left(\sqrt[9]{x^2} - \sqrt[3]{x}\right)^n$ биномиальный коэффициент C_n^2 есть среднее арифметическое между двумя соседними с ним биномиальными коэффициентами. Найти третий член разложения.

15. В разложении бинома $\left(x\sqrt{x} - \frac{1}{x^4}\right)^n$ биномиальные коэффициенты C_n^8, C_n^9, C_n^{10} являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии. Найти пятый член разложения, если $n < 20$.

16. Коэффициенты второго, третьего и четвертого членов разложения бинома $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии. Найти эти члены.

17. Пятый член разложения бинома $\left(\sqrt[6]{x} + x^{\frac{1}{\lg x+3}}\right)^7$ равен 350. Найти x.

Используя формулу бинома Ньютона, доказать тождества:

18. $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} 2^k C_n^k = 1.$

19. $\sum\limits_{k=0}^{n} 9^k C_n^k = 10^n.$

20. $\sum\limits_{k=1}^{n} k C_n^k = n\, 2^{n-1}.$

21. $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k C_n^k = 0.$

22. $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} k\, 2^{k-1} C_n^k = n.$

23. $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$

Упростить:

24. $\sum\limits_{k=0}^{m} (-1)^k C_n^k \quad (m<n).$

25. $\sum\limits_{k=6}^{m} (-1)^k C_n^k \quad (m<n)$

26. $\sum\limits_{k=0}^{m} C_{n+k}^{n}.$

27. $\sum\limits_{k=0}^{m} C_{n+k}^{p} \quad (n>p).$

28. В каком из выражений: $(1-x^2+x^3)^{1000}$ или $(1+x^2-x^3)^{1000}$ –

после раскрытия скобок и приведения подобных членов будет больший коэффициент при x^{20} ?

29. В разложении $(1+x-x^2)^{25}$ найти тот член, у которого показатель степени x в три раза больше суммы всех коэффициентов разложения.

РАЗБИЕНИЯ

В задачах этого раздела множество делится на два или большее число подмножеств, и надо найти все способы такого деления.

При этом возможны следующие случаи:

порядок элементов в подмножествах существенен;

порядок элементов не учитывается;

порядок самих подмножеств существенен;

элементы могут быть различимы и неразличимы;

подмножества различимы и неразличимы;

пустые подмножества допустимы и недопустимы.

В соответствии с перечисленными случаями возникает целый ряд различных комбинаторных задач на разбиение. Рассмотрим некоторые из них.

Задача 1. Даны n различных предметов и k ящиков. Надо положить в первый ящик n_1 предметов, во второй – n_2 предметов,.. ..., в k-й – n_k предметов, где $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$. Сколькими способами можно сделать такое распределение?

Решение. В первый ящик надо положить n_1 предметов. Так как порядок предметов безразличен, то имеем $C_n^{n_1}$ способов. После этого во второй ящик надо положить n_2 предметов из $n-n_1$ оставшихся. Это можно сделать $C_{n-n_1}^{n_2}$ способами. И так далее. В k-й ящик кладем оставшиеся n_k предметов единственным способом: $C_{n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}}^{n_k}$

По правилу произведения получаем, что полное число возможностей равно

$$C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} \ldots C_{n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}}^{n_k} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$$

Задача 2. Имеем n_1 предметов одного сорта, n_2 предметов другого сорта,... n_k предметов k-го сорта. Сколькими способами их можно разделить между двумя людьми?

Решение. n_1 предметов можно разделить (n_1+1) способами – первый может не взять ни одного предмета, взять один, два,..., n_1

4-1052

предметов. Точно так же можно разделить (n_2+1) способами n_2 предметов,... и (n_k+1) способами n_k предметов. Так как предметы каждого сорта можно делить независимо от предметов другого сорта, то по правилу произведения получаем $(n_1+1)(n_2+1)\ldots(n_k+1)$ способов раздела предметов между двумя людьми.

Задача 3. Имеем n шаров, которые размещаются по K ящикам. Определить, сколько способов размещения шаров по ящикам.

Решение. Обозначим $U(n,K)$ число способов размещения р а з л и ч и м ы х ш а р о в п о р а з л и ч и м ы м я щ и к а м.

Возьмем первый шар; для его размещения есть K возможностей; для второго шара - тоже K возможностей и так далее. Таким образом, $U(n,K)=K^n$.

Пусть $U^*(n,K)$ - тот же способ размещения, что и $U(n,K)$, при условии, что в каждом ящике есть хотя бы один шар, т.е. все ящики не пусты. При $n<K$ $U^*(n,K)=0$.

Введем в рассмотрение величину A_i - такое распределение различимых шаров по различимым ящикам, при котором i -й ящик остается пустым, а об остальных ничего не известно (могут быть пустые и непустые).

Будем определять U^* методом включения и исключения. Так как один ящик пустой, надо разместить (K - I) шаров по ящикам. Число таких размещений $|A_i|=(K-1)^n$.

Если два ящика пусты, то число размещений определится как мощность пересечения

$$|A_{i_1}\cap A_{i_2}|=(K-2)^n.$$

Если r ящиков пусты $(r<K)$, то число размещений равно

$$|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_r}|=(K-r)^n.$$

Так как невозможен случай, когда все ящики пусты, то

$$|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_K|=0.$$

Всех A_i будет K штук, т.е. C_K^1. Пересечения вида $|A_{i_1}\cap A_{i_2}|$ можно сделать C_K^2 способами, а пересечения $|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_r}|$ C_K^r способами.

С использованием формулы включения и исключения число распределений, при которых ни один ящик не будет пустым, определится так:

$$U^*(n,K)=K^n-C_K^1(K-1)^n+C_K^2(K-2)^n+\ldots+(-1)^r C_K^r(K-r)^n+\ldots+(-1)^{K-1}K.$$

Числа U^* называются ч и с л а м и С т и р л и н г а.

Обозначим $T(n,k)$ число способов размещения н е р а з л и ч и м ы х шаров по р а з л и ч и м ы м ящикам, а через $T^*(n,k)$ – случай, когда все ящики не пусты.

Пусть распределение шаров характеризуется числами x_k :

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k,$$

где x_i показывает, сколько шаров в i-м ящике. Тогда задача сводится к вычислению целочисленных решений уравнения

$$\begin{aligned} &x_1+x_2+\ldots+x_k=n, \\ &x_i \geqslant 1 \qquad \text{для случая } T^*(n,k), \\ &x_i \geqslant 0 \qquad \text{для случая } T(n,k). \end{aligned} \tag{I}$$

Расположим данные n шаров в ряд. Между ними будет $n-1$ промежутков. Если в любые $k-1$ из этих промежутков поставить разделяющие перегородки, то все шары разделятся на k непустых частей. После этого первую часть поместим в первый ящик, вторую – во второй и т.д. Так как $k-1$ перегородку можно поставить в $n-1$ промежутков C_{n-1}^{k-1} способами, то число способов размещения шаров для данного слуая равно $T^*(n,k)=C_{n-1}^{k-1}$.

Добавим теперь по одному шару в каждый ящик: $\bar{x}_i = x_i+1$.
Тогда уравнение (I) примет вид

$$\bar{x}_1+\bar{x}_2+\ldots+\bar{x}_n=n+k.$$

Теперь все ящики непустые, и, применяя только что полученный результат, будем иметь

$$T(n,k)=C_{n+k-1}^{k-1}$$

Пусть $V^*(n,k)$ – число разбиений множества из n различимых элементов на k непустых подмножеств. Имея одно такое разбиение, можно пронумеровать подмножества $k!$ способами, получив тогда распределение типа $U^*(n,k)$:

$$V^*(n,k)\cdot k! = U^*(n,k)$$

Отсюда число способов размещения различимых шаров по k непустым неразличимым ящикам равно $V^*(n,k)=U^*(n,k)/k!$

Определим числа $V(n,k)$. Пусть S - число пустых ящиков

$S \in \{0,1,2,\dots,k-1\}$.

Надо n шаров распределить по ($k-S$) непустым ящикам. Число способов такого распределения можно представить в виде

$$V(n,k)=\sum_{S=0}^{k-1} V^*(n,k-S)=\sum_{c=1}^{k} V^*(n,c),$$

где C - число непустых ящиков.

Если при этом и шары, и ящики различимы, то число способов распределения запишем в виде

$$W(n,k)=\sum_{c=1}^{k} W^*(n,c). \tag{2}$$

Здесь $W(n,k)$ - число целочисленных последовательностей вида ($x_1, x_2, \dots, x_k$), удовлетворяющих уравнению

$$\begin{cases} x_1+x_2+\dots+x_k=n \\ 0\le x_1\le x_2\le\dots\le x_k \end{cases}, \tag{3}$$

где x_i - число шаров в i -м ящике. Так как ящики неразличимы, расположили их в порядке возрастания. $W^*(n,k)$ - число последовательностей, удовлетворяющих уравнению

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+\dots+x_k=n \\ 1\le x_1\le x_2\le\dots\le x_k. \end{cases} \tag{4}$$

Если взять из каждого ящика по одному шару, то перейдем от системы (4) к системе (3) и получим $W(n-k,k)$ способов распределения шаров. Таким образом,

$$W(n-k,k)=W^*(n,k). \tag{5}$$

С использованием формул (2) и (5) составим таблицу распределений $W(n,k)$ и $W^*(n,k)$ (табл.I). При этом заметим, что $W(n,1)=1$ - количество способов размещения шаров по одному ящику;

$W(1;k)=1$, так как шары и ящики неразличимы;

$W^*(n,n)=1$ - каждый из ящиков не пуст;

$W^*(n,k)=0$ при $k>n$. Например, $W^*(3,2)=W(1,2)$ из (5).

$W(4,2)=W^*(4,1)+W^*(4,2)=3$ из (2) и т.д.

Т а б л и ц а I

ящики шары	I	2	3	4	5	6	...
I	I I	I 0	I 0	I 0	I 0	I 0	
2	I I	2 I	2 0	2 0	2 0	2 0	
3	I I	2 I	3 I	3 0	3 0	3 0	
4	I I	3 2	4 I	5 I	5 0	5 0	
5	I I	3 2	5 2	6 I	7 I	7 0	
6	I I	4 3	7 3	9 2	IO I	II I	

...

Таблицу можно продолжить вниз и вправо.

Задачи для самостоятельного решения

I. Двое ребят собрали IO ромашек, I5 васильков и I4 незабудок. Сколькими способами они могут разделить эти цветы?

2. Трое ребят собрали с яблони 40 яблок. Сколькими способами они могут их разделить, если все яблоки считаются одинаковыми?

3. При игре в преферанс 32 карты делятся между игроками по IO карт каждому, а две карты кладутся в прикуп. Определить число различных раздач.

4. Сколькими способами можно послать 8 различных фотографий, использовав 5 различных конвертов?

5. Имеется n различных сигнальных флагов и K мачт, на которые их вывешивают. Значение сигнала зависит от того, в каком порядке развешены флаги. Сколькими способами можно развесить флаги, если все флаги должны быть использованы, но некоторые из мачт могут оказаться пустыми?

6. В кошельке лежат 10 монет по 2 к. и 5 монет по 3 к. Сколькими способами можно уплатить этими монетами сумму в 22 к., если монеты одного достоинства не отличаются?

7. Сколькими способами можно разложить в два кармана 9 монет различного достоинства?

8. Сколькими способами можно разложить 12 пятаков по пяти пакетам так, чтобы ни один пакет не был пуст. Рассмотретить случаи: а) пакеты различимы; б) и монеты, и пакеты неразличимы.

9. 30 человек голосуют по пяти вопросам. Сколькими способами могут распределиться голоса, если каждый голосует за одно предложение?

10. Сколькими способами можно разделить 10 белых грибов, 15 подберезовиков и 8 подосиновиков между четырьмя ребятами?

11. Сколькими способами можно разбить 30 рабочих на три бригады по 10 человек в каждой бригаде? На 10 групп по три человека в каждой группе?

12. Группу из 30 студентов надо разбить на 5 непустых бригад. Студенты различимы, бригады - нет.

13. Сколькими способами три человека могут разделить между собой 6 одинаковых яблок, один апельсин, одну сливу, один лимон, одну грушу, одну айву и один финик?

14. Сколькими способами 4 черных, 4 белых и 4 синих шара могут быть разложены в 6 различных пакетов (некоторые пакеты могут быть пустыми)?

15. Сколькими способами можно раздать 27 книг лицам A , B , C так, чтобы A и B вместе получили вдвое больше книг, чем C?

16. В лифт сели 8 человек. Сколькими способами они могут выйти на четырех этажах так, чтобы на каждом этаже вышел хотя бы один человек?

17. Сколькими способами можно представить натуральное число n в виде суммы трех слагаемых, каждое из которых также является натуральным числом (представления, различающиеся порядком слагаемых, считать различными)?

18. Сколькими способами можно расположить в 9 лузах 7 белых, один черный и один красный шар (луза может быть и пустой)?

19. Сколькими способами можно надеть 5 различных колец на пальцы одной руки, исключая большой палец?

20. Сколькими способами можно расставить 20 книг в книжном шкафу с пятью полками, если каждая полка может вместить все 20 книг?

21. 22 неразличимых шара размещены по пяти неразличимым ящикам. Сколько имеется различных комбинаций такого размещения, если в каждом ящике должно быть не менее трех шаров?

22. Сколькими способами можно разместить 20 разных документов по трем разным папкам (порядок документов в папках важен)?

23. Сколько решений имеет уравнение

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \end{cases} \qquad (x_i \text{ - целое})?$$

24. Сколькими способами можно разложить 10 книг на 5 бандеролей по две книги в каждой (порядок бандеролей не принимается во внимание)?

25. Сколькими способами можно разложить 9 книг на 4 бандероли по две книги и одну бандероль в одну книгу?

26. Сколькими способами можно разделить колоду из 36 карт пополам так, чтобы в каждой пачке было по два туза?

27. Сколькими различными способами можно представить число 1 000 000 в виде произведения трех сомножителей? Представления, отличающиеся порядком сомножителей, считаются различными.

МЕТОД РЕКУРРЕНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Метод рекуррентных соотношений состоит в том, что решение комбинаторной задачи с n предметами выражается через решение аналогичной задачи с меньшим числом предметов с помощью некоторого соотношения, которое называется р е к у р р е н т н ы м.

Пользуясь рекуррентным соотношением, искомую величину можно вычислить, исходя из того, что для небольшого количества предметов решение задачи легко находится.

Пример 1. Найти число частей, на которые n окружностей делят плоскость, если каждые две окружности имеют общую хорду и никакие три окружности не пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть A_n - искомое число частей. На сколько увеличится число частей, если провести $(n+1)$-ю окружность так, чтобы она пересекала все окружности и не проходила через точку пересечения каких-либо двух других окружностей? Поскольку $(n+1)$-я окружность пересекается с каждой окружностью в двух точках, то она разделится точками пересечения на $2n$ дуг, каждая из которых делит пополам одну из частей, которая имеется в A_n. Следовательно, число частей увеличится на $2n$: $A_{n+1} = A_n + 2n$.

Из этого рекуррентного соотношения получим

$$A_n = 2(n-1) + A_{n-1} = 2(n-1) + 2(n-2) + A_{n-2} =$$
$$= 2(n-1) + 2(n-2) + \ldots + 2\cdot 1 + A_1 .$$

Но $A_1 = 2$, поэтому $A_n = n^2 - n + 2$.

*) Говорят, что рекуррентное соотношение имеет порядок k, если оно позволяет выразить $f(n+k)$ через $f(n), f(n+1), \ldots, f(n+k-1)$. Например, $f(n+2) = f(n)f(n+1) - 3f^2(n+1) + 1$ – рекуррентное соотношение второго порядка, а $f(n+3) = 6f(n)f(n+2) + f(n+1)$ – рекуррентное соотношение третьего порядка.

Если задано рекуррентное соотношение k-го порядка, то ему удовлетворяет бесконечно много последовательностей, так как первые k элементов последовательности можно задать совершенно произвольно – между ними нет никаких соотношений. Но если первые k элементов заданы, то все остальные определяются совершенно однозначно.

Некоторая последовательность является **решением** данного рекуррентного соотношения, если при подстановке этой последовательности соотношение тождественно выполняется.

Например, последовательность 2, 4, 8,..., 2^n,... является одним из решений рекуррентного соотношения

$$f(n+2) = 3f(n+1) - 2f(n)$$

В самом деле, общий член этой последовательности имеет вид $f(n) = 2^n$, и при любом n имеет место тождество $2^{n+2} = 3\cdot 2^{n+1} - 2\cdot 2^n$.

Решение рекуррентного соотношения k-го порядка называется **общим**, если оно зависит от k произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_k$ и путем подбора этих постоянных можно получить любое решение данного соотношения.

Например, для соотношения $f(n+2) = 5f(n+1) - 6f(n)$ общим решением будет $f(n) = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n$.

Для решения рекуррентных соотношений общих правил нет. Однако существует часто встречающийся класс соотношений, решаемый единообразным методом. Это рекуррентные соотношения вида

$$U_n = a_1 U_{n-1} + a_2 U_{n-2} + \ldots + a_k U_{n-k}, \qquad (1)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_k$ – некоторые числа. Такие соотношения называются **линейными рекуррентными соотношениями с постоянными коэффициентами.**

Имея соотношение (I), составим уравнение k-й степени

$$\mu^k = a_1\mu^{k-1} + a_2\mu^{k-2} + \dots + a_k\mu^0. \tag{2}$$

Это уравнение называется **характеристическим** для соотношения (I).

Если все корни $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ этого алгебраического уравнения различны, то общее решение соотношения (I) имеет вид:

$$U_n = C_1\mu_1^n + C_2\mu_2^n + \dots + C_k\mu_k^n,$$

где $C_1, C_2, \dots, C_k$ – константы, которые определяются из начальных условий.

Если же, например, $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$, то в общем решении этому корню соответствует часть

$$\mu_1^n\left[C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + \dots + C_s n^{s-1}\right].$$

Пример 2. Решить рекуррентное соотношение

$$U_{n+4} = 5U_{n+3} - 6U_{n+2} - 4U_{n+1} + 8U_n.$$

Решение. Характеристическое уравнение имеет здесь вид

$$\mu^4 - 5\mu^3 + 6\mu^2 + 4\mu - 8 = 0.$$

Решая его, получаем корни $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 2;\ \mu_4 = -1$. Значит, общее решение имеет вид

$$U_n = 2^n\left[C_1 + C_2 n + C_3 n^2\right] + C_4(-1)^n.$$

Пример 3. (Числа Фибоначчи). Пара кроликов приносит раз в месяц приплод из двух крольчат (самки и самцы), причем новорожденные крольчата через два месяца после рождения уже приносят приплод. Сколько кроликов появится через год, если в начале года была одна пара крольчат?

Решение. Обозначим через U_n количество пар кроликов по истечении n месяцев с начала года. Мы видим, что через $n+1$ месяцев будут эти U_n пар и еще столько новорожденных пар кроликов, сколько было кроликов в конце месяца $n-1$, т.е. U_{n-1}. Значит, имеет место рекуррентное соотношение

$$U_{n+1} = U_n + U_{n-1}, \quad \text{или} \quad U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$$

Так как по условию U_1 = I и U_2 = I, то последовательно находим U_3 = 2, U_4 = 3, U_5 = 6 и т.д. Числа называются **числами Фибоначчи**:

I, I, 2, 3, 5, 8, I3, 2I, ...

Характеристическое уравнение для данного рекуррентного соотношения имеет вид $\mu^2 = \mu + 1$. Корнями этого квадратного уравнения являются числа

$$\mu_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \quad \mu_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

поэтому общее решение соотношения Фибоначчи имеет вид

$$U_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Используя начальные условия U_1 = I и U_2 = I, получаем для определения C_1 и C_2 систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l} C_1\mu_1 + C_2\mu_2 = 1 \\ C_1\mu_1^2 + C_2\mu_2^2 = 1 \end{array}\right\}$$

Отсюда находим $C_1 = -C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, поэтому

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Это выражение при всех натуральных n принимает целые значения.

*) Пусть имеются целые неотрицательные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, где $a_i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Надо определить, чему равно число способов получить сумму N из n таких чисел. Искомое число способов обозначается $C_m(n,N)$ и определяется по следующему рекуррентному соотношению:

$$C_m(n,N) = C_m(n-1,N) + C_m(n-1,N-1) + \ldots + C_m(n-1,N-m+1). \qquad (3)$$

При этом выполняются условия

$$C_m(n,1) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \le n \le m-1 \\ 0, & \text{если } n \ge m \end{cases}$$

Числа $C_m(n,N)$ называются элементами m арифметического треугольника.

<u>Пример 4.</u> Сколько имеется в системе счисления с основанием $m = 4$ трехзначных чисел, сумма цифр которых равна шести (все цифры, включая 0, считать равноценными)?

<u>Решение.</u> Для ответа на поставленный вопрос надо найти число $C_4(3,6)$. Построим арифметический треугольник $m = 4$.

1	$n=0$
1 1 1 1	$n=1$
1 2 3 4 3 2 1	$n=2$
1 3 6 10 12 12 10 6 3 1	$n=3$
1 4 10 20 31 40 44 40 31 20 10 4 1	$n=4$
$N=$ 0 1 2 3 4 5 6	

При построении треугольника используем формулу (3), которая для данного случая принимает вид

$$C_4(n,N)=C_4(n-1,N)+C_4(n-1,N-1)+C_4(n-1,N-2)+C_4(n-1,N-3),$$

т.е. каждый элемент треугольника равен сумме четырех элементов верхней строки - двух справа от него и двух слева.

$$C_4(3,6)=C_4(2,6)+C_4(2,5)+C_4(2,4)+C_4(2,3)=4+3+2+1=10$$

Итак, в системе счисления с основанием 4 имеется I0 трехзначных чисел, сумма цифр которых равна 6.

<u>Пример</u> 5. Студенты сдают 4 экзамена и получают оценки 3, 4, 5 баллов. Сколько возможностей получить более I7 баллов?

<u>Решение.</u> Возьмем вместо баллов 3, 4, 5 соответственно 0,I,2. Тогда будем строить треугольник $m = 3$. При этом из суммы I7 надо вычесть 3·I4 = I2 баллов.

Итак, надо найти число $C_3(4,5)$, которое по формуле (3) будет равно $C_3(4,5)=C_3(3,5)+C_3(3,4)+C_3(3,3)$.

Построим арифметический треугольник для $m = 3$.

1	$n=0$
1 1 1	$n=1$
1 2 3 2 1	$n=2$
1 3 6 7 6 3 1	$n=3$
1 4 10 16 19 16 10 4 1	$n=4$
$N=$ 0 1 2 3 4 5 6 7 8	

$C_3(4,5) = 7 + 6 + 3 = 16$. Это число способов получить сумму 12 (т.е. 17) баллов. Число возможностей получить более 17 баллов будет равно $16 + 10 + 4 + 1 = 31$.

Задачи для самостоятельного решения

1. На сколько частей делят плоскость n пересекающихся прямых, если никакие три из них не пересекаются в одной точке?

2. На сколько частей можно разделить поверхность шара плоскостями, проходящими через его центр, при условии, что никакие три плоскости не проходят через один и тот же диаметр?

3. За пересылку бандероли надо уплатить 18 к. Сколькими способами можно оплатить ее марками стоимостью в 4, 6 и 10 к., если два способа, отличающиеся порядком марок, считаются различными?

4. Решить следующие рекуррентные соотношения :

а) $U_{n+2} = 5U_{n+1} - 6U_n$; $U_0 = 1$, $U_1 = 2$;

б) $U_{n+2} = 2U_{n+1} - U_n$; $U_0 = 1$, $U_1 = 3$;

в) $U_{n+2} = 7U_{n+1} - 12U_n$; $U_1 = 0$, $U_2 = 1$;

г) $U_{n+2} = 4U_{n+1} - 4U_n$; $U_1 = 1$, $U_2 = 2$;

5. Решить следующие рекуррентные соотношения:

а) $U_{n+2} = U_{n+1} + 3U_n$; $U_0 = 0$, $U_1 = 2$;

б) $U_{n+2} = 6U_{n+1} - 5U_n$; $U_0 = 1$, $U_1 = 1$;

в) $U_{n+2} = 3U_n + 4U_{n+1}$; $U_0 = 1$, $U_1 = 3$;

г) $U_{n+2} = 5U_{n+1} + 4U_n$; $U_0 = 0$, $U_1 = 5$;

д) $U_{n+2} = 3U_{n+1} + 4U_n$; $U_0 = 9$, $U_1 = 0$;

е) $U_{n+2} = 2U_{n+1} + 7U_n$; $U_0 = 5$, $U_1 = 3$;

ж) $U_{n+2} = 3U_{n+1} - 2U_n$; $U_0 = 3$, $U_1 = 1$.

6. Информация передается с помощью сигналов нескольких типов. Длительность передачи сигнала первого типа равна t_1 ; второго типа- t_2 ,... ; K -го типа - t_K единиц времени. Сколько различных сооб-

щений можно передать с помощью этих сигналов за T единиц времени? Учитывать лишь те, к которым нельзя присоединить ни одного сигнала, не выйдя за рамки отведенного для передачи времени.

7. Рассматривается ряд чисел Фибоначчи: 0, I, I, 2, 3, 5,... . Доказать, что два соседних члена взаимно просты.

8. В ряде Фибоначчи выбрано 8 подряд идущих чисел. Доказать, что их сумма не входит в этот ряд.

9. Найти общее решение рекуррентных соотношений:

а) $a_{n+2}-7a_{n+1}+12a_n=0$;

б) $a_{n+2}+3a_{n+1}-10a_n=0$;

в) $a_{n+2}-4a_{n+1}+13a_n=0$;

г) $a_{n+2}+9a_n=0$;

д) $a_{n+2}+4a_{n+1}+4a_n=0$;

е) $a_{n+3}-9a_{n+2}+26a_{n+1}-24a_n=0$;

ж) $a_{n+3}+3a_{n+2}+3a_{n+1}+a_n=0$;

з) $a_{n+4}+4a_n=0$.

I0. Найти a_n, зная рекуррентное соотношение и начальные члены:

а) $a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$; $a_1=1, a_2=-7$;

б) $a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$; $a_1=2$, $a_2=4$;

в) $a_{n+2}+a_{n+1}+a_n=0$; $a_1=-\frac{1}{4}$, $a_2=-\frac{1}{2}$;

г) $a_{n+3}-9a_{n+2}+26a_{n+1}-24a_n=0$; $a_1=1, a_2=-3, a_3=-29$.

II. Найти такую последовательность, что $a_1=\cos\alpha$, $a_2=\cos 2\alpha$ и $a_{n+2}-2\cos\alpha\, a_{n+1}+a_n=0$.

I2. Доказать, что последовательность с общим членом $a_n=n^k$ удовлетворяет соотношению

$$a_{n+k}-C_k^1 a_{n+k-1}+C_k^2 a_{n+k-2}+\ldots+(-1)^k C_n^k a_n=0.$$

I3. Найти последовательность, такую, что

$$a_{n+2} + 2a_{n+1} - 8a_n = 2^n$$

I4. Сколько шестизначных чисел, сумма цифр которых равна девяти, имеется в троичной системе счисления? Все цифры, включающие 0, считать равноценными.

I5. В числовом треугольнике

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & 1 & & \\ & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & \\ 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 \\ \cdots & & & \cdots & & & \cdots \end{array}$$

каждое число равно сумме чисел, расположенных в предыдущей строке над этим числом и над его соседями справа и слева. Доказать, что в каждой строке, начиная с третьей, найдется четное число.

I6. Будем считать шестизначные номера троллейбусных билетов "счастливыми", если сумма цифр, стоящих на четных местах, равна сумме цифр, стоящих на нечетных местах. Требуется найти число "счастливых" номеров от 0 до 999 999.

I7. Даны три игральные кости. II очков, также как и I2 очков, можно выбросить шестью способами (легко проверить простым перебором). Однако II очков выпадает чаще. Почему? Определить отношение вероятностей выпадания II и I2 очков.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

К разделу "Метод производящих функций"

1. $f(z) = \dfrac{2-(N+2)(N+1)z^{N}+2N(N+2)z^{N+1}-(N+1)^2 z^{N+2}}{(1-z)^3}$

2. а) $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$; б) $f(z) = \dfrac{1}{1-\alpha z}$; в) $f(z) = \dfrac{\alpha z}{(1-z)^2}$;

г) $f(z) = e^{\alpha z} - 1$

6. 2^n. Для составления модели задачи можно использовать двоичную систему счисления.

7. $T_7 = 924x^{-3}$. 8. $T_4 = -84x^2$. 9. $T_5 = 35$.

10. $T_{10} = -C_{18}^{9} x^{-3}$. 11. $T_{10} = -C_{21}^{9}\sqrt[6]{a^{15}b^{15}}$. 12. $T_4 = -35a^6b^8$.

13. $T_{16} = -816a^6b^3$. 14. $T_3 = 21x\sqrt[9]{x^7}$. 15. $T_5 = 1001x^{-1}$.

16. $T_2 = -7x^{2/2}$, $T_3 = 21x^{17/21}$, $T_4 = -35x^{-1}$. 17. $x = 10^{\frac{-11\pm\sqrt{161}}{2}}$.

24. $(-1)^m C_{n-1}^{m}$. 25. $(-1)^m C_{n-1}^{m} - (-1)^{k-1} C_{n-1}^{k-1}$. 26. C_{n+m+1}^{n+1}.

27. $C_{n+m+1}^{p+1} - C_{n}^{p+1}$. 28. Во втором выражении. Указание: легко видеть, что в обоих выражениях коэффициенты при x^{20} не меняются от замены x на $(-x)$; следовательно, достаточно сравнить коэффициенты при x^{20} в выражениях $(1-x^2+x^3)^{1000} = (1-(x^2-x^3))^{1000}$ и $(1+x^2-x^3)^{1000} = (1+(x^2-x^3))^{1000}$.

29. $1700x^3$. Указание: разложение имеет вид $(1+x-x^2)^{25} = -x^{50}+a_1x^{49}-\dots$ Положим здесь $x = 1$. Тогда для суммы всех коэффициентов рассматриваемого разложения имеем:

$$\left(\sum_{k=0}^{50} a_k x^k\right)\Big/_{x=1} = \left(1+x-x^2\right)^{25}\Big/_{x=1} = 1^{25} = 1.$$

Следовательно, надо найти член, содержащий x^3.

К разделу "Разбиения"

1. 2 640. 2. 861. 4. 126 020. 5. A_{n+k-1}^{n}. 6. Два способа. Указание: разбить все способы решения задачи на классы в зависимости от того, сколько использовано трехкопеечных монет. Если,

например, использованы две такие монеты, то остается уплатить 16 к. с помощью двухкопеечных монет.

7. 2^9. 8. а) 330; б) 13. 9. 46 378. 10. 41 771 040.

11. $\frac{30!}{(10!)^3\,3!}$, $\frac{30!}{(3!)^{10}\,10!}$ 12. $(5^{30}-5\cdot 4^{30}+10\cdot 3^{30}-10\cdot 2^{30}+5\cdot 1)/5!$.

13. 3^6. C_8^2 = 20 412. 14. $(C_9^5)^3$ = 2 000 376. 15. $2^{18}C_{27}^{9}$.

16. 40 824. 17. C_{n-1}^{k-1}. 18. $C_{15}^{8}(C_9^8)^2$ = 521 235. 19. 6 720.

20. $\frac{24!}{4!}$ 21. 13. 23. 23. 24. $\frac{10!}{2^5\cdot 5!}$ = 945.

25. 945. 26. 4 туза можно разделить пополам $\frac{4!}{(2!)^3}=3$ способами, а остальные 32 карты $\frac{32!}{(16!)^2\cdot 2!}$ способами. Так как эти разбиения можно двумя способами комбинировать друг с другом, получаем $\frac{3\cdot 32!}{(16!)^2}$ способов разбиения.

27. Так как 1 000 000 = $2^6 . 5^6$, то любое разложение миллиона на три множителя имеет вид

$$1000000=(2^{\alpha_1}5^{\beta_1})(2^{\alpha_2}\cdot 5^{\beta_2})(2^{\alpha_3}\cdot 5^{\beta_3}),$$

где α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3 – неотрицательные целые числа, такие, что $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\beta_1+\beta_2+\beta_3=6$. Так как 6 разбивается на три неотрицательных целых слагаемых C_8^2 = 28 способами, то если учитывать порядок множителей, число разложений равно 28^2 = 784.

К разделу "Метод рекуррентных соотношений"

1. Пусть $V(n)$ – искомая функция. Докажем рекуррентное соотношение $V(k+1)=V(k)+k+1$, $V(1)=2$.

Отсюда сразу получим

$$V(n)=2+(2+3+\ldots+n)=(n^2+n+2)/2.$$

Пусть проведено k прямых. Проведем еще $(k+1)$-ю прямую. Она пересекается с остальными в k точках и делится на $(k+1)$ частей, каждая из которых принадлежит одной новой части плоскости. Следовательно, $V(k+1)-V(k)=k+1$, что и требовалось доказать.

2. Круг, по которому m-я плоскость пересекает шар, пересекается с каждой из остальных плоскостей в двух точках и, следовательно, делится на $2(m-1)$ частей. Если убрать m-й круг, то число частей будет $F(2m-1)$. Следовательно, $F(m)=2(m-1)+F(m-1)=2+m(m-1)$, так как $F(1)=2$.

3. Обозначим $f(N)$ число способов, которыми можно наклеить марки стоимостью в 4, 6 и I0 к. так, чтобы общая стоимость этих марок равнялась N. Тогда для $f(N)$ справедливо соотношение:

$f(N)=f(N-4)+f(N-6)+f(N-10)$.

Простой просчет показывает, что $f(0)=1$, $f(1)=f(2)=f(3)=0$, $f(4)=1$, $f(5)=0$, $f(6)=1$, $f(7)=0$, $f(8)=1$, $f(9)=0$, $f(10)=f(6)+f(4)+f(0)=3$, $f(14)=f(7)+f(5)+f(1)=0$, $f(12)=f(8)+f(6)+f(2)=2$ и т.д. $f(18)=8$.

4. а) $U_n=2^n$; б) $U_n=1+2n$; в) $U_n=4^{n-1}-3^{n-1}$;

г) $U_n=2^{n-1}$

6. $f(T)=f(T-t_1)+\ldots+f(T-t_k)$; $f(T)=0$, если $T<0$ и $f(0)=1$.

7. Пусть U_n и U_{n+1} делятся на $K\neq 1$. Тогда и $U_{n-1}=U_{n+1}-U_n$ делилось бы на K. Продолжая это рассуждение, мы получили бы, что $U_1=1$, делится на K, а это невозможно.

8. Пусть выбраны числа U_n, U_{n+1}, U_{n+2}, ..., U_{n+7}; выразим их через U_n и U_{n+1}:

$U_{n+2}=U_n+U_{n+1}$, $U_{n+3}=U_n+2U_{n+1}$, $U_{n+4}=2U_n+3U_{n+1}$,

$U_{n+5}=3U_n+5U_{n+1}$, $U_{n+6}=5U_n+8U_{n+1}$, $U_{n+7}=8U_n+13U_{n+1}$.

Сумма этих чисел равна $21U_n+33U_{n+1}$. Но

$U_{n+8}=13U_n+21U_{n+1}$, $U_{n+9}=21U_n+34U_{n+1}$.

Из неравенства $U_{n+8}<21U_n+33U_{n+1}<U_{n+6}$ ясно, что $21U_n+33U_{n+1}$ не является числом Фибоначчи.

9. а) $a_n=C_1 3^n+C_2 4^n$; б) $a_n=C_1 2^n+C_2(-5)^n$;

в) $a_n=C_1(2+3i)^n+C_2(2-3i)^n$; г) $a_n=C_1(3i)^n+C_2(-3i)^n$;

д) $a_n=(-2)^n(C_1+C_2 n)$; е) $U_n=C_1 2^n+C_2 3^n+C_3 4^n$;

ж) $a_n=(-1)^n(C_1+C_2 n+C_3 n^2)$; з) $a_n=2^{n/2}[C_1(1+i)^n+C_2(1-i)^n+C_3(-1+i)^n+C_4(-1-i)^n]$.

10. а) $a_n=5\cdot 2^n-3^{n+1}$; б) $a_n=2^n$; в) $a_n=\frac{1}{2^{n+2}}[(-1+i\sqrt{3})^n+(-1-i\sqrt{3})^n]$;

г) $a_n=2^n+3^n-4^n$.

11. $n a_n = \frac{1}{2}[(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n + (\cos\alpha - i\sin\alpha)^n]$,

т.е. $a_n = \cos n\alpha$ в силу формулы Муавра.

12. Вытекает из того, что характеристическое уравнение $z^k - C_k^1 z^{k-1} + C_k^2 z^{k-2} + \ldots + (-1)^k = 0$ можно записать в виде $(z-1)^k = 0$. Оно имеет корень $z = 1$ кратности k. Поэтому одним из решений является $a_n = n^k$.

13. $a_n = \frac{n}{12} 2^n + C_1(-4)^n + C_2 2^n$.

14. $C_3(6,9) = 50$.

15. Обозначим четные числа цифрой 4, а нечетные - буквой H. Первые 4 элемента третьей строки имеют запись $H4H4$, четвертой - $HH4H$, пятой - 4444, шестой - $HHHH$ и седьмой - $H4H4$. После этого цикл повторяется (первые 4 элемента каждой строки определяются первыми четырьмя элементами предыдущей строки). Поэтому в каждой строке будет хотя бы одно четное число.

16. Определим, сколько трехзначных чисел имеет сумму цифр N (считаем 0 равноценной цифрой), т.е. найдем $C_{10}(3,N)$. Построим арифметический треугольник $m = 10$, затем возведем в квадрат числа третьей строки $n = 3$ и сложим получающиеся результаты. Это и будет числом "счастливых" билетов. В самом деле, каждый такой билет имеет одну и ту же сумму цифр, стоящих на четных и на нечетных местах. Пусть эта сумма равна N. Число $C_{10}(3,N)$ показывает, сколько трехзначных чисел имеет сумму N. Иными словами, оно показывает, сколькими способами можно выбрать цифры, стоящие на четных местах. Столькими же способами можно выбрать цифры на нечетных местах. Так как эти выборы не зависят друг от друга, то по правилу произведения "счастливых" номеров с суммой цифр на четных местах, равной N, будет $[F(N)]^2$. А тогда по правилу суммы общее число "счастливых" билетов равно

$$2[1^2+3^2+6^2+10^2+15^2+21^2+28^2+36^2+45^2+55^2+63^2+69^2+73^2+75^2] = 55252.$$

17. Количество способов составить сумму 11 очков из шести цифр равно числу $C_6(3,8) = 27$, а 12 очков - $C_6(2,8) = 25$.

Библиографический список

I. Ежов И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Элементы комбинаторики.-М.:Наука, 1977.

2. Виленкин Н.Я. Комбинаторика.-М.:Наука, 1969.

3. Меньшиков М.В., Ревякин А.М., Копылова А.Н., Макаров Ю.Н., Стечкин Б.С. Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения.-М.:Наука, 1982.

4. Сачков В.Н. Комбинаторные методы дискретной математики.-М.: Наука, 1977.

Составитель Валентина Александровна Колдоркина

КОМБИНАТОРИКА
(Задание № 2)

Редактор Е.Г.Филиппова
Техн.редактор Н.М.Каленюк
Корректор Е.Г.Филиппова

Подписано в печать 10.11.86 г. Формат 60x84 1/16.
Бумага оберточная белая. Печать оперативная.
Усл.п.л. 0,7. Уч.-изд.л. 0,6. Т.150 экз.
Заказ 1052 Бесплатно.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени авиационный институт имени академика С.П.Королева, г.Куйбышев, ул.Молодогвардейская, 151.

Куйбышевское полиграфическое объединение, г. Куйбышев, ул. Венцека, 60