МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве методических указаний для студентов Самарского университета, обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по специальностям 01.05.01 Фундаментальные математика и механика, 10.05.01 Компьютерная безопасность

Составители: *Е.В. Бородачева,*
Р.Ф. Узбеков

С А М А Р А
Издательство Самарского университета
2019

УДК 519.2(075)
ББК 22.161я7

Составители: ***Е.В. Бородачева, Р.Ф. Узбеков***

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доц. М.Е. Ф е д и н а

Введение в математический анализ: метод. указания / сост.: *Е.В. Бородачева, Р.Ф. Узбеков*. – Самара: Изд-во Самарского университета, 2019. – 52 с.

Методические указания состоят из теоретических сведений и практических заданий по курсу «Введение в математический анализ». На занятиях по данной дисциплине студенты знакомятся с некоторыми из основных понятий, которые используются в разделах математического анализа. Каждый параграф соответствует примерно одному-двум занятиям. Для типичных и трудных задач приводятся схемы решений или указания к решениям.

Методические указания предназначены для студентов 1 курса специальностей 01.05.01 Фундаментальные математика и механика, 10.05.01 Компьютерная безопасность.

Подготовлены на кафедрах «Функциональный анализ и теория функции», «Уравнения математической физики».

УДК 519.2(075)
ББК 22.161я7

Тема 1. Элементы теории множеств

Пусть дано некоторое семейство множеств A_β, где $\beta \in B$, B – некоторое множество.

Определение. Объединением множеств семейства A_β $(\beta \in B)$ называют множество, каждый элемент которого принадлежит хотя бы одному множеству этого семейства и пишут $\bigcup\limits_{\beta \in B} A_\beta$.

В частности, объединением двух множеств A и B называют множество, каждый элемент которого принадлежит хотя бы одному из множеств A и B и пишут $A \cup B$.

Определение. Пересечением множеств семейства A_β $(\beta \in B)$ называют множество, каждый элемент которого принадлежит всем множествам этого семейства и пишут $\bigcap\limits_{\beta \in B} A_\beta$.

В частности, пересечением двух множеств A и B называют множество, каждый элемент которого принадлежит и множеству A и множеству B и пишут $A \cap B$.

Определение. Разностью множеств A и B называют множество, каждый элемент которого принадлежит множеству A, но не принадлежит множеству B и пишут $A \backslash B$.

Определение. Если множество $A \subset B$, то разность множеств B и A называют дополнением к множеству A во множестве B и пишут $C_B A$.

Дополнение к множеству A в универсальном множестве принято обозначать CA.

Определение. Декартовым произведением множества A на множество B называют множество всевозможных пар $(a; b)$, в которых $a \in A$, а $b \in B$, пишут при этом $A \times B$.

Определение. Симметрической разностью множеств A и B называют множество, каждый элемент которого принадлежит либо разности множеств $A\backslash B$, либо $B\backslash A$ и пишут $A\Delta B$. Имеет место равенство $A\Delta B = (A\backslash B)\cup(B\backslash A)$.

Алгоритм доказательства равенства двух множеств

1. Показываем, что множество из левой части доказываемого равенства вложено во множество из правой части доказываемого равенства.

2. Показываем, что множество из правой части доказываемого равенства вложено во множество из левой части доказываемого равенства.

3. Делаем вывод о том, что множества из левой и правой частей доказываемого равенства совпадают.

Пример 1. Для произвольных множеств A и B доказать равенство

$$A\Delta B = (A \cap CB) \cup (B \cap CA);$$

здесь CA и CB – дополнение соответственно множеств A и B в универсальном множестве.

Р е ш е н и е

Покажем сначала, что левая часть доказываемого равенства вложена в правую часть, то есть покажем выполнение вложения

$$A\Delta B \subset (A \cap CB) \cup (B \cap CA).$$

Возьмем произвольный элемент x из левой части доказываемого равенства, то есть $x \in A\Delta B$. В силу определения симметрической разности, это значит, что
$x \in (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$. Далее возможны случаи:

а) $x \in A\backslash B \;\Rightarrow\; x \in A,\ x \notin\ B \;\Rightarrow\; x \in A, x \in CB \;\Rightarrow$
$\Rightarrow\; x \in A \cap CB \;\Rightarrow\; x \in (A \cap CB) \cup (B \cap CA)$, то есть x принадлежит правой части доказываемого равенства;

b) $x \in B \setminus A \ \Rightarrow \ x \in B, \ x \notin \ A \ \Rightarrow \ x \in B, x \in CA \ \Rightarrow$ $\Rightarrow \ x \in B \cap CA \ \Rightarrow \ x \in (A \cap CB) \cup (B \cap CA)$, то есть x принадлежит правой части доказываемого равенства.

Следовательно, левая часть доказываемого равенства вложена в правую часть доказываемого равенства.

Теперь покажем, что правая часть доказываемого равенства вложена в левую часть, то есть покажем выполнение вложения

$$(A \cap CB) \cup (B \cap CA) \subset A \Delta B.$$

Возьмем произвольный элемент x из правой части доказываемого равенства, то есть $x \in (A \cap CB) \cup (B \cap CA)$. В силу определения операции объединения двух множеств возможны следующие случаи:

a) $x \in A \cap CB \ \Rightarrow \ x \in A, \ x \in \ CB \ \Rightarrow \ x \in A, x \notin B \ \Rightarrow$ $\Rightarrow \ x \in A \setminus B \ \Rightarrow \ x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, то есть x принадлежит левой части доказываемого равенства;

b) $x \in B \cap A \ \Rightarrow \ x \in B, \ x \in \ CA \ \Rightarrow \ x \in B, x \notin A \ \Rightarrow$ $\Rightarrow \ x \in B \setminus A \ \Rightarrow \ x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, то есть x принадлежит левой части доказываемого равенства.

Следовательно, правая часть доказываемого равенства вложена в левую часть доказываемого равенства.

Таким образом, равенство доказано.

Пример 2. Доказать, что для любых множеств A, B, D справедливо равенство

$$(A \cap B) \times D = (A \times D) \cap (B \times D).$$

Р е ш е н и е

Покажем сначала, что левая часть доказываемого равенства вложена в правую часть , то есть докажем выполнение вложения:

$$(A \cap B) \times D \subset (A \times D) \cap (B \times D).$$

Возьмем произвольный элемент x, принадлежащий левой части доказываемого равенства: $x \in (A \cap B) \times D$. В силу определения декартова произведения двух множеств, это значит, что этот элемент x представим в виде пары (α, β), то есть $x = (\alpha, \beta) \ : \ \alpha \in A \cap B; \ \beta \in D \ \Rightarrow \ \alpha \in A, \alpha \in B$, $\beta \in D \ \Rightarrow \ (\alpha, \beta) \in A \times D, \ (\alpha, \beta) \in B \times D \ \Rightarrow \ x = (\alpha, \beta) \in (A \times D) \cap (B \times D)$, то есть элемент x принадлежит правой части доказываемого равенства.

Следовательно, левая часть доказываемого равенства вложена в правую часть.

Покажем теперь, что правая часть доказываемого равенства вложена в левую часть, то есть покажем выполнение вложения:

$$(A \times D) \cap (B \times D) \subset (A \cap B) \times D.$$

Возьмем произвольный элемент x, принадлежащий правой части доказываемого равенства: $x \in (A \times D) \cap (B \times D)$. В силу определения операции пересечения двух множеств, это значит, что $x \in A \times D, \ x \in B \times D \ \Rightarrow \ x = (\alpha, \beta) \ :$ $\alpha \in A, \ \alpha \in B, \ \beta \in D \ \Rightarrow \ \alpha \in A \cap B, \ \beta \in D \ \Rightarrow \ x = (\alpha, \beta) \in (A \cap B) \times D$, то есть элемент x принадлежит левой части доказываемого равенства.

Следовательно, правая часть доказываемого равенства вложена в левую часть.

Таким образом, равенство доказано.

Задачи

1. Доказать, что для любых множеств A, B, C справедливы равенства:

a) $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$;

b) $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$;

c) $(A \backslash C)(B \backslash C) = (A \backslash B) \backslash C$;

d) $(A\backslash B)\cup(B\backslash C)\cup(C\backslash A)\cup(A\cap B\cap C)=A\cup B\cup C$;

e) $A\Delta B=(A\cup B)\backslash(A\cap B)$;

f) $A\Delta B=(A\cap CB)\cup(B\cap CA)$; здесь CB, CA – дополнения множеств B и A соответственно в универсальном множестве;

g) $A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$;

k) $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$;

l) $C(A\backslash B)=CA\cup B$; здесь $C(A\backslash B), CA$ – дополнения соответственно множеств $A\backslash B$ и A в универсальном множестве;

m) $C[C(CA\cup B)\cup(A\cup CB)]=B\backslash A$;

n) $(A\cap B)\cup(A\cap CB)\cup(CA\cap B)=A\cup B$;

o) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$;

p) $(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$;

s) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$;

t) $(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$.

2. Справедливы ли для любых множеств A, B, C, D равенства:

a) $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$;

b) $(A\times B)\cup(C\times D)=(A\cup C)\times(B\cup D)$?

Тема 2. Метод математической индукции

Для доказательства многих утверждений в математике часто используют метод полной математической индукции, который состоит из трех частей.

Часть первая называется базой индукции и состоит в проверке истинности данного утверждения для начального значения n (например, для $n=1$, если требуется доказать истинность данного утверждения для всех натуральных n.)

Вторая часть называется предположением индукции и состоит в предположении справедливости данного утверждения для $n=k$.

Третья часть состоит в доказательстве истинности данного утверждения для $n = k + 1$.

Рассмотрим примеры задач, при решении которых применяется метод математической индукции.

Пример 1. Доказать методом математической индукции равенство

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}.$$

Р е ш е н и е

Проверим сначала истинность доказываемого утверждения для $n = 1$:

$$\frac{1}{1\cdot 4}=\frac{1}{4} \text{ – верно.}$$

Предположим теперь, что доказываемое утверждение справедливо для $n = k$, то есть выполняется равенство

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{k}{3k+1}.$$

Покажем далее, что доказываемое утвержение справедливо для $n = k + 1$, то есть покажем выполение равенства

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}=\frac{k+1}{3k+4}.$$

Имеем

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}=$$

$$=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}=\frac{k}{3k+1}+$$

$$+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}=\frac{k+1}{3k+4}.$$

Утверждение доказано.

Пример 2. Доказать методом математической индукции выполнение для всех допустимых значений x равенства

$$cos\frac{x}{2}\cdot cos\frac{x}{4}\cdot\ldots\cdot cos\frac{x}{2^n}=\frac{sinx}{2^n\cdot sin\frac{x}{2^n}}.$$

Р е ш е н и е

Отметим сначала, что $x\neq 2^n\pi n$, где n – целое. Проверим сначала истинность утверждения для $n=1$:

$$cos\frac{x}{2}=\frac{sinx}{2sin\frac{x}{2}}=\frac{2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}{2sin\frac{x}{2}}=cos\frac{x}{2}\text{ – верно.}$$

Предположим теперь, что утверждение справедливо для $n=k$, то есть предположим, что

$$cos\frac{x}{2}\cdot cos\frac{x}{4}\cdot\ldots\cdot cos\frac{x}{2^k}=\frac{sinx}{2^k\cdot sin\frac{x}{2^k}}.$$

И покажем, что доказываемое утверждение справедливо для $n=k+1$, то есть покажем, что

$$cos\frac{x}{2}\cdot cos\frac{x}{4}\cdot\ldots\cdot cos\frac{x}{2^{k+1}}=\frac{sinx}{2^{k+1}\cdot sin\frac{x}{2^{k+1}}}.$$

Имеем

$$cos\frac{x}{2}\cdot cos\frac{x}{4}\cdot\ldots\cdot cos\frac{x}{2^{k+1}}=cos\frac{x}{2}\cdot cos\frac{x}{4}\cdot\ldots\cdot cos\frac{x}{2^k}\cdot cos\frac{x}{2^{k+1}}=$$

$$=\frac{sinx}{2^k sin\frac{x}{2^k}}\cdot cos\frac{x}{2^{k+1}}=$$

$$=\frac{sinx\cdot cos\frac{x}{2^{k+1}}}{2^{k+1}sin\frac{x}{2^{k+1}}cos\frac{x}{2^{k+1}}}=\frac{sinx}{2^{k+1}sin\frac{x}{2^{k+1}}}.$$

Утверждение доказано.

Пример 3. Доказать методом математической индукции, что для всех натуральных $n \geq 2$ выполняется неравенство

$$4^n > 7n - 5.$$

Р е ш е н и е

Проверим сначала истинность утверждения для $n = 2$:

$$16 > 14 - 5 = 9 \text{ – верно.}$$

Предположим теперь, что утверждение справедливо для $n = k$, то есть предположим, что

$$4^k > 7k - 5.$$

И покажем, что доказываемое утверждение справедливо для $n = k + 1$, то есть , что

$$4^{k+1} > 7k + 2.$$

Имеем

$$4^{k+1} = 4^k \cdot 4 > (7k-5) \cdot 4 = 28k-20 = (7k+2)+(28k-20-7k-2) =$$

$$= (7k + 2) + (22k - 22) > 7k + 2,$$

так как для любого $k > 2$ выполняется неравенство

$$22k - 22 > 0.$$

Утверждение доказано.

Пример 4. Доказать методом математической индукции выполнение для всех натуральных n неравенства

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Р е ш е н и е

Проверим сначала истинность утверждения для $n = 1$:

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ – верно.}$$

Предположим теперь, что утверждение справедливо для $n = k$, то есть предположим, что $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$. И покажем, что доказываемое утверждение справедливо для $n = k + 1$, то есть покажем, что

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}}.$$

Имеем

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2k+1}{2k+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2} < \frac{\sqrt{2k+1}}{\sqrt{(2k+1)(2k+3)}} = \frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

так как $(2k + 2)^2 = 4k^2 + 8k + 4 > 4k^2 + 8k + 3 = (2k + + 1)(2k + 3)$, а это и означает, что

$$2k + 2 > \sqrt{(2k+1)(2k+3)}.$$

Утверждение доказано.

Пример 5. Доказать методом математической индукции выполнение для всех натуральных $n \geq 2$ неравенства

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdot + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

Р е ш е н и е

Проверим сначала истинность утверждения для $n = 2:$

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2} \text{ – верно.}$$

Предположим теперь, что утверждение справедливо для $n = k$, то есть предположим, что

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k}.$$

И покажем, что доказываемое утверждение справедливо для $n = k + 1$, то есть покажем, что

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}.$$

Имеем

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k+1}} = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} >$$

$$> \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k(k+1)}+1}{\sqrt{k+1}} > \frac{k+1}{\sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1},$$

так как $\sqrt{k(k+1)} = \sqrt{k^2+k} > k.$

Утверждение доказано.

Пример 6. Доказать методом математической индукции, что выражение $2n^3 + 3n^2 + 7n$ кратно 6 для любого натурального n.

Р е ш е н и е

Проверим сначала истинность утверждения для $n = 1:$

$$2 + 3 + 7 = 12 \vdots 6 \text{ – верно.}$$

Предположим теперь, что утверждение справедливо для $n = k$, то есть предположим, что $2k^3 + 3k^2 + 7k$ кратно 6.

И покажем, что доказываемое утверждение справедливо для $n = k+1$, то есть покажем, что $2(k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 7(k+1)$ кратно 6.

Имеем

$$2(k+1)^3+3(k+1)^2+7(k+1) = 2k^3+6k^2+6k+2+3k^2+6k+3+$$

$$+7k+7 = (2k^3+3k^2+7k)+6(k^2+2k+2).$$

Первое слагаемое получившегося выражения кратно 6 по предположению индукции. Второе слагаемое кратно 6, так как оно представлено в виде произведения 6 и некоторого выражения.

Следовательно, $2(k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 7(k+1)$ кратно 6.

Утверждение доказано.

Задачи

1. Доказать методом математической индукции, что при любом натуральном n справедливы следующие утверждения:

a) $n^3 + 11n$ кратно 6;
b) $6^{2n} - 1$ кратно 7;
c) $13^n + 5$ кратно 6;
d) $7^{n+2} + 8^{2n+1}$ кратно 57;
e) $9 \cdot 3^{3n+1} - 8^{n+1}$ кратно 19;
f) $3^{2n} - 8n - 1$ кратно 16;
g) $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ кратно 133;
k) $n(2n^2 - 3n + 1)$ кратно 6;
l) $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ кратно 11.

2. Доказать методом математической индукции, что при каждом натуральном n выполняются равенства:

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

b) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

c) $1\cdot4+2\cdot7+3\cdot10+\ldots+n\cdot(3n+1)=n(n+1)^2$;

d) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n\cdot(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

e) $1\cdot2^2+2\cdot3^2+\ldots+(n-1)n^2=\frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$;

f) $2+16+56+\ldots+(3n-2)2^n=10+(3n-5)2^{n+1}$;

g) $5+45+325+\ldots+(4n+1)5^{n-1}=n\cdot5^n$;

k) $\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6}+\frac{1}{6\cdot7}+\ldots+\frac{1}{(n+3)(n+4)}=\frac{n}{4(n+4)}$;

l) $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$;

m) $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$;

n) $\frac{1}{2}+\frac{4}{2^2}+\frac{7}{2^3}+\ldots+\frac{3n-2}{2^n}=4-\frac{3n+4}{2^n}$;

o) $\frac{1}{2}tg\frac{x}{2}+\frac{1}{4}tg\frac{x}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}tg\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2^n}ctg\frac{x}{2^n}-ctgx$ для всех допустимых значений x;

p) $sinx+sin2x+\ldots+sinnx=\frac{sin\frac{nx}{2}sin\frac{(n+1)x}{2}}{sin\frac{x}{2}}$ для всех допустимых значений x;

s) $(a+b)^n=\sum\limits_{i=0}^{n}C_n^ia^{n-i}b^i$, где $C_n^i=\frac{n!}{i!(n-i)!}$;

t) $(f(x)\cdot g(x))^{(n)}=\sum\limits_{i=0}^{n}C_n^if^{(n-i)}(x)\cdot g^{(i)}(x)$ для бесконечно дифференцируемых на промежутке $\langle a;b\rangle$ функций $f(x)$ и $g(x)$.

3. Доказать методом математической индукции, что при указанных n справедливы неравенства:

a) $2^n>2n+1,\ n\geq3$;

b) $2^n>5n+1,\ n\geq5$;

c) $(1+x_1)(1+x_2)\cdot\ldots\cdot(1+x_n)\geq1+x_1+\ldots+x_n\ \forall\ n\in\mathbb{N}$, где $x_1,\ldots,x_n$ – числа одного знака, $x_i>-1\ \forall\ i=\overline{1,n}$;

d) $(2n)!<2^{2n}\cdot(n!)^2\ \forall\ n\in\mathbb{N}$;

f) если $0\leq x_p\leq\pi\ \forall\ p=\overline{1,+\infty}$, то $|sin(\sum\limits_{p=1}^{n}x_p)|\leq\sum\limits_{p=1}^{n}x_p$.

Тема 3. Прогрессии. Суммирование

Арифметическая прогрессия. Основные формулы

Определение. Арифметическая прогрессия – это числовая последовательность $\{a_n\}$ такая, что для любого натурального n имеет место равенство

$$a_{n+1} = a_n + d,$$

где a_1, d – заданные числа. Данное число a_1 называется первым членом арифметической прогрессии, а данное число d называется разностью арифметической прогрессии, при этом справедливы следующие равенства:

$$a_n = a_1 + d(n-1);$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n;$$

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2},\ k = \overline{2, n-1};$$

$$a_k + a_m = a_n + a_p, \text{ где } \quad k + m = n + p.$$

Геометрическая прогрессия. Основные формулы

Определение. Геометрическая прогрессия – это числовая последовательность $\{b_n\}$ такая, что для любого натурального n имеет место равенство

$$b_{n+1} = b_n \cdot q,$$

где b_1, q – заданные числа. Данное число $b_1 \neq 0$ называется первым членом геометрической прогрессии, а данное число $q \neq 0$ называется знаменателем геометрической прогрессии, при этом справедливы следующие равенства:

$$b_n = b_1\ q^{(n-1)};$$

$$S_n = \frac{b_1\,(1-q^n)}{1-q}, \qquad q \neq 1;$$

$$S_n = nb_1, \qquad q = 1;$$

$${b_k}^2 = b_{k-1}\,b_{k+1}, \qquad k = \overline{2, n-1};$$

$$b_k b_m = b_n b_p, \qquad \text{где} \quad k+m = n+p.$$

Пример 1. Вычислите сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$.

Р е ш е н и е

Используя метод неопределенных коэффициентов, разложим дробь $\frac{1}{(k+2)k}$ на простейшие дроби.

В результате получим

$$\frac{1}{(k+2)k} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+2)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}).$$

Поэтому исходная сумма примет вид

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n+2}).$$

Пример 2. Вычислите сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} coskx$.

Р е ш е н и е

Для нахождения значения этой суммы нам понадобится формула

$$sin\alpha \cdot cos\beta = \frac{1}{2}(sin(\alpha+\beta) + sin(\alpha-\beta)).$$

Пусть $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} coskx$, умножим обе части нашего равенства на $2sin\frac{x}{2}$ и получим

$$2sin\frac{x}{2}S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} 2sin\frac{x}{2}coskx.$$

Так как

$$2sin\frac{x}{2}S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} sin(\frac{1}{2}+k)x + sin(\frac{1}{2}-k)x$$

или

$$2sin\frac{x}{2}S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} sin(k+\frac{1}{2})x - sin(k-\frac{1}{2})x,$$

то в результате имеем

$$2sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n} coskx = sin(n+\frac{1}{2})x - sin\frac{x}{2}.$$

Откуда

$$S_n = \frac{sin(n+\frac{1}{2})x - sin\frac{x}{2}}{2sin\frac{x}{2}},\ x \neq 2\pi m,\ m \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, задача решена.

Пример 3. Последовательность $\{x_n\}$ задана формулой $x_n = 10x_{n-1} + 1$. Выразите через $x_1, n:$ 1) x_n; 2) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$.

Р е ш е н и е

Так как

$$x_k = 10x_{k-1} + 1, \text{а } x_{k-1} = 10x_{k-2} + 1,$$

то

$$x_k - x_{k-1} = 10(x_{k-1} - x_{k-2}) = 10^2(x_{k-2} - x_{k-3}) = \ldots =$$
$$= 10^{k-2}(x_2 - x_1).$$

Поэтому

$$x_k - x_{k-1} = 10^{k-2}(x_2 - x_1).$$

Положим в последнем равенстве $k = 2, 3, \ldots, n$ и сложим полученные выражения. В результате получим

$$\sum_{k=2}^{n}(x_k - x_{k-1}) = (x_2 - x_1)\sum_{k=2}^{n} 10^{k-2}$$

или

$$x_n - x_1 = (x_2 - x_1)\frac{10^{n-1} - 1}{10 - 1} = (9x_1 + 1)\frac{10^{n-1} - 1}{9}.$$

Откуда

$$x_n = x_1 + (9x_1 + 1)\frac{10^{n-1} - 1}{9}.$$

Теперь найдем выражение для S_n. Имеем:

$$S_n = x_1 + \sum_{k=2}^{n} x_k = x_1 + 10\sum_{k=2}^{n} x_{k-1} + (n - 1),$$

$$S_n = x_1 + 10(S_n - x_n) + n - 1,$$

$$-9S_n = x_1 - 10x_n + n - 1,$$

$$-9S_n = x_1 - 10(x_1 + (9x_1 + 1)\frac{10^{n-1} - 1}{9}) + n - 1.$$

А из последнего равенства легко найти выражение для S_n.

Таким образом, задача решена.

Задачи

1. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 2, а сумма квадратов этих же чисел равна $\frac{14}{9}$. Найдите эти числа.

2. Найдите четыре числа, образующих геометрическую прогрессию, у которой второй член меньше первого на 35, а третий больше четвертого на 560.

3. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии, если известно, что $a_4 - a_2 = -\frac{45}{32}, \quad a_6 - a_4 = -\frac{45}{512}$.

4. В бесконечной геометрической прогрессии с положительными членами и со знаменателем $|q| < 1$ сумма трех первых членов равна 10,5, а сумма прогрессии — 12. Найдите прогрессию.

5. Найдите четыре числа, первые три из которых составляют геометрическую, а последние три — арифметическую прогрессию. Сумма крайних чисел равна 21, а сумма средних — 18.

6. Найдите сумму

$$\left(2+\frac{1}{2}\right)^2+\left(4+\frac{1}{4}\right)^2+\ldots\left(2^n+\frac{1}{2^n}\right)^2.$$

7. Покажите, что для всякой арифметической прогрессии при любом n выполняется равенство $S_{2n} = S_n + \frac{1}{3}S_{3n}$ (S_k– сумма k-первых членов прогрессии).

8. Сумма трех чисел равна $\frac{11}{18}$, а сумма обратных им чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 18. Найдите эти числа.

9. Числа $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что:

a)

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{n}{a_1 a_{n+1}};$$

b)

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}.$$

10. Докажите утверждение: для того, чтобы три числа

$$\frac{1}{b+c} \quad \frac{1}{c+a}, \quad \frac{1}{b+a}$$

составляли арифметическую прогрессию, необходимо и достаточно, чтобы числа a^2, b^2и c^2 также составляли арифметическую прогрессию.

11. Найдите сумму:

a) $1 + 2 * 3 + 3 * 7 + \ldots + n\left(2^n - 1\right);$

b) $1 * 3 + 3 * 9 + 5 * 27 + \ldots + (2n-1) * 3^n;$

c) $1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{111\ldots1}_{n \text{ единиц}};$

d) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \ldots + \frac{2n-1}{2^n};$

e) $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}$.

Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – заданные числа, то выражение $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+\ldots+a_n$ называется их суммой, а k – индексом суммирования. Значение суммы не зависит от того, какой буквой обозначить индекс суммирования. Двойная сумма определяется как выражение $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}$, содержит $m\cdot n$ слагаемых и не зависит от порядка суммирования.

12. Вычислите суммы:

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$;

b) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+2)}$;

c) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)}$;

d) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k)(2k+1)(2k+2)}$;

e) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$.

13. Найдите значение суммы

$$S_n = 1^2+2^2+\ldots+n^2.$$

Указание. Используя тождество $(x+1)^3-x^3 = 3x^2+3x+1$ и полагая в нем последовательно $x=1,2,\ldots,n$, сложите полученные равенства.

14. Вычислите двойную сумму $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$, если:

a)

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j; \end{cases}$$

b) $a_{ij} = j$; $c)$ $a_{ij} = i + j$; $d)$ $a_{ij} = i - j$; $e)$ $a_{ij} = |i - j|$.

15. Докажите равенство, если $\{a_k\}, \{b_k\}$, $k = \overline{1,n}$ – заданные числовые наборы, то

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1} B_k + a_n B_n) \ \ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

где $B_n = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$. Это равенство называется преобразованием Абеля.

16. Вычислите сумму:

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} sinkx$;

b) $\sum\limits_{k=1}^{n} sin(2k-1)x$;

c) $\sum\limits_{k=1}^{n} cos(2k-1)x$;

d) $\sum\limits_{k=1}^{n} sin^2kx$;

e) $\sum\limits_{k=1}^{n} cos^2kx$;

f) $\sum\limits_{k=1}^{n} sin^3kx$;

g) $\sum\limits_{k=1}^{n} sin^4kx$.

17. Докажите, что для любых $a, b \in \mathbb{R}$ справедливы равенства:

a) $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum\limits_{k=0}^{n} b^k a^{n-k}$;

b) $a^{2n+1} - b^{2n+1} = (a+b)\sum\limits_{k=0}^{2n} (-1)^k b^k a^{2n-k}$.

18. Последовательность $\{x_n\}$ задана формулой :

a) $x_n = 2x_{n-1} - 4$;

b) $x_n = ax_{n-1} + b, \ a, b \in \mathbb{R}$;

c) $x_n = 7x_{n-1} - 12x_{n-2}$;

d) $x_n = -4x_{n-1} + 12x_{n-2}$.

Выразите через x_1, n, a, b (для задачи 18c): 1) x_n; 2) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$.

Тема 4. Бином Ньютона

Формулой бинома Ньютона называют следующее выражение:

$$(x+a)^n = x^n + C_n^1 a x^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1} a^{n-1} x + C_n^n a^n; \tag{4.1}$$

здесь C_n^k $(k = \overline{0, n})$ – коэффициенты бинома Ньютона,числа сочетаний из n элементов по k элементам, вычисляемые по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{4.2}$$

Отметим, что формула (4.1) может также быть записана в таком виде:

$$(x+a)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} x + C_n^2 a^{n-2} x^2 + \ldots + C_n^{n-1} a x^{n-1} + C_n^n x^n.$$

Перечислим далее основные свойства бинома Ньютона.

1. В разложении бинома Ньютона содержится на одно слагаемое больше, чем показатель степени бинома.

2. Коэффициент k - го слагаемого в правой части формулы (4.1) равен C_n^{k-1}. При этом, если n – натуральное число, то для любого $k = \overline{0, n}$ коэффициент C_n^k – также число натуральное.

3. Общий член разложения в формуле (4.1) T_{k+1} имеет вид

$$T_{k+1} = C_n^k a^k x^{n-k}. \tag{4.3}$$

4. Сумма биномиальных коэффициентов слагаемых в правой части равенства (4.1), стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов слагаемых в правой части равенства (4.1), стоящих на нечетных местах.

Пример 1. Записать разложение выражения $(\sqrt{x}+1)^6$.

Р е ш е н и е

Согласно формуле (4.1) имеем:

$$(\sqrt{x}+1)^6 = (\sqrt{x})^6+C_6^1(\sqrt{x})^5+C_6^2(\sqrt{x})^4+C_6^3(\sqrt{x})^3+C_6^4(\sqrt{x})^2+$$
$$+C_6^5\sqrt{x}+C_6^6.$$

В силу равенства (4.2) для коэффициентов полученного выражения выполняется:

$$C_6^1 = \frac{6!}{1!(6-1)!} = \frac{6!}{5!} = 6;\ C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2!4!} = 15;$$

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3!3!} = 20; C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{2!4!} = 15;$$

$$C_6^5 = \frac{6!}{5!(6-5)!} = 6;\ C_6^6 = \frac{6!}{6!0!} = 1.$$

Искомое разложение после этого примет вид

$$(\sqrt{x}+1)^6 = x^3 + 6x^2\sqrt{x} + 15x^2 + 20x\sqrt{x} + 15x + 6\sqrt{x} + 1.$$

Пример 2. Найти пятый член разложения $(\sqrt[3]{2}-\sqrt{2^{-1}})^n$, если последний член этого разложения равен $(\frac{1}{3\sqrt[3]{9}})^{log_3 8}$.

Р е ш е н и е

Отметим, что, в силу формулы (4.3), требуется найти член разложения T_5. По условию же дано, что член разложения $T_n = (\frac{1}{3\sqrt[3]{9}})^{log_3 8}$. В силу формулы (4.3),

$$T_{k+1} = C_n^k(\sqrt[3]{2})^k(-\sqrt{2^{-1}})^{n-k};$$

$$T_n = (-\sqrt{2^{-1}})^n = (\frac{1}{3\sqrt[3]{9}})^{log_3 8} > 0 \Rightarrow \; n \text{ – четное.}$$

Следовательно,

$$2^{-\frac{n}{2}} = (3^{-\frac{5}{3}})^{log_3 8} \Leftrightarrow 2^{-\frac{n}{2}} = 2^{-5}.$$

Отсюда $n = 10$. Подставляя найденное n в формулу (4.3) для T_5, находим, что $T_5 = 210$.

Пример 3. Найти сумму всех коэффициентов разложения $(3x + 2y - 3)^{10}$.

Р е ш е н и е

Пусть $(3x + 2y - 3)^{10} = A_1 x^{10} y^0 + A_2 x^9 y + \ldots + A_{11} y^{10} + A_{12}$, $\forall\ x, y$, где $A_1, \ldots, A_{12}$ – коэффициенты искомого разложения. Положим $x = 1,\ y = 1$, тогда $2^{10} = A_1 + A_2 + \ldots + A_{12}$.

Таким образом, сумма всех коэффициентов в разложении данного выражения равна 2^{10}.

Задачи

1. Найти член разложения выражения $(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}} + \sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}})^{21}$, содержащий a, b в одинаковых степенях.

2. Найти наименьшее значение n в разложении $(x + a)^n$, при котором отношение двух соседних коэффициентов разложения равно $5 : 8$.

3. При каких значениях x третий член разложения $\left(\frac{1}{\sqrt[7]{x^2}}+\right.$ $\left.+x^{lg\sqrt{x}}\right)^9$ равен 36000?

4. Найти x, y, z, если известно, что второй, третий и четвертый члены разложения $(x+y)^z$ равны соответственно 240, 720, 1080.

5. В разложении $(x\sqrt[3]{x}-\sqrt{2})^n$ найти член с x^4, если коэффициент третьего члена разложения равен 90.

6. Коэффициенты четвертого и шестого членов разложения $(1+x)^{n+1}$ равны между собой. Найти n.

7. Определить x так, чтобы третий член разложения $(2\sqrt[x]{2^{-1}}+\frac{4}{4-\sqrt[x]{4}})^6$ равнялся 240.

8. Найти сумму коэффициентов разложения $(2a-5b+$ $+1)^6$.

Тема 5. Комплексные числа

Определение. Комплексным числом c называют выражение вида $a+ib$ (a, b – вещественные числа) и пишут

$$c = a + ib; \tag{5.1}$$

здесь символ "i" – так называемая мнимая единица, определяется равенством $i^2 = -1$.

Отметим, что вещественные числа a и b из равенства (5.1) называют соответственно действительной и мнимой частью комплексного числа c и обозначают так:

$$a = Re\ c,\ b = Im\ c.$$

Равенство (5.1) обычно называют алгебраической формой записи комплексного числа c.

Числом, комплексно-сопряжённым к числу $c = a + ib$, называют комплексное число вида $a - ib$, обозначают $\bar{c}$ и пишут

$$\bar{c} = a - ib.$$

Говорят, что комплексные числа $c_1 = a_1 + ib_1$ и $c_2 = a_2 + ib_2$ равны тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2, b_1 = b_2$.

Изложим далее схему решения задач о приведении комплексной величины к алгебраическому виду (5.1).

В случае, когда величина z имеет вид $z = \frac{z_1}{z_2}$ с комплексными числами z_1 и z_2 такими, что z_2 – комплексная постоянная, приведение этой комплексной величины z к алгебраической форме (5.1) состоит в преобразовании и последующей группировке слагаемых, содержащих и не содержащих мнимую единицу i. Следующий пример это показывает.

Пример 1. Привести комплексную величину

$$z = (1 + i)^2 - i^5 + 17i^3$$

к алгебраическому виду (5.1).

Р е ш е н и е

Преобразуем сначала комплексное число z, упростив все степени.

Имеем:

$$z = 1 + 2i + i^2 - (i^2)^2 + 17i^2 \cdot i = 1 + 2i - 1 - i - 17i = -16i.$$

Сравнивая последнее выражение с формулой (5.1), получаем, что $Rez = 0,\ Imz = -16$.

В случае, когда комплексная величина z имеет вид $z = \frac{z_1}{z_2}$ с комплексными z_1 и z_2 такими, что $z_2 \neq 0,\ z_2 \neq 1$, приведение этой комплексной величины к виду (5.1) состоит в преобразовании дроби $\frac{z_1}{z_2}$ и избавлении в преобразованном выражении от мнимой единицы i в знаменателе. Это достигается умножением знаменателя и числителя преобразованной дроби на выражение, комплексно-сопряжённое к выражению из знаменателя. Затем полученное выражение следует преобразовать, группируя слагаемые с мнимой единицей i (мнимая часть исходного выражения) и без нее (действительная часть исходного выражения). Проиллюстрируем это следующим примером.

Пример 2. Привести к виду (5.1) комплексную величину $z = \frac{(1+i)^2}{1-2i}$.

Р е ш е н и е

Имеем:

$$z = \frac{(1+i)^2}{1-2i} = \frac{1+2i+i^2}{1-2i} = \frac{1+2i-1}{1-2i} = \frac{2i}{1-2i}.$$

Избавимся теперь от мнимой единицы i в знаменателе полученной дроби, умножив для этого знаменатель и числитель этой дроби на выражение, комплексно-сопряжённое к знаменателю. Имеем:

$$z = \frac{2i(1+2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{2i-4}{1+4} = \frac{2i-4}{5} = \frac{2}{5}i - \frac{4}{5}.$$

Отсюда $Rez = -\frac{4}{5},\ Imz = \frac{2}{5}$.

Задачи

1. Привести следующие комплексные выражения к алгебраическому виду (5.1):

а) $(4+5i)(3-2i)$;

b) $(0,5-3,2i)(1,5-0,8i)$;

c) $\frac{\sqrt{5}-i}{\sqrt{5}-2i}$;

d) $\frac{\sqrt{3+4i}}{0,4-0,2i}$;

e) $(2-i)^3(2+11i)$;

g) $\frac{2-3i}{1+4i}+i^6$;

h) $\frac{5+2i}{2-5i}-\frac{3-4i}{4+3i}-\frac{1}{i}$.

2. Определите, при каких действительных значениях переменных x и y комплексные числа $z_1 = y^2 - 7y + 9xi$ и $z_2 = -12 + 20i + x^2 i$ равны.

3. Определите, при каких действительных значениях переменных x и y комплексные числа $z_1 = 8x^2 - 20i^9$ и $z_2 = 9x^2 - 4 + 10yi^3$ являются сопряженными.

4. Найдите мнимую и действительную части следующих комплексных выражений:
a) $i^{17}+i^{18}+i^{19}+i^{20}$;
b) $2i(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$;
c) $\frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}$;
d) $\frac{13+12i}{6i-8}+\frac{(1+2i)^2}{2+i}$;
e) $\frac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$.

5. Запишите следующие комплексные числа z в алгебраической форме:
a) $z = \frac{i(cos\frac{5\pi}{3}+isin\frac{5\pi}{3})}{cos\frac{\pi}{6}-isin\frac{\pi}{6}}$;

b) $z = \frac{1}{cos\frac{4\pi}{3} - isin\frac{4\pi}{3}}$;

c) $z = \frac{i}{(1+i)^2}$;

d) $z = \frac{(cos\frac{\pi}{3} - isin\frac{\pi}{3})(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})}{i}$;

e) z=$(\frac{\sqrt{3}i+1}{i-1})^6$;

f) $z = \frac{(1+i)^3}{1-i}$;

g) $z = (sin\frac{6\pi}{5} + i(1 + cos\frac{6\pi}{5}))^5$;

h) $z = (tg2 - i)^4$.

Тема 6. Алгебраические уравнения

Определение 1. Многочленом относительно переменной x называется выражение вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_0,$$

где n – целое положительное число, a_i $(i = \overline{0, n})$ – некоторые числа, называемые коэффициентами многочлена.

Часто в задачах математического анализа требуется найти частное от деления одного многочлена на другой. Это можно сделать либо "делением углом"(этот способ изучается в школьном курсе "Алгебра и начала анализа"), либо методом "неопределенных коэффициентов". Продемонстрируем второй способ на примере.

Пример 1. Найти частное от деления многочлена $P(x) = x^3 + 5x + 6$ на многочлен $Q(x) = x + 1$ методом "неопределенных коэффициентов".

Р е ш е н и е

Так как $P(x)$ имеет степень 3, а $Q(x)$ имеет степень 1, то частное $T(x)$ будем искать в виде $T(x) = ax^2 + bx + c$. Коэффициенты a, b, c неизвестны и, чтобы их найти, запишем равенство:

$$x^3 + 5x + 6 = (x+1)(ax^2 + bx + c).$$

Если многочлены равны, то равны их коэффициенты при одинаковых степенях x. Получаем систему уравнений:

$$a = 1,\ a + b = 0,\ c + b = 5,\ c = 6.$$

Из системы уравнений находим $a = 1,\ b = -1,\ c = 6.$

В итоге

$$x^3 + 5x + 6 = (x+1)(x^2 - x + 6).$$

Определение 2. Уравнение вида $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,\ a_0 \neq 0,\ a_i \in \mathbb{C}\ (a_i \in \mathbb{R}),\ i = \overline{0, n}$ называется алгебраическим уравнением n-й степени.

Пример 2. Разложите данное выражение на элементарные дроби во множестве действительных чисел:

$$\frac{x^3 + 7x + 5}{x^2(x^2+4)}.$$

Р е ш е н и е

Знаменатель дроби имеет простой корень $x = 0$ кратности 2, поэтому искомое разложение имеет вид

$$\frac{x^3 + 7x + 5}{x^2(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4} + \frac{D}{x^2}.$$

Приведем правую часть равенства к общему знаменателю и приравняем числители обеих частей равенства, получим

$$x^3 + 7x + 5 = A(x^2 + 4)x + x^2(Bx + C) + D(x^2 + 4).$$

Далее применим метод "неопределенных коэффициентов". Получаем систему уравнений

$$A + B = 1,\ C + D = 0,\ 4A = 7,\ 4D = 5.$$

Решением этой системы являются числа

$$A = 7/4,\ B = -3/4,\ C = -5/4,\ D = 5/4.$$

Поэтому

$$\frac{x^3 + 7x + 5}{x^2(x^2 + 4)} = \frac{7}{4x} + \frac{5}{4x^2} - \frac{3x + 5}{4(x^2 + 4)}.$$

Заметим, что метод "неопределенных коэффициентов" применим только для правильных рациональных дробей $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x),\ Q(x)$ – многочлены степеней n и m соответственно, $n < m$. В случае же, если $n \geq m$, рациональная дробь называется неправильной и перед разложением ее на простейшие дроби требуется разделить "углом" числитель $P(x)$ на знаменатель $Q(x)$. Тем самым выделить целую часть рациональной функции.

Задачи

1. При каких значениях a, b, c, d равны многочлены $P_1(x) = (ax + b)(x^2 + 5x + 1) + (cx - d)(x - 7)$ и $P_2(x) = 4x^2 - x^3 + 6x + 2$?

2. Существуют ли такие a, b, c, d, для которых справедливо равенство $P_1(x) = P_2^2(x)$ с многочленами $P_1(x)$ и $P_2(x)$ вида

$$P_1(x) = x^4 + ax^3 - bx^2 + 6x + 25, \ P_2(x) = x^2 + cx + d?$$

3. Найдите частное от деления многочлена $P_1(x)$ на многочлен $P_2(x)$ и остаток:
a) $P_1(x) = x^3 + 5x^2 - 7x - 3, \ P_2(x) = x^2 - 8x + 16;$
b) $P_1(x) = x^5 + 4x^4 + 6ix + 1, \ P_2(x) = x + i;$
c) $P_1(x) = x^5 + x^3 - 1, \ P_2(x) = (x - i)^3;$
d) $P_1(x) = x^2 - 1, \ P_2(x) = 2x^4 - 5x^3 + 2x;$
e) $P_1(x) = x^{50} - 1, \ P_2(x) = x^5 + 1.$

4. При каких значениях a и b многочлен $Q(x)$ делится на многочлен $P(x)$ без остатка:
a) $Q(x) = ax^4 + bx^2 + 1, \ P(x) = (x + 1)^2;$
b) $Q(x) = x^6 + bx + a, \ P(x) = x^2 + i;$
c) $Q(x) = x^4 - 1, \ P(x) = x^2 + ax + b?$

5. Разложите данные выражения на элементарные дроби во множестве действительных чисел:

$$a) \ \frac{x^3 + 7x + 5}{x(x^2 + 4)^2}; \ b) \ \frac{x^3 + 7x + 5}{x^3(x^2 + 4)^2}; \ c) \ \frac{6}{x^3 - 1};$$

$$d) \ \frac{5x^2 + 6x - 23}{(x - 2)(x + 1)^2(x - 1)^3}; \ e) \ \frac{3}{x^2 - x^5}; \ f) \ \frac{102x}{x^101 - 1};$$

$$g) \ \frac{1 - 2x}{x(x + 1)^2(x^2 + x + 1)^2}.$$

6. Разложите рациональную дробь на простейшие дроби во множестве комплексных чисел $\mathbb{C}$:

$$a)\ \frac{z}{4z^2-2z+1};\ b)\ \frac{z^4+1}{z^5+z^3};\ c)\ \frac{z}{z^4+1};\ d)\ \frac{10z^2}{z^4-1};$$

$$e)\ \frac{1}{z^n-1},\ n\in\mathbb{N}.$$

Одним из способов решения уравнений высших степеней является способ разложения на множители многочлена, стоящего в левой части уравнения. Этот способ основан на применении теоремы Безу.

Если число a является корнем многочлена $P(x)$, имеющего степень n, то этот многочлен можно представить в виде $P(x) = (x-a)Q(x)$, где $Q(x)$— частное от деления $P(x)$ на $x-a$, многочлен степени $n-1$.

Если уравнение имеет целые коэффициенты, то можно отыскать рациональные корни с помощью следующей теоремы.

Теорема. Пусть несократимая дробь $\frac{p}{q}$ является корнем уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

с целыми коэффициентами. Тогда число p является делителем свободного члена a_n, а q — делителем старшего коэффициента a_0.

Следствие 1. Любой целый корень уравнения с целыми коэффициентами является делителем его свободного члена.

Следствие 2. Если старший коэффициент уравнения с целыми коэффициентами равен единице, то все рациональные корни уравнения, если они существуют, целые числа.

7. Докажите, что число 1 является корнем многочлена тогда и только тогда, когда его сумма коэффициентов

равна нулю.

8. Разложите на множители с целыми коэффициентами:

$a)$ x^3-2x^2-5x+6; $b)$ $2x^3+5x^2+x-2$; $c)$ x^3-2x+1;
$d)$ $x^4+4x^3-25x^2-16x+84$; $e)$ $x^5-2x^4-13x^3+26x^2+ + 36x-72$.

9. Решите уравнения:
$a)$ $x^3-5x+4=0$; $b)$ $x^3-7x-6=0$; $c)$ $8x^3-4x+1=0$;
$d)$ $16x^3-6x+1=0$; $e)$ $2x^4-7x^3-7x^2+3x+1=0$;
$f)$ $x^3-5x^2+3x+1=0$; $g)$ $2x^4-5x^3+5x^2-2=0$.

10. Найдите a и решите уравнение, если известен один из его корней:

$$a)\ 2x^3-(a+4)x^2+2(a-1)x+a=0, \quad x_1=0,5;$$

$$b)\ 6x^3+2(a-9)x^2-3(2a-1)x+a=0, \quad x_1=\frac{1}{3}.$$

11. Решите уравнения:

$$a)\ \frac{4(x+3)}{2x^3+x^2-8x-4}-\frac{5}{2x^2-3x-2}=1;$$

$$b)\ \frac{x^2-5x-6}{2x^3+3x^2-2x-3}=\frac{4x^2-20}{2x^2+x-3}.$$

12. Решите уравнения:

$a)$ $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)=9$; $b)$ $(x^2+3x+2)(x^2+ + 9x+20)=4$;

$$c)\ (x-1)(x-5)^2(x-9)=-39;$$

$$d)\ (x^2-2x)(2x-3)(2x-1)=2,5;$$

$e)$ $x^4-2x^3-x^2-2x+1=0$; $\quad f)$ $x^4-5x^3+4x^2+5x+1=0$.

13. Многочлен $P(x) = 2x^3 + x^2 + ax + b$ при делении на $x+1$ дает остаток 18, а на $x-2$ делится без остатка. Найдите корни многочлена.

14. Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ при делении на $x+1$ и на $x+2$ дает остаток 12. Один из корней многочлена равен 1. Найдите остальные корни многочлена.

Считая, что величины a и b постоянные, решите уравнения (15-18).

15. $\frac{x^2+1}{x-4} - \frac{x^2-1}{x+3} = 23$.
16. $\frac{b}{x-a} + \frac{a}{x-b} = 2$.
17. $\frac{x^2+x-5}{x} + \frac{3x}{x^2+x-5} + 4 = 0$.
18. $x^2 + x + x^{-1} + x^{-2} = 4$

Указание: сделайте замену $x + \frac{1}{x} = t$.

Тема 7. Числовые функции. Образ и прообраз элемента (множества)

Пусть даны X, Y – числовые множества. Если каждому элементу $x \in X$ соответствует $y \in Y$, то говорят, что на множестве X задана функция $f(x)$ такая, что $y = f(x)$, $x \in X$. Пишут при этом

$$f \ : \ X \to Y.$$

Переменная x называется аргументом функции, а $y = f(x)$ значением функции.

Множество X называется областью определения функции и обозначается $D(f)$, а множество Y называется областью значения функции f и обозначается $E(f)$.

Пусть заданы функции $y = f(x)$ и $z = g(y)$, при этом область значений $E(f)$ содержится в области определения функции g. Функция $z = g(f(x)),\ x \in D(f)$ называется сложной или композицией функций f и g и обозначается $z = g \circ f$.

Задачи

1. Найдите область определения $D(f)$ следующих функций:

$$a)\ f(x) = \frac{x^2-4}{3x+2};\ b)\ f(x) = \frac{x^3+1}{3x^2+6x+2};\ c)\ f(x) = \frac{x^2 7x-3}{x^4+5x^2};$$

$$d)\ f(x) = \frac{x^2}{4|x|-6};\ e)\ f(x) = \sqrt[4]{7-2x}; f)\ f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+3}{10x-4}};$$

$$g)\ f(x) = tg\frac{x+2}{x-1};\ h)\ f(x) = lg(log_2(4-x^2));$$

$$i)\ f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-4}} - \sqrt{x-3}; j)\ f(x) = \frac{1}{5^x - 2^{x+1}};$$

$$k)\ f(x) = \frac{1}{1-ctgx};\ l)\ f(x) = arccos\frac{2}{x+1};$$

$$m)\ f(x) = sin\sqrt{x+1} - \sqrt{x}; n)\ f(x) = \frac{1}{[x]-2};$$

$$o)\ f(x) = \frac{lg(x^2-1)}{sin(2x+\pi/2)};\ p)\ f(x) = \sqrt{\frac{x+7}{2x-1}};$$

$$q)\ f(x) = \frac{sin(1/x)}{x^4-1};\ r)\ f(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x+2}}.$$

2. Функция $y = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}$ называется линейной. Найдите линейную функцию и постройте ее график:

a) $y(1)=2,\ y(0)=-7;$ $b)$ $y(7)=5,\ y(-2)=1;$

c) $y(-2)=3,\ y(2)=8;$ $d)$ $y(-1,5)=1,5,\ y(2,5)=-0,5.$

3. Найдите квадратичную функцию $g(x)=ax^2+bx+c$ (если это возможно) и нарисуйте ее график, если:

a) $g(2)=1,\ g(-1)=8,\ g(1/2)=2;$ $b)$ $g(-1)=3,\ g(4)= =-5,\ g(6)=0,5;$

c) $g(3)=1,\ g(-3)=1,\ g(-5)=2;$ $d)$ $g(-6)=7,\ g(-3)= =-8,\ g(2)=7.$

4. Найдите множество значений функции:

a) $f(x)=3x+4,\ x\in[-1;1];$ $b)$ $f(x)=|2x-1|,\ x\in[0;3];$

c) $f(x)=x^2+sgnx,\ x\in(-\infty;+\infty);$ $d)$ $f(x)=-2x^2+ +x+1,\ x\in(-\infty;+\infty);$

e) $f(x)=\frac{x^2+9}{x},\ x\in(-\infty;0);$ $f)$ $f(x)=\sqrt{x^2-1};$ $g)$ $f(x)= =2x+\frac{3}{x}.$

5. Найдите композиции функций $f\circ g,\ g\circ f$, если:

a) $f(x)=x^3,\ g(x)=\sqrt[4]{x};$ $b)$ $f(x)=g(x)=\sqrt{4-x^2};$

$$c)\ f(x)=e^x,\ g(x)=lnx;$$

$$d)\ f(x)=x^7,\ g(x)=10-x;\ e)\ f(x)=lnx^3,\ g(x)=\frac{1}{sinx}.$$

6. Для функций $f(x)=cosx,\ g(x)=lnx,\ h(x)=\frac{1-x}{1+x}$ определите композиции

$$f\circ g\circ h,\ f\circ h\circ g,\ g\circ f\circ h,\ g\circ h\circ f,\ h\circ f\circ g,\ h\circ g\circ f$$

и найдите области определения каждой из полученных функций.

7. Пусть $f(x)\frac{x-1}{2x+3},\ g(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Найдите:
a) $f\circ f$; $b)$ $f\circ f\circ f$; $c)$ $f\circ f\circ\ldots\circ f$ (n – композиций);
d) $g\circ g$; $b)$ $g\circ g\circ g$; $c)$ $g\circ g\circ\ldots\circ g$ (n – композиций).

Определение. Пусть задана функция $f\ :\ X\to Y$ и $E\subset X,\ F\subset Y$. Точка $y=f(x)$ называется образом элемента $x\in X$ при отображении f. Точка x называется прообразом элемента y при отображении f. Далее множество

$$f(E)=\{f(x)=y\mid x\in E\}$$

называется образом множества E при отображении f. Множество

$$f^{-1}(F)=\{x\in X\mid f(x)\in F\}$$

называется прообразом множества F при отображении f.

8. Пусть $f\ :\ (-\infty;+\infty)\to[-2;2]$ и $f(x)=2sinx$. Найдите:

$$a)\ f(0);\ b)\ f(\pi/4);\ c)\ f(\pi/3); d)\ f(\pi/6);\ e)\ f([-\pi/2;\pi/2]);$$
$$f)\ f((-\pi/2;\pi/2)); g)\ f([0;\pi/6]); h)\ f([0;2\pi]); i)\ f^{-1}(0);$$
$$j)\ f^{-1}(1);\ k)\ f^{-1}(\sqrt{2});\ l)\ f^{-1}(\sqrt{3});$$
$$m)\ f^{-1}([-2;2]);\ n)\ f^{-1}((-2;2)); o)\ f^{-1}([0;1]).$$

9. Решите предыдущую задачу (кроме пунктов m и n), если $f:\ (-\infty;+\infty)\to[-3;3],\ f(x)=3cosx$.

10. Пусть $f\ :\ X\to Y$ и $A\subset X,\ B\subset X$. Докажите, что

$$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B).$$

11. Пусть $f\ :\ X\to Y$ и $A\subset Y,\ B\subset Y$. Докажите следующие равенства:

$a)\ f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B);\ b)\ f^{-1}(AB) = f^{-1}(A) f^{-1}(B);$

$$c)\ f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

12. Найдите $f(4), f(b)+f(-b), f(b)-2, f(b-2), f(1/c), 1/f(c)$, если:

а) $f(x) = \frac{2x+5}{x+3};\ b)\ f(x) = (2+x)^5 - (2-x)^5$.

Различают три вида функций $f\ :\ X \to Y$:

1) Инъекция – это функция f, которая удовлетворяет условию: если $x_1 \neq x_2, x_1, x_2 \in X$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$.

2) Сюръекция – это функция f, которая удовлетворяет условию: для любого $y \in Y$ существует $x \in X$ такой, что $y = f(x)$.

3) Биекция – это функция, являющаяся одновременно и инъекцией и сюръекцией.

13. Определите, какая из функций $f\ :\ [-1;1] \to [0;1]$ является инъекцией, сюръекцией или биекцией:

$$a)\ f(x) = cos\frac{\pi x}{2};\ b)\ f(x) = -x^2 + 1;$$

$$c)\ f(x) = |x - 1/2|;\ d)\ f(x) = \frac{x-2}{3};\ e)\ f(x) = \frac{x+1}{3};$$

$$f)\ f(x) = 5^{x-1}.$$

14. Найдите $f(a+2) + f(-a+2)$, если

$$f(x) = x^3 + 5x^2 - 3x - 7.$$

15. Найдите все значения a, при которых функция $y = = ax^2 + (3+a)x + 4a,\ x \in \mathbb{R}$ имеет только положительные значения.

Тема 8. Числовые функции. Четность, ограниченность, монотонность

Определение. Пусть $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Функция $y = f(x)$ называется четной, если $f(-x) = f(x)\ \forall\ x \in \mathbb{R}$. График такой функции симметричен относительно оси ординат. График нечетной функции, для которой выполняется условие $f(-x) = -f(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$, симметричен относительно начала координат.

Задачи

1. Какие из перечисленных ниже функций являются четными, какие являются нечетными, а какие не являются ни четными, ни нечетными:

a) $y = \frac{x}{x^2+1},\ x \in \mathbb{R};\ b)\ y = \frac{1}{1-x^3},\ x \in (-1;1);\ c)\ y = \frac{1}{1-x^2},\ x \in (-1;1);$

d) $y = |x+2|,\ x \in \mathbb{R};\ e)\ y = |5+x|-|5-x|,\ x \in \mathbb{R};\ f)\ y = x - \frac{x^3}{4} + \frac{x^7}{100},\ x \in \mathbb{R};$

g) $y = \frac{2^x+2^{-x}}{3},\ x \in \mathbb{R};\ h)\ y = 3^{x-x^3},\ x \in \mathbb{R};\ i)\ y = ln\frac{1-x}{1+x},\ x \in D(y);$

j) $y = sinx - sin^3x,\ x \in \mathbb{R};\ k)\ y = cos^3x + 8cos^2x,\ x \in \mathbb{R};\ l)\ y = arcsin\frac{x}{1+x},\ x \in D(y).$

2. Пусть $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Докажите, что функция $g(x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2}$ – четная, а функция $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{3}$ – нечетная.

3. Какой функцией будет произведение двух четных функций и частное четной и нечетной функций?

4. Продолжите функцию $y = f(x), \ x \in (0, b)$ на $(-b; 0]$ так, чтобы получившаяся на $[-b; b]$ функция была: a) четной; b) нечетной:

a) $y = x^3, \ x \in (0; +\infty)$; *b*) $y = \sqrt[3]{x}, \ x \in (0; +\infty)$;

c) $y = 2x - 1, \ x \in (0; 2)$; *d*) $y = x^2 - 4x + 3, \ x \in (0; 3)$;

e) $y = \sqrt{4 - x^2}, \ x \in (0; 2)$; *f*) $y = \frac{1}{x(x+2)}, \ x \in (0; +\infty)$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется ограниченной сверху на множестве $M \subseteq \mathbb{R}$, если

$$\exists \ a \in \mathbb{R} \ \forall \ x \in M \mid f(x) \le a.$$

Функция $y = f(x)$ называется ограниченной снизу на множестве $M \subseteq \mathbb{R}$, если

$$\exists \ b \in \mathbb{R} \ \forall \ x \in M \mid f(x) \ge b.$$

Если функция $y = f(x)$ ограничена на множестве $M \subseteq \mathbb{R}$ и сверху, и снизу, то говорят, что функция $y = f(x)$ ограничена на этом множестве M.

5. Покажите, что функция $y = \frac{x^2}{x^4+2}$ ограничена на $(-\infty; + +\infty)$.

6. Докажите, что функция $y = \frac{1}{x^3}, \ x \ne 0$ не ограничена на $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, а функция
$y = \frac{1}{x^2-1}, \ x \ne \pm 1$ не ограничена на $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; + +\infty)$.

Указание. Для доказательства неограниченности функции $y = f(x)$ на множестве $D(y)$ нужно показать выполнение условия

$$\forall \ c > 0 \ \exists \ x_0 \in D(f) \mid |f(x_0)| > c.$$

7. Будет ли функция $y = \frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}},\ x \in (-1;1)$ ограниченной сверху, ограниченной снизу?

8. При каких условиях на параметры a, b, c функция $y = ax^2 + bx + c$ ограничена сверху, не ограничена снизу? Докажите это.

9. Проверьте ограниченность следующих функций:

a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 2,\ x \in [1;3);$ $b)$ $g(x) = \frac{1}{2x-8},\ x \in [-3;3];$

c) $h(x) = \frac{x^2-1}{|x^3-1|},\ x \in \mathbb{R},\ x \neq 1;$ $d)$ $d(x) = \frac{2sinx}{3sinx+4},\ x \in \mathbb{R};$

e) $y = \frac{cosx}{1{,}5-sinx},\ x \in \mathbb{R};$ $f)$ $y = ctgx \cdot sin2x,\ x \in \mathbb{R};$

g) $y = 4sin^2x - 12sinx + 5.$

Определение. Функция $h(x),\ x \in M \subset \mathbb{R}$ называется строго монотонно возрастающей, если

$$\forall\ x_1, x_2 \in M \mid x_1 \leq x_2 \Rightarrow h(x_1) < h(x_2).$$

Если же последнее неравенство в условии поменять на противоположное, то есть $h(x_1) > h(x_2)$, то в этом случае функцию $h(x)$ называют строго монотонно убывающей на множестве M.

10. По графику функции укажите промежутки ее монотонности:

a) $y = |x+1| + |x-1|;$ $b)$ $y = \frac{1}{3}x - 3;$ $c)$ $y = 2x^2 - 6x + 4;$ $d)$ $y = -3x^2 + 6x - 1;$

e) $y = \frac{1-x}{1+x},\ x \neq -1;$ $f)$ $y = 1 - 3^{x-3};$ $g)$ $y = -2sin\frac{x}{3};$ $h)$ $y = 2cos\frac{x-\pi}{3}.$

11. Для квадратичной функции $y = ax^2+bx+c$ укажите промежутки монотонности при $a > 0$ и при $a < 0$.

12. Найдите наибольшие промежутки, на которых функция $g(x) = x^4 - 2x^2 - 4$:

a) возрастает; b) убывает;

13) Будет ли строго монотонная функция на множестве определения биективной? Существуют ли биективные немонотонные функции?

14) Монотонны ли следующие функции:

a) $y = \frac{x}{x+2},\ x \in [-6; -3];$ $b)$ $y = \frac{x^2}{x^4+9},\ x \in \mathbb{R};$

c) $y = -x^2 + 5x - 6,\ x \in [0; 4];$ $d)$ $y = 2sin\frac{x}{3},\ x \in [-\pi/3; 0]$?

Тема 9. Графики элементарных функций

Определение. Функция $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x) = a_0x^n + +a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, $Q(x) = b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m$, $a_i, b_j \in \mathbb{R}$, $i = \overline{0,n}$, $j = \overline{0,m}$, $n, m \in \mathbb{N}$ называется рациональной. Если же $Q(x) \equiv 1$, то y называют целой рациональной функцией.

Среди элементарных функций также различают иррациональные и трансцендентные. Иррациональные функции содержат аргумент под знаком радикала (корня). Рациональные и иррациональные функции объединяют понятием алгебраические функции. Если же элементарная функция не является алгебраической, то ее называют трансцендентной. Они образованы при помощи аргументов, возведенных в иррациональную степень, с использованием логарифмических, показательных, тригонометрических и обратных тригонометрических функций.

Задачи

1. Постройте по точкам графики целых рациональных функций:

a) $y = 3x - b,\ b = 0,\ b = -1,\ b = 1;$

b) $y = ax^2 + c,\ a = 1,\ c = 2;\ a = 1/2,\ c = 1/3;\ a = -1,\ c = -1;$

c) $y = x^2 + nx + 2,\ n = -1,\ n = 0,\ n = 2;$

d) $y = 2x^3 + d,\ d + 2,\ d = 0,\ d = -2.$

2. Постройте графики дробных рациональных функций:

a) $y = \frac{4}{x}$; $b)\ y = \frac{x}{x+1}$; $c)\ y = \frac{x}{(x+1)(x+2)}$; $d)\ y = \frac{1}{1-x^2}$; $e)\ y = \frac{3}{x^2}$; $y = \frac{1}{2+x^2}$.

3. Постройте по точкам графики иррациональных функций:

a) $y = \sqrt{x-1}$; $b)\ y = \sqrt{x^2 - c^2}$ при $c = 2,\ c = -1$; $c)\ y = \sqrt{a^2 - 2x^2}$ при $a = 2,\ a = -4;$

d) $y = 2x^m$ при $m = -1/2,\ m = 3/2.$

4. Постройте по точкам графики трансцендентных функций:

a) $y = a^x - 2$ при $a = 1/4,\ a = 4;$

b) $y = 7 + 2^{ax-1}$ при $a = 1,\ a = -1;$

c) $y = log_{10}(ax) - 1$ при $a = 2,\ a = -2;$

d) $y = nsin2x$ при $n = 1,\ n = -2;$

e) $y = 4sin(c + x)$ при $c = 2,\ c = -2;$

f) $y = 8tg(kx) + 1$ при $k = -1,\ k = 2;$

g) $y = arccos(2x);$

h) $y = arcsin\frac{x}{2} + 1$;
i) $y = arctg(3x) - \frac{\pi}{2}$;
j) $y = arcctg\frac{x}{4} + 2\pi$.

Тема 10. Последовательности

Определение. Функцию $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ называют последовательностью, а ее значение в натуральной точке $f(n)$ – n-м членом последовательности и обозначают $f_n,\ n = 1, 2, \ldots$. Формулу $f_n = f(n)$ называют формулой общего члена последовательности. Для задания последовательности нередко используют рекуррентные формулы, то есть такие, в которых последующий член выражается через предыдущий. Такое задание применяют для определения n-го члена арифметической или геометрической прогрессий. Кроме перечисленнных способов задания последовательности существуют и другие.

Пример 1. Покажите ограниченность последовательности $x_n = \frac{n+7}{3^n},\ n \in \mathbb{N}$.

Р е ш е н и е

Очевидно, что $\forall\ n \in \mathbb{N}$

$$\frac{n+7}{3^n} > 0.$$

По неравенству Бернулли имеем $\forall\ n \in \mathbb{N}$

$$3^n = (1 + 3 - 1)^n \geq n(3 - 1),$$

поэтому

$$\frac{n}{3^n} \leq \frac{1}{3-1}.$$

В итоге

$$0 < \frac{n}{3^n} \leq \frac{1}{2}.$$

Пример 2. Докажите неограниченнность последовательности $x_n = \frac{2-n^4}{n^2-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Р е ш е н и е

Из формулы общего члена имеем:

$$|x_n| = \frac{n^4|\frac{2}{n^4} - 1|}{n^2|1 - \frac{1}{n^2}|} = n^2 \left| \frac{\frac{2}{n^4} - 1}{1 - \frac{1}{n^2}} \right|.$$

Если $n \geq 2$, то $1 - \frac{2}{n^4} > \frac{1}{2}$, а $0 < 1 - \frac{1}{n^2} < 1$ при $n > 1$.

Поэтому

$$|x_n| > n^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{n^2}{2}.$$

Для $\forall\ \varepsilon > 0$ возьмем $n > \sqrt{2\varepsilon}$ (например, $n = [\sqrt{2\varepsilon}] + 1$), тогда $|x_n| > \frac{n^2}{2} > \varepsilon$ и, значит, данная последовательность не ограничена.

Пример 3. Докажите, что начиная с некоторого номера $N \in \mathbb{N}$, последовательность $x_n = \frac{7^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$ монотонна:

Р е ш е н и е

Рассмотрим отношение

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{7^{n+1} n!}{(n+1)! 7^n} = \frac{7}{n+1}.$$

При $n \geq 6$ выполняется неравенство $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1$, поэтому $x_{n+1} \leq x_n\ \forall\ n \geq 6$.

Итак, начиная с $n = 6$, последовательность $\{x_n\}$ не возрастает.

Задачи

1. Укажите номер N такой, что $\forall\ n \geq N$ члены последовательности $\{a_n\}$ удовлетворяют неравенству:

a) $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1},\ n \in \mathbb{N};\ |a_n| < 0,01;$

b) $a_n = \frac{2n-5}{n+2},\ n \in \mathbb{N};\ |a_n - 2| < 0,1;$

c) $a_n = \frac{3^{n+1}-2}{1+3^n},\ n \in \mathbb{N};\ |a_n - 3| < 0,01;$

d) $a_n = \sqrt[n]{2},\ n \in \mathbb{N};\ |a_n - 1| < 0,001.$

2. Какие из чисел x и y являются членами последовательности $\{f_n\}$, если:

a) $f_n = 4 \cdot 2^{5n-1},\ x = 65536,\ y = 124232;$

b) $f_n = \sqrt{n^2 - 2n} - 4n,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ x = \sqrt{8},\ y = 8;$

c) $f_n = 3^n - 3n,\ \ n \in \mathbb{N},\ x = 228,\ y = 248.$

Определение. Последовательность $\{f_n\}$ называется ограниченной снизу, если

$$\exists\ a \in \mathbb{R}\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ |\ f_n \geq a. \tag{10.1}$$

Последовательность $\{f_n\}$ называется ограниченной сверху, если

$$\exists\ b \in \mathbb{R}\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ |\ f_n \leq b. \tag{10.2}$$

Если же для последовательности выполнены одновременно условия (10.1) и (10.2), то ее называют ограниченной.

3. Покажите, что следующие последовательности ограничены:

a) $x_n = \frac{2n+10}{\sqrt{n^2+2}},\ n \in \mathbb{N};$

b) $a_n = \frac{3n^2+5}{8+n^2},\ n \in \mathbb{N};$

c) $c_n = \frac{n+(-1)^n}{3n-1},\ n \in \mathbb{N};$

d) $x_n = \frac{n^2+4n+6}{(2n+1)^2},\ n \in \mathbb{N};$

e) $y_n = \frac{8n^6-1}{(n^4+1)(2-n^2)},\ n \in \mathbb{N}$;

4. Докажите, что следующие последовательности не ограничены:

a) $x_n = n^{sin\frac{\pi}{2}n},\ n \in \mathbb{N}$;
b) $y_n = (-1)^n \cdot n,\ n \in \mathbb{N}$;
c) $z_n = n^3 - 2n,\ n \in \mathbb{N}$;
d) $a_n = 2n + (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}$;
e) $b_n = \frac{20n^3}{100n-1},\ n \in \mathbb{N}$;
f) $c_n = \frac{n-n^4}{(n+2)^3},\ n \in \mathbb{N}$.

5. Докажите, что если $\{a_n\},\ \{b_n\}$ – ограниченные последовательности, то ограничены также

a) $a_n \cdot b_n$; $b)$ $c_1 a_n + c_2 b_n,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$.

Будет ли утверждение верно для последовательности $\frac{a_n}{b_n},\ b_n \neq 0\ \forall\ n \in \mathbb{N}$?

6. Будут ли ограничены следующие последовательности:

a) $x_n = \sqrt{n^2+1} - n$; $b)$ $y_n = \sqrt{n^4+n^3++1} - \sqrt{n^4-n^3+1}$;

c) $a_n = \frac{2^n+5}{3^n-1}$; $d)$ $b_n = \frac{3^n-2^n}{2^n+2}$;

e) $c_n = lg(3n+5) - lg(2n+4)$; $f)$ $g_n = \frac{n+1}{ln(n+1)}$?

Определение. Последовательность $x_n,\ n \in \mathbb{N}$ называется возрастающей (убывающей), начиная с некоторого номера $N \in \mathbb{N}$, если для любого $n \geq N$ выполняется неравенство

$$x_{n+1} > x_n \quad (x_{n+1} < x_n).$$

Если же неравенства нестрогие, то последовательность называют неубывающей (невозрастающей).

Монотонными называют все перечисленные выше последовательности.

7. Докажите, что начиная с некоторого номера $N \in \mathbb{N}$, следующие последовательности монотонны:

a) $x_n = \frac{7n+1}{n+2}, \ n \in \mathbb{N}$;
b) $x_n = \frac{100n}{n^2+16}, \ n \in \mathbb{N}$;
c) $x_n = n^4 - 2n^2, \ n \in \mathbb{N}$;
d) $x_n = \sqrt{5n+2}, \ n \in \mathbb{N}$;
e) $x_n = \sqrt{n^2+n} - n, \ n \in \mathbb{N}$;
f) $x_n = \frac{n-2}{\sqrt{n^2+4}}, \ n \in \mathbb{N}$;
g) $x_n = 3^n - n, \ n \in \mathbb{N}$;
h) $x_n = 2^{n+1} - 3^{n+2}, \ n \in \mathbb{N}$;
k) $x_n = \frac{3^n}{n}, \ n \in \mathbb{N}$;
l) $x_n = lg(n+1) - lgn, \ n \in \mathbb{R}$.

8. Покажите, что перечисленные последовательности не являются монотонными $(n \in \mathbb{N})$:

a) $x_n = (-2)^n;\ b)\ y_n = \frac{1}{n^2} cos\frac{\pi n}{2};\ c)\ a_n = n+(-2)^n;\ d)\ b_n = = cos(n+1);\ e)\ c_n = sin\ n.$

Список литературы

1. Сборник задач по математике для поступающих в втузы. Алгебра: учеб. пособие / под ред. С.М. Сканави. М.: Высшая школа, 1994.528 с.
2. Супрун В.П. Избранные задачи повышенной сложности по математике. Минск: Полымя, 1998. 108 с.
3. Очан Ю.С. Сборник задач и теорем по теории функций действительного переменного. М.: Просвещение, 1965. 230 с.
4. Яремчук Ф.П., Рудченко П.А. Алгебра и элементарные функции. Киев: Наукова думка, 1971. 479 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Методические материалы

Бородачева Елена Валериевна,
Узбеков Роман Фатихович

ВВЕДЕНИЕ
В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Методические указания

Редактор Т.К. К р е т и н и н а
Компьютерная верстка Л.Р. Д м и т р и е н к о

Подписано в печать 4.08.2019. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 3,25.
Тираж 25 экз. Заказ . Арт. – 83(Р1М)/2019

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.