МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КУЙБЫШЕВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА

КОМБИНАТОРИКА

ЗАДАНИЕ № 1

Утверждено
редакционно-издательским
советом института
в качестве
методических указаний
для студентов

УДК 519.1

Учебное задание № 1 содержит задачи по разделу дискретной математики "Комбинаторика", которые решаются с помощью методов теории выборок и метода включения и исключения.

Предназначено для студентов специальностей "Прикладная математика" и "АСУ" (дневного и вечернего отделений).

Составитель: к.физ.-мат.н., доц. В.А.Колдоркина

Рецензенты: к.физ.-мат.н., доц. М.А.Панкратова;
к.физ.-мат.н., доц. Н.Н.Азаркевич

Комбинаторика - один из разделов дискретной математики, который приобрел важное значение в связи с использованием его в теории вероятностей, математической логике, теории чисел, вычислительной технике, кибернетике.

Знакомство с основными методами комбинаторного анализа является необходимой составной частью образования специалистов, занимающихся вопросами прикладной математики.

Методические указания имеют целью помочь овладению техникой решения комбинаторных задач. Здесь содержатся задачи, которые решаются с помощью методов теории выборок, метода включения и исключения, метода производящих функций и метода рекуррентных соотношений. Включены как задачи, предназначенные для первоначального ознакомления, так и задачи повышенной трудности. Разобрано большое количество типовых примеров, даны задачи для самостоятельного решения, которые снабжены ответами и указаниями.

I. ВЫБОРКИ

Пусть заданы r множеств $E^{(1)}, E^{(2)}, \ldots, E^{(r)}$, (I) причем подмножество $E_i^{(1)} \in E^{(1)}, E_j^{(2)} \in E^{(2)}, \ldots, E_l^{(r)} \in E^{(r)}$. Совокупность подмножеств $(E_i^{(1)}, E_j^{(2)}, \ldots, E_l^{(r)})$ называется r-выборкой из системы (I). Каждый элемент выборки называется к о м п о н е н т о й.

r-выборка из некоторого множества E мощности n ($|E| = n$) - это совокупность из r (не обязательно различных) элементов этого множества.

Если в r-выборке порядок компонент фиксирован, то ее называют у п о р я д о ч е н н о й, если порядок компонент не учитывается, то r-выборка называется н е у п о р я д о ч е н н о й.

Число упорядоченных r-выборок с повторением (размещения с повторением) из множества E определяется по формуле

$$N(n, r) = n^r,$$

где $|E| = n$.

Число упорядоченных r-выборок без повторения (размещения без повторения) определяется по формуле

$$N(n,r) = A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

В частности, при $n = r$: $N(n,n) = A_n^n = \frac{n!}{0!} = n!$

Число A_n^n называется числом перестановок из n элементов и обозначается P_n .

Число неупорядоченных r -выборок с повторением (сочетания с повторением)

$$\bar{N}(n,r) = C^r_{n+r-1}, \quad где \quad C_n^r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}.$$

Число неупорядоченных r -выборок без повторения (сочетания без повторения)

$$\tilde{N}(n,r) = C_n^r .$$

Большинство комбинаторных задач решается с помощью двух основных правил – правила суммы и правила произведения.

Правило суммы:

Если некоторый объект A можно выбрать m способами, а другой объект B можно выбрать n способами, то выбор "либо A , либо B " можно осуществить $m+n$ способами.

Правило произведения:

Если объект A можно выбрать m способами и если после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то выбор пары (A ; B) в указанном порядке можно осуществить mn способами.

Число перестановок из n_1 элементов первого типа, n_2 элементов второго типа, ..., n_k элементов k -го типа ($\sum_{i=1}^{k} n_i = n$) равно

$$P(n_1; n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$$

Пример I. Сколькими способами читатель может выбрать три книги из пяти?

Решение. Искомое число способов равно числу трехэлементных подмножеств из пяти элементов, т.е. числу сочетаний из пяти по три:

$$C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10 .$$

Пример 2. Сколькими способами I2 пассажиров можно разделить на три группы, равные по числу пассажиров?

Решение. Из I2 пассажиров выберем 4. Это можно сделать C_{12}^4 способами. Каждому такому способу соответствует C_8^4 способов, которыми из оставшихся восьми пассажиров еще можно выбрать 4. После этих двух последовательных выборов по 4 пассажира остается еще 4. Из них можно выбрать 4 пассажира единственным способом: C_4^4 = I. Поэтому искомое число способов равно

$$C_{12}^4 \cdot C_8^4 \cdot C_4^4 = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \cdot \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \cdot 1 = 34650.$$

Пример 3. В меню столовой имеется 7 первых, 9 вторых и 4 третьих блюда. Сколькими способами можно выбрать обед из трех блюд (первое, второе, третье)?

Решение. Первое блюдо можно выбрать семью, второе - девятью и третье - четырьмя способами. Поэтому согласно правилу умножения искомое число способов равно $7\cdot 9\cdot 4 = 252$.

Пример 4. Из чисел I, 2, 3,...,I00 составлены всевозможные парные произведения. Сколько среди полученных чисел будет таких, которые кратны трем?

Решение. Ответ получим, если из числа всех парных произведений данных I00 чисел вычтем число всевозможных парных произведений этих чисел, не кратных трем. Но среди чисел I, 2, 3,...,I00 имеем 67, не кратных трем. Поэтому искомое число равно

$$C_{100}^2 - C_{67}^2 = 2739.$$

Для нахождения числа элементов конечного множества, обладающих требуемым свойством, здесь оказалось удобным сначала найти число элементов, не обладающих этим свойством, а затем вычесть это число из числа всех элементов множества. Это п р и н ц и п д о п о л н е н и я. Его часто используют в комбинаторике.

Пример 5. Решим уравнение:

$$C_{2x}^{x+1} : C_{x+1}^{x-1} = 3:5$$

Решение. Очевидно, что $\begin{cases} 0 \le x+1 \le 2x \\ 0 \le x-1 \le 2x+1, \end{cases}$

откуда $x \ge 1$. Из данного уравнения следует:

$$\frac{(2x)!}{(x+1)!\,(2x-(x+1))!} : \frac{(2x+1)!}{(x-1)!\,(2x+1-(x-1))!} = 3:5,$$

или $$\frac{(2x)!\,(x-1)!\,(x+2)!}{(x+1)!\,(x-1)!\,(2x+1)!} = \frac{(2x)!\,(x+1)!\,(x+2)}{(x+1)!\,(2x)!\,(2x+1)} = \frac{3}{5},$$

откуда $\frac{x+2}{2x+1} = \frac{3}{5}$, или $5x+10=6x+3$,

т.е. $x = 7$ (условие $x \geq 1$ выполняется).

Пример 6. Сколькими способами можно расположить на полке 5 книг?

Решение. Искомое число способов равно числу способов упорядочения множества из пяти элементов, т.е. числу перестановок из пяти элементов

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Пример 7. Сколькими способами можно упорядочить множество I, 2,..., n так, чтобы каждое четное число имело четный номер?

Решение. Здесь n четных чисел 2, 4,...,2n можно расставить на n местах с четными номерами $P_n = n!$ способами. Каждому такому способу расположения четных чисел соответствует $P_n = n!$ способов расположения n нечетных чисел I, 3,...,(2n - I) на n местах с нечетными номерами. Поэтому искомое число перестановок по правилу умножения равно

$$n!\, n! = (n!)^2.$$

Пример 8. Скольиими способами можно рассадить трех учеников на 25 местах?

Решение. Искомое число способов равно числу упорядоченных трехэлементных подмножеств из 25 элементов, т.е. числу размещений из 25 по 3:

$$A_{25}^3 = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 13800.$$

Пример 9. Решим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} A_x^y : A_x^{y-1} &= 10 \\ C_x^y : C_x^{y-1} &= \frac{5}{3} \end{aligned}\right\}.$$

Решение. Очевидно, что здесь x и y удовлетворяют системе неравенств $0 \leq y \leq x$, $0 \leq y-1 \leq x$, откуда $y \geq 1$, $x \geq y$. Данная система уравнений принимает вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{x!(x-y+1)!}{(x-y)!\,x!} &= 10 \\ \frac{x!(y-1)!(x-y+1)!}{y!(x-y)!\,x!} &= \frac{5}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x-y &= 9 \\ 3x &= 8y-3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (x=15,\ y=6).$$

Условия $y \geq 1$, $x \geq y$ выполняются, поэтому $x = 15$, $y = 6$.

Пример 10. Сколько различных натуральных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, если в обозначении каждого числа каждая из данных цифр входит не более чем в один ряд?

Решение. Очевидно, что из пяти данных цифр можно составить пяти-, четырех-, трех-, дву-, однозначных чисел соответственно:

$$A_5^5 - A_4^4;\quad A_5^4 - A_4^3;\quad A_5^3 - A_4^2;\quad A_5^2 - A_4^1;\quad A_5^1 - A_4^0.$$

Здесь вычитаются числа A_4^4, A_4^3, A_4^2, A_4^1, A_4^0 тех всевозможных соответственно пяти-, четырех-, трех-, дву- однозначных комбинаций из пяти данных цифр, которые начинаются с нуля и, следовательно, не являются натуральными числами. Искомое число натуральных чисел равно

$$(A_5^5 - A_4^4) + (A_5^4 - A_4^3) + (A_5^3 - A_4^2) + (A_5^2 - A_4^1) + (A_5^1 - A_4^0) = 260.$$

Пример 11. Посчитать, сколько в n-ичной системе счисления натуральных чисел, записываемых ровно k знаками.

Решение. Если допустить записи, начинающиеся с нуля, то каждое k-значное число в n-ичной системе счисления можно рассматривать как размещение с повторениями, составленное из k цифр, причем цифры бывают n видов. Количество чисел, имеющих такую запись, равно n^k.

Но для натуральных чисел не применяют записей, начинающихся с нуля. Поэтому из полученного значения n^k надо вычесть количество чисел, n-ичная запись которых начинается с нуля. Если отбросить у этих чисел первую цифру - нуль, то получим (k - 1)-значное число (быть может, также начинающееся с нуля). Таких чисел будет n^{k-1}. Значит, общее количество k-значных чисел в n-ичной системе счисления равно

$$n^k - n^{k-1} = n^{k-1}(n-1).$$

Пример 12. Пусть оперативная память ЭВМ состоит из 2048 ячеек, в каждой из которых 43 двоичных разряда. Сколько различных комбинаций чисел можно поместить в эту машину?

Решение. Всего имеем $43 \cdot 2\,048 > 87\,000$ различных мест, а число типов заполнения ячеек равно двум (0 или 1). Получаем, что эта ЭВМ может находиться более чем в $2^{87\,000}$ различных состояниях.

Пример 13. В кондитерском магазине продавались 4 сорта пирожных: наполеоны, эклеры, песочные и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

Решение. Порядок, в котором укладывают пирожные в коробку, несущественен, и в комбинации могут входить повторяющиеся элементы (например, можно купить 7 эклеров). Значит, это задача на сочетания с повторениями. Число искомых способов равно

$$N(4,7) = C_{n+k-1}^{k} = C_{4+7-1}^{7} = C_{10}^{7} = \frac{10!}{3!7!} = 120$$

Пример I4. Сколько перестановок можно сделать из букв слова "Миссисипи"?

Решение. В этом слове одна буква "м", четыре "и", три "с" и одна "п", а всего 9 букв. По формуле для числа перестановок

$$P = (4,3,1,1) = \frac{9!}{4!\,3!\,1!\,1!} = 2\,520$$

Предположим, что в некоторой ситуации имеется n возможных взаимоисключающих исходов, которые обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Припишем исходу x_i некоторое число $p_i = p(x_i)$, где p_i – действительное число, $p_i \geq 0$ и $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

Если некоторое событие E случается при одном из исходов $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$ и не происходит в других случаях, то определим вероятность события E равенством

$$P(E) = p_{i_1} + \ldots + p_{i_m}.$$

Существует много практических ситуаций, в которых представляется разумным рассматривать n исходов как равновозможных. Тогда мы принимаем

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1/n.$$

В этом случае вероятность события E, происходящего только при m возможных исходах, равна $P(E) = m/n$. В такой ситуации вычисление $P(E)$ становится чисто комбинаторной задачей на подсчет m – числа возможных исходов, дающих событие E.

Пример I5. Пусть имеется N урн, пронумерованных от I до n. Разместим в урны произвольным образом n шаров, причем $n<N$. Найти вероятность того, что каждая из урн с номерами от I до n содержит точно по одному шару, предполагая, что принцип исключения, который не позволяет положить второй шар в урну, уже содержащую один шар, не имеет места.

Решение. Если n шаров различимы и поскольку принцип исключения не имеет места, то существует N^n способов размещения n шаров в N урн и $n!$ способов размещения их по одному в каждую из урн с номерами 1, 2,..., n.

Из этих условий определяется вероятность

$$P(E) = \frac{n!}{N^n}.$$

Если же шары неразличимы и принцип исключения не имеет места, то существует C_{N+n-1}^{n} способов размещения n шаров в N урн, выбор же первых n урн является единственным возможным для нас способом, и, следовательно, вероятность равна

$$P(E) = \frac{1}{C_{N+n-1}^{n}}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Сколькими способами можно из 30 учеников выбрать делегацию в 5 человек?

2. Сколькими способами 20 спортсменов можно разделить на две команды, равные по числу спортсменов?

3. Найти n из уравнения $C_{2n}^{n} : C_{2n+1}^{n+1} = 6 : 11$.

4. Решить неравенство $C_{x+1}^{x-1} < 21$.

5. Найти x и y, знав, что

$$C_{x+1}^{y+1} : C_{x+1}^{y} : C_{x+1}^{y-1} = 5 : 5 : 3.$$

6. Сколько можно составить перестановок из n элементов, в которых выделенный элемент занимает один и тот же k-й номер?

7. Сколькими способами можно рассадить за круглым столом 5 мальчиков и 5 девочек так, чтобы рядом с каждым мальчиком сидели две девочки?

8. Сколько можно составить перестановок из n элементов, в которых два выделенных элемента не стоят рядом?

9. Сколько можно составить перестановок из n элементов, в которых между двумя выделенными элементами содержится ровно k элементов?

1051

3-1051

10. Сколько различных натуральных пятизначных чисел, кратных четырем, можно составить из цифр 0, I, 4, 7, 8?

II. Решить уравнение $\dfrac{P_{2x+2}}{P_{2x}} = \dfrac{P_{2x+1}}{P_{2x-1}} = 242$

I2. Найти n из уравнения $P_{2n^2} : P_{2n^2+1} = 1:19$.

I3. Найти n из неравенства $P_{3n+2} : P_{3n} \leq 110$.

I4. Сколько можно составить телефонных номеров из пяти цифр так, чтобы в каждом отдельно взятом номере все цифры были различны?

I5. Решить уравнение $A_x^4 : P_{x-2} = 42 \cdot P_{x-4}$.

I6. Из I0 кандидатов на одну и ту же должность выбирают троих. Сколькими способами это можно сделать?

I7. В классе I0 учебных предметов и 5 разных уроков в день. Сколькими способами можно распределить уроки в день?

I8. При каком n выражение $C_{3n}^{38-n} - 25P_n + A_{21+n}^{3n}$ имеет смысл?

I9. Упростить выражение $C_{n+1}^{k+1} : C_{m-1}^{k-1} - \dfrac{m(m-k)}{k(k+1)}$

20. Доказать тождество

$$\frac{C_4^1}{x+1} - \frac{2C_4^2}{x+2} + \frac{3C_4^3}{x+3} - \frac{4C_4^4}{x+4} = \frac{4!}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$$

2I. Решить уравнения: I) $C_n^2 = 28$, 2) $C_n^{n-3} = 20$, 3) $C_{30}^n = 435$, 4) $3P_n = 72$, 5) $A_n^2 = 30$, 6) $A_n^{n-3} = 1$, 7) $A_{30}^n = 30!$

22. Найдите x и y из пропорции

$$C_{x+2}^y : C_{x+2}^{y+1} : C_{x+2}^{y+2} = 0{,}6 : 1 : 1.$$

23. Пусть A – конечное множество, a – его элемент. Каких подмножеств множества A больше: содержащих или не содержащих a ?

24. Пусть A – конечное множество, B – его подмножество. Каких подмножеств множества A больше: содержащих B или не пересекающихся с B ?

25. Пусть A – конечное множество, B – его подмножество. Каких подмножеств множества A больше: содержащих B или не содержащих B (при этом подмножества, не содержащие B , могут все же содержать часть элементов, принадлежащих B)?

26. Пусть A – конечное непустое множество. Каких подмножеств множества A больше: с четным числом элементов или с нечетным числом элементов?

27. Положение плоскости в пространстве определяется тремя точками, не лежащими на одной прямой. Сколько различных плоскостей можно

провести через: I) 4 точки; 2) 7 точек; 3) I0 точек; 4) n точек, если никакие 3 точки не лежат на одной прямой и никакие 4 точки не лежат на одной плоскости?

28. На окружности отмечено несколько точек, M – одна из них. Каких многоугольников с вершинами в этих точках больше: содержащих или не содержащих точку M ?

29. На окружности последовательно отмечены точки M_1, M_2, ..., M_{12}. Вычислить: I) число хорд с концами в отмеченных точках; 2) число треугольников с вершинами в отмеченных точках; 3) число выпуклых четырехугольников с вершинами в отмеченных точках; 4) число треугольников с вершинами в отмеченных точках, не имеющих общих точек с прямой (M_2, M_8); 5) число выпуклых четырехугольников с вершинами в отмеченных точках, имеющих общие точки с прямой (M_1, M_5)?

30. Сколько различных последовательностей длины n можно получить из k единиц и $(n-k)$ нулей?

3I. Сколько имеется четырехзначных натуральных чисел, у которых каждая следующая цифра больше предыдущей?

32. Сколько имеется четырехзначных натуральных чисел, у которых каждая следующая цифра меньше предыдущей?

33. Сколькими способами можно разместить 20 пассажиров по пяти четырехместным каютам?

34. Для банкета на I00 человек приготовлено 3 восьмиместных, 4 десятиместных и 2 восемнадцатиместных круглых стола. Сколько способов расположения I00 человек за этими столами?

35. В классе 30 учеников. Им роздано I5 контрольных работ первого варианта и I5 второго. Сколькими способами можно рассадить этих учеников в два ряда так, чтобы у сидящих рядом не было одинаковых вариантов?

36. Сколькими способами можно рассадить за I5 партами I5 мальчиков и I5 девочек так, чтобы за каждой партой сидели один мальчик и одна девочка?

37. Сколькими способами можно поставить в очередь I0 человек так, чтобы трое определенных из них стояли рядом?

38. Сколькими способами можно поставить в очередь I0 человек так, чтобы между определенными двумя из них стояло ровно три человека?

39. Сколько перестановок цифр 0, I, 2,..., 9, в которых цифра 0 расположена левее цифры I?

40. Сколько перестановок цифр 0, I, 2,..., 9, в которых цифра I расположена между цифрами 0 и 2?

41. Сколько перестановок цифр 0, I, 2,..., 9, в которых цифра 0 занимает одно из первых шести мест, а цифра I - одно из последних шести мест?

42. Сколько перестановок цифр 0, I, 2,..., 9, в которых цифры 0 и I стоят рядом, а цифры I и 2 не стоят рядом?

43. Сколько перестановок цифр 0, I, 2,..., 9, в которых между цифрами 0 и I стоит ровно три цифры, и между цифрами I и 2 - ровно две цифры?

44. Сколько пятизначных чисел, в которых есть одинаковые цифры?

45. Сколько пятизначных чисел, в которых есть хотя бы одна четная цифра?

46. Сколько четных пятизначных чисел, в каждом из которых нет одинаковых цифр?

47. Сколько пятизначных чисел, в записи которых цифра I встречается два раза, а цифры 3, 5 и 7 - по одному разу?

48. Сколькими способами можно расставить на полке 4 книги по комбинаторике, 3 книги по алгебре и 2 книги по теории вероятностей, если книги по каждому предмету одинаковые?

49. Сколько разных последовательностей букв можно получить, переставляя буквы слова "колокольчик"?

50. Сколько разных последовательностей длины n можно получить из k_1 букв a_1, k_2 букв a_2, ..., k_s букв a_s ($k_1+k_2+\ldots+k_s = n$)?

51. Рота состоит из трех офицеров, шести сержантов и 60 рядовых. Сколькими способами можно выделить из них отряд, состоящий из одного офицера, двух сержантов и 20 рядовых?

52. Собрание из 30 человек избирает в президиум 5 человек, из которых затем избираются председатель и секретарь. Сколькими способами можно избрать президиум?

53. Из цифр I, 2, 3, 4, 5 составляются всевозможные натуральные числа, не содержащие одинаковых цифр. Сколько среди них чисел, кратных пяти?

54. Сколько четных натуральных чисел можно составить из цифр 0, I, 2, 3, 4 при условии, что каждая цифра входит в запись этого числа только один раз?

55. n - натуральное число. Сколько решений в неотрицательных целых числах имеет уравнение $x+y=n$?

56. n - натуральное число. Сколько решений в неотрицательных целых числах имеет система уравнений $x+y=z+t=n$?

57. n – натуральное число. Сколько решений в неотрицательных целых числах имеет уравнение $x+y+z=n$?

Решить уравнения:

58. $C_{x+2}^{4} = 5C_{x}^{x+3}$.

59. $\frac{1}{C_5^x} - \frac{1}{C_6^x} = \frac{7}{10C_7^x}$.

60. $12C_{x+3}^{x-1} = 55A_{x+1}^{2}$.

61. $C_{2x+3}^{2(x-1)} = 4A_{2(x+1)}^{3}$.

62. $(2x+1)! = 72A_{2x-1}^{2}P_{2x-3}$.

63. $P_{x+1} = 56A_{x-1}^{4}P_{x-5}$.

64. $P_{x+5} = 240A_{x+3}^{8}P_{x-5}$.

65. $A_{x+2}^{7}(x-5)! = 42P_x$.

66. $P_{x+2} = 132A_{x+3}^{5}P_{x-5}$.

67. $P_{x+1} = 20P_{x-3}A_{x-1}^{2}$.

68. Докажите, что число различных решений уравнения $x_1+x_2+\dots+x_k=n$ в натуральных числах равно C_{n-1}^{k-1}.

69. Докажите, что число различных решений уравнения $x_1+x_2+\dots+x_k=n$ в неотрицательных целых числах равно C_{k-1+n}^{k-1}.

70. Сколькими способами можно разложить 15 одинаковых шаров по пяти различным урнам так, чтобы оказалось не более двух пустых урн?

71. Сколькими способами можно разложить 20 одинаковых шаров по пяти различным урнам так, чтобы в каждой урне оказалось не менее двух шаров?

72. Сколькими способами можно разложить 20 одинаковых шаров по шести различным урнам так, чтобы в каждой урне оказалось не более пяти шаров?

73. В концерте участвуют три певца и две певицы, каждый участник одним номером. Сколькими способами можно составить программу, если концерт должен начинаться и оканчиваться выступлением певца?

74. Сколько диагоналей в правильном 20-угольнике? Сколько сторон правильного многоугольника с 35 диагоналями?

75. Сколькими способами можно разместить 12 человек по трем комнатам, если в первую можно поместить 2, во вторую – 6, а в третью – человека?

76. Из колоды в 36 карт выбрали 6. Какова вероятность того, что среди этих карт будут три туза?

77. Из колоды в 36 карт выбрали 6. Какова вероятность того, что среди них будут: а) две дамы и две карты бубновой масти; б) три туза три карты червонной масти?

78. Сколькими способами можно раздать трем ребятам: а) 8 апельсинов; б) 8 различных фруктов?

79. На конференции присутствует 52 человека. Надо избрать президиум из пяти человек и делегатов три человека. Сколькими способами можно это сделать, если: а) члены президиума могут входить в состав делегации; б) члены президиума не могут входить в состав делегации?

80. Имеем флаг из трех полос различных цветов. Всего используется 6 цветов. Сколько можно сделать различных флагов, если учитывать расположение полос и одна из полос должна быть красной?

81. Из семи мужчин и четырех женщин нужно послать 6 делегатов, при этом среди делегатов должно быть не менее двух женщин. Сколькими способами можно это сделать?

82. При игре в домино 4 игрока делят поровну 28 костей. Сколькими способами они могут разделить кости?

83. Сколькими способами можно разделить 10 белых грибов, 15 подберезовиков и 8 подосиновиков между четырьмя ребятами?

84. Из колоды в 52 карты вынули 10. Определить вероятность того, что среди них будет: а) ровно один туз; б) хотя бы один туз; в) не менее двух тузов.

85. В скольких числах от 0 до 999 999 нет двух стоящих рядом одинаковых цифр?

86. Два человека выбирают по 4 карты из колоды в 52 карты. Найти вероятность того, что у одного будет 4 туза, а у другого – 4 короля.

87. Сколько можно составить 5-буквенных слов из семи гласных и 25 согласных букв, если гласные и согласные должны чередоваться и ни одна буква не повторяется?

88. Из колоды в 36 карт выбираем 5. Какова вероятность того, что карты: а) будут одной масти и располагаться по порядку; б) будут одной масти?

2. МЕТОД ВКЛЮЧЕНИЯ И ИСКЛЮЧЕНИЯ

Имеем совокупность множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Введем обозначения:

$$\sigma_1 = \sum_i |A_i|$$

$$\sigma_2 = \sum_{i_1 < i_2} |A_{i_1} \cap A_{i_2}|$$

- - - - - - - - - -

$$\sigma_k = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}|$$

$$- - - - - - - - - - - - -$$

$$\sigma_n = |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

Количество элементов в объединении множеств A_i определяется формулой в к л ю ч е н и я и и с к л ю ч е н и я

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3 - \ldots + (-1)^{n+1}\sigma_n. \qquad (1)$$

Б е с п о р я д к о м называется такая перестановка из n элементов, при которой ни один элемент не остается в первоначальном положении.

Число D_n таких перестановок определяется по формуле (число беспорядков):

$$D_n = n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]. \qquad (2)$$

Пример I. В научно-исследовательском институте работают 67 человек. Из них 47 знают английский язык, 35 - немецкий и 23 - оба языка, 20 - французский, I2 - английский и французский, II - немецкий и французский, а 5 - все три языка. Сколько человек в институте не знают ни английского, ни немецкого, ни французского языка?

Решение. Для решения воспользуемся формулой включения и исключения. В данной задаче A_1 - множество сотрудников, знающих английский язык, A_2 - знающих немецкий язык и A_3 - французский язык.

$$\sigma_1 = |A_1| + |A_2| + |A_3| = 47 + 35 + 20 = 102,$$

$$\sigma_2 = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| = 23 + 12 + 11 = 46,$$

$$\sigma_3 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 5.$$

По формуле (I) число сотрудников, знающих хотя бы один из трех языков равно I02-46+5 = 6I, а не знает ни одного из этих языков 67-6I = 6 сотрудников.

Пример 2. Сколько существует целых чисел от 0 до 999, которые не делятся ни на 5, ни на 7?

Решение. Количество чисел от 0 до 999, делящихся на 5, равно $\left[\frac{1000}{5}\right]$, где $[x]$ - целая часть x. Точно так же на 7 делится $\left[\frac{1000}{7}\right]$

чисел и на 5 и 7 одновременно (т.е. на 35) $\left[\frac{1000}{35}\right]$ чисел. По формуле включений и исключений получим, что

$$N = 1000 - \left[\frac{1000}{5}\right] - \left[\frac{1000}{7}\right] + \left[\frac{1000}{35}\right] = 686$$

чисел не делится ни на 5, ни на 7.

Пример 3. Сколькими способами можно посадить рядом трех англичан, трех французов и трех турок так, чтобы никакие три соотечественника не сидели рядом?

Решение. 9 человек можно пересаживать 9! способами. Найдем, во скольких перестановках три англичанина сидят рядом. Все такие перестановки получаются из одной пересаживанием между собой англичан (3! способа) и пересаживанием шести французов и турок и компании из трех англичан (7! способов). Всего получаем 3! 7! перестановок. Во стольких же перестановках сидят рядом три француза и во стольких же – три турка. Далее, в $(3!)^2 \cdot 5!$ перестановках рядом сидят и англичане и французы, а в $(3!)^4$ перестановках и англичане, и французы, и турки. По формуле включений и исключений получаем ответ

$$9! - 3 \cdot 3!\,7! + 3(3!)^2 5! - (3!)^4 = 283824.$$

Пример 4. Клетки шахматной доски окрашиваются в 8 цветов так, что в каждом горизонтальном ряду встречаются все 8 цветов, а в каждом вертикальном не встречаются подряд две клетки, окрашенные в тот же самый цвет. Сколькими способами возможна такая окраска?

Решение. Первый горизонтальный ряд может быть окрашен 8! способами. Число способов окраски каждого последующего горизонтального ряда определяется как число беспорядков в перестановках из 8 элементов, так как в вертикальном ряду нет двух подряд идущих одинаково окрашенных клеток. Таким образом, по формуле для числа беспорядков (2) искомое число определяется так:

$$N = 8!\left[8!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{1}{8!}\right)\right]^7.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. В отделе научно-исследовательского института работают несколько человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. Шестеро знают английский, шестеро – немецкий, семеро – французский. Четверо знают английский и немецкий, трое – немецкий и французский, двое – французский и английский. Один человек знает все три языка.

Сколько человек работают в отделе? Сколько из них знают только английский язык? Только французский?

2. Сколько чисел от 0 до 999 999 не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 7?

3. Сколько чисел от 10^3 до 10^6 делятся на 4, но не делятся ни на 3, ни на 5?

4. Сколько пятизначных чисел не содержит трех рядом стоящих цифр 3?

5. Сколько чисел от 1 до 10^5 делятся на 5, но не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 7?

6. В одном ящике лежат 6 левых перчаток, в другом - 6 правых; все пары разных цветов; 6 человек случайно берут по паре. Найти вероятность того, что хотя бы у одного будет пара одноцветных перчаток.

7. Два экзаменатора, работая одновременно, экзаменуют класс в 12 человек по двум предметам. Каждый экзаменуемый отвечает по 5 минут по каждому предмету. Сколькими способами могут экзаменаторы распределить между собой работу так, чтобы ни одному сдающему не пришлось отвечать сразу по двум предметам?

8. Сколько шестизначных чисел содержит ровно три различные цифры, если в этих числах не встречается цифра 0?

9. Сколько неотрицательных целых чисел, меньших, чем миллион, содержит все цифры: 1, 2, 3, 4? Сколько чисел состоит только из этих цифр?

10. Найти сумму всех трехзначных чисел, которые можно написать цифрами 1, 2, 3, 4.

11. Сколько имеется шестизначных чисел, у которых три цифры четные, а три - нечетные?

12. У меня 7 друзей. Я хочу их приглашать к себе обедать по трое в течение семи дней так, чтобы никого не оставить не приглашенным. Доказать, что число способов приглашения вычисляется по формуле

$$A_{35}^{7} - 7A_{20}^{7} + 21A_{10}^{7}$$

13. Переплетчик должен переплести 12 различных книг в красный, зеленый и коричневый переплеты. Сколькими способами он может это сделать, если в каждый цвет должна быть переплетена хотя бы одна книга?

14. Сколькими способами можно переставить буквы в слове "тик-так" так, чтобы одинаковые буквы не шли друг за другом? То же самое для слова "тартар".

15. Найти число перестановок элементов n -множества, оставляющих на месте ровно $r\ (0 \le r \le n)$ элементов.

16. Сколько чисел в пределах от 1 000 до 10 000 не содержат двух рядом стоящих цифр 5?

I7. Из I25 шестигранных кубиков 55 имеют красные грани, 63 – синие, 75 – зеленые. Другие I0 кубиков имеют красные и синие грани, 54 – синие и зеленые, 22 – красные и зеленые. Сколько кубиков имеют грани всех трех цветов?

I8. Экзамен состоит из десяти вопросов. Три из них – по математике. Сколькими способами можно поставить десять вопросов так, чтобы никакие два по математике не следовали друг за другом?

I9. По пустыне идет караван из девяти верблюдов. Сколькими способами можно переставить верблюдов так, чтобы впереди каждого верблюда шел другой, нежели раньше?

20. Чему равно количество перестановок из n чисел I, 2, 3,..., n, не содержащих ни одной из пар (I,2), (2,3),..., ($n-1$, n)?

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

К разделу "Выборки"

I. I42 506. 2. 554 268. 3. $n = 5$.

4. $x = 1,2,3,4,5$. 5. $x = 6$; $y = 3$. 6. $(n-1)!$

7. $2(5!)^2$. 8. $(n-1)!(n-2)$. 9. $2(n-k-1)(n-2)!$

I0. 32. II. $x = 5$. I2. $n = \pm 3$. I3. $n = 0,1,2,3$,

I4. 30240. I5. $x = 7$. I6. I20. I7. 30240. I8. $n = 10$. I9. $\frac{m}{n}$.

2I. I) $n = 8$. 2) $n = 5$; $n = 2$; $n = 28$.

22. $x = 5$; $y = 2$. 23. Поровну. 24. Поровну.

25. Не содержащих подмножество В. 26. Поровну.

27. I) $C_4^3 = 4$; 2) $C_7^3 = 35$; 3) $C_{10}^3 = 120$; 4) $C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

28. Содержащих точку М. 29. I) $C_{12}^2 = 66$; 2) $C_{12}^3 = 220$; 3) $C_{12}^4 = 295$; 4) $C_5^3 + C_5^3 = 20$; 5) $C_{12}^4 - C_7^4 = 460$.

30. $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. 3I. $C_9^4 = 126$. 32. $C_{10}^4 = 210$. 33. $\frac{20!}{(4!)^5}$.

34. $\frac{100!}{(8!)^3(10!)^4(18!)^2}$. 35. 2·30!. 36. $(15!)^2 \cdot 2^{15}$.

37. $6\cdot 8! = 241\ 920$. 38. $12\cdot 8! = 483\ 840$. 39. $\frac{10!}{2}$.

40. $\frac{10!}{3}$ 41. $4\cdot 6\cdot 8! + 2\cdot 5\cdot 8! = 34\cdot 8! = 1\ 370\ 880$.

42. $16\cdot 8! = 645\ 120$. 43. $20\cdot 7! = 100\ 800$.

44. $9\cdot 10^4 - 9A_9^4 = 62784$. 45. $8\cdot 10^4 - 5^5 = 86875$.

46. $5A_9^4 - 4A_8^3 = 13776$. 47. $\frac{5!}{2} = 60$. 48. $\frac{9!}{4!3!2!} = 1260$.

49. $\frac{11!}{3!3!2!} = 554\ 400$. 50. $\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_5!}$. 51. $C_3^1 C_6^2 = C_{60}^{20}$.

52. $C_{30}^5\cdot A_5^2 = 2\ 850\ 120$. 53. $A_4^0 + A_4^1 + A_4^2 + A_4^3 + A_4^4 = 65$. 54. 163.

55. $n+1$. 56. $(n+1)^2$. 57. $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

58. $x_1 = 3$, $x_2 = 14$. 59. $x = 2$. 60. $x = 3$.

61. $x = 10{,}5$. 66. $x = 10$. 67. $x = 4$. 70. $C_{14}^4 + 5C_{14}^3 + C_5^2\cdot C_{14}^2 = 3731$.

71. $C_{14}^4 = 1001$. 72. $C_{15}^5 = 3003$. 73. $N = 36$. 74. $N = 170$, $x = 10$.

75. 13 860. 76. 0,01018. 77. а) $(C_3^2 C_8^2 C_{24}^2 + C_3^1 C_8^1 C_{24}^1)/C_{36}^6$

78. а) 45; б) 3^8. 80. $N = 180$. 81. $N = 371$.

83. $C_{13}^{10} C_{18}^{15} C_n^8$. 84. б) $(C_{52}^{10} - C_{48}^{10})/C_{52}^{10}$. 88. б) $P = 4C_9^5/C_{36}^5$.

К разделу "Метод включения и исключения"

1. Число работающих равно 11. Только английский знают 6 человек, только французский – трое.

4. $N = 89\ 739$. 6. $P = 0{,}14$. 8. $N = 540$.

9. 23 160; 5 460. 10. Сумма равна 17 760.

11. $N = 20\cdot 5^6 - 10\cdot 5^5 = 281\ 250$.

13. Книги будут переплетены в переплеты всех трех цветов в $3^{12} - 3\cdot 2^{12} + 3 = 519\ 156$ случаях.

14. Буквы слова "тик-так" можно переставить 180 способами. Из этих перестановок в 60 рядом стоят две буквы "т", в 60 – две буквы "к" и в 24 – обе буквы. По формуле включения и исключения получаем 180-60-60+24 = 84 допустимых перестановки. Для слова "тартар" имеем 90-30-30-30+12+12+12-6 = 30 допустимых перестановок.

15. Всего имеем $m!$ перестановок. Если на месте остались r элементов, то число перестановок будет $(m-r)!$; r элементов можно выбрать из множества C_m^r способами. Применяя формулу включения и исключения, получаем

$$N(r) = \sum_{k=r}^{m} (-1)^{k-r} C_k^r C_m^k (m-k)! = \frac{m!}{r!} \sum_{s=0}^{m-r} \frac{(-1)^s}{s!}$$

16. $N = 8\,739$. 17. $x = 18$. 18. $N = 10! - 2!\,9!\,C_3^2 + 3!\,8!\,C_3^3$.

19. Пронумеруем верблюдов числами 1...9. Нужно найти все перестановки этих чисел, в которых не встретится ни одна из пар (1,2), (2,3),..., (8,9). Число перестановок, содержащих одну из пар, равно 8! Всего пар 8.

Рассмотрим перестановки, содержащие две пары. Если обе пары содержат один и тот же элемент, например, (1,2) и (2,3), то объединяем все три элемента. В противном случае объединяем элементы по два. В обоих случаях после объединения получится 7 новых элементов, которые можно переставлять 7! способами. Количество перестановок, содержащих K пар, равно $(9 - K)!$ При этом K пар можно выбрать C_8^K способами. По формуле (1) получаем

$$N = 9! - C_8^1\, 8! + C_8^2\, 7! - C_8^3\, 6! + C_8^4\, 5! - C_8^5\, 4! + C_8^6\, 3! - C_8^7\, 2! + C_8^8\, 1! = 148329$$

20. $N = n! - C_{n-1}^1 (n-1)! + C_{n-1}^2 (n-2)! - \ldots - C_{n-1}^3 (n-3)! + \ldots + (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1}\, 1!$

Библиографический список

I. Ежов И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Элементы комбинаторики.-М.:Наука, 1977.

2. Виленкин П.Я. Комбинаторика.-М.:Наука, 1969.

3. Меньшиков М.В., Ревякин А.М., Копылова А.Н., Макаров Ю.Н., Стечкин Б.С. Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения.-М.:Наука, 1982.

4. Сачков В.Н. Комбинаторные методы дискретной математики.-М.:Наука, 1977.

Составитель Валентина Александровна Колдоркина

КОМБИНАТОРИКА
(Задание № I)

Редактор Е.Г.Ф и л и п п о в а
Техн.редактор Н.М.К а л е н ю к
Корректор Е.Г.Ф и л и п п о в а

Подписано в печать 21.01.87. Формат 60х84 I/I6.
Бумага оберточная белая. Печать оперативная.
Усл.п.л. I,2. Уч.-изд.л. I,0. Т.I50 экз.
Заказ 1051 Бесплатно.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени авиационный институт имени академика С.П.Королева, г.Куйбышев, ул.Молодогвардейская, I5I.

Куйбышевское полиграфическое объединение, г. Куйбышев, ул. Венцека, 60