

Министерство образования  
Российской Федерации

Самарский государственный аэрокосмический университет  
имени академика С.П.Королева

Ю.М.Заболотнов

ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИИ

Конспект лекций

Самара 1999

УДК 534.1

Теория колебаний: Конспект лекций  
/ Ю.М.Заболотнов; Самар. гос. аэрокосм.  
ун-т. Самара, 1999. 168 с.  
ISBN 5-7883-0085-1

Пособие включает в себя описание методов исследования колебаний механических систем. Наряду с изложением классических результатов теории колебаний в пособии особое внимание уделяется асимптотическим методам исследования, составляющим мощный инструмент современного анализа колебаний механических систем.

Пособие составлено на основе курса лекций, читаемых автором для студентов специальности "Механика". Однако оно может быть полезно для студентов других инженерных специальностей при изучении колебаний механических систем.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-00477).

Ил.23 Библиогр.: 21 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П.Королева

Рецензенты: С.А.Ишков, Л.В.Кудряков

ISBN 5-7883-0085-1

© © Ю.М.Заболотнов, 1999  
© © Самарский государственный  
аэрокосмический университет, 1999

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	5
1. КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ .....	10
1.1. Свободные колебания системы с одной степенью свободы ..	10
1.2. Исследование движения систем на фазовой плоскости .....	14
1.3. Свободные колебания механических систем с несколькими степенями свободы .....	20
1.4. Нормальные или главные координаты .....	29
1.5. Пример исследования свободных колебаний линейной системы с двумя степенями свободы .....	33
1.6. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы ..	43
1.7. Вынужденные колебания системы с несколькими степенями свободы .....	50
1.8. Пример исследования вынужденных колебаний линейной системы с двумя степенями свободы .....	53
2. АВТОКОЛЕБАНИЯ В МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ .....	58
2.1. Причины возникновения автоколебаний .....	58
2.2. Исследование автоколебаний механических систем методом Пуанкаре .....	61
2.3. Применение метода усреднения при исследовании автоколебаний механических систем .....	68
2.4. Определение и исследование автоколебаний в механической системе с двумя степенями свободы .....	77
2.5. Пример исследования автоколебаний системы с двумя степенями свободы .....	83
3. КОЛЕБАНИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ .....	87
3.1. Качественное исследование нелинейных колебаний системы с одной степенью свободы .....	87

3.2. Классический метод исследования периодических решений Ляпунова-Пуанкаре .....	96
4. ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЗОНАНСОВ В КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ .....	105
4.1. Система с быстрыми фазами. Определение резонансов, возникающих в системе .....	105
4.2. Метод усреднения при исследовании резонансного движения системы .....	116
4.3. Пример исследования параметрических колебаний в системе с двумя степенями свободы .....	121
4.4. Оценка возмущений при прохождении системы через резонанс	127
4.5. Пример оценки возмущений при прохождении через резонанс системы с двумя степенями свободы .....	138
4.6. Исследование устойчивости резонансного движения колебательных систем .....	142
Приложение I. Периодические и почти периодические функции. Ряды Фурье .....	159
Приложение 2. Калибровочные функции и символы порядка .....	162
Приложение 3. Сходящиеся и асимптотические ряды .....	164
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ .....	167

## ВВЕДЕНИЕ

Задача пособия – ознакомить читателя с некоторыми аспектами современной теории колебаний механических систем.

Пособие составлено на основе курса лекций, читаемых автором студентам специальности "Механика" Самарского государственного аэрокосмического университета. Однако оно может быть полезно студентам других механических специальностей, например, для выполнения курсовой работы по теоретической механике, включающей в себя изучение колебаний систем вблизи положений равновесия. Пособие может быть также полезно широкому кругу специалистов, имеющих дело с изучением и исследованием колебательных процессов, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений.

Приложения современной теории колебаний необозримо, начиная с классических задач механики и кончая проблемами, возникающими при конструировании медицинских приборов, регистрирующих колебательные процессы в организме человека и воздействующих на них. В любой области приложений перед инженерами и учеными возникает ряд важных практических задач, тесно связанных с проблемами теории колебаний и методами их исследования. Хотя каждая из этих задач имеет свою специфику, но все они, в конечном счете, решаются на основе общих принципов и подходов, составляющих содержание теории колебаний.

Теорию колебаний обычно разделяют на разделы в соответствии с характерными отличительными признаками возникающих колебаний. Такими отличительными признаками чаще всего являются:

1. Число степеней свободы.
2. Вид дифференциальных уравнений, описывающих движение.
3. Тип действующих на механическую систему сил.

В зависимости от числа степеней свободы различают колебания с одной и несколькими степенями свободы. Иногда рассматривают колебания систем с бесконечно большим числом степеней свободы (систем с распределенными параметрами). Математическими моделями, описывающими колебания механических систем с одной и несколькими степенями свободы, обычно являются обыкновенные дифференциальные уравнения с заданными начальными условиями.

Движение в механических колебательных системах в зависимости от принимаемых допущений может описываться линейными, квазилинейными и нелинейными дифференциальными уравнениями, каждое из которых требует своих подходов и методов исследования. Наиболее развита теория линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, позволяющая получать точные решения в аналитическом виде. Квазилинейные дифференциальные уравнения отличаются от линейных наличием малых нелинейных членов, которые оказывают влияние на основные характеристики колебательного процесса. Хотя это влияние невелико, но на больших промежутках времени оно может оказаться существенным. Колебания в нелинейных механических системах наиболее сложны для исследования и изучены в настоящее время только в некоторых отдельных аспектах. Основным методом исследования квазилинейных и нелинейных систем являются разнообразные методы возмущений.

В последнее время все чаще используется принцип разделения колебаний по типу действующих на систему сил, характерной особенностью которого является выделение физического единства рассматриваемых явлений / I /. В соответствии с этим принципом различают:

- а) собственные или свободные колебания;

- б) вынужденные колебания;
- в) автоколебания;
- г) параметрические колебания.

Собственные или свободные колебания возникают в механической системе, если к ней не подводится энергия от других механических систем. Рассеивание энергии (ее диссипация) при свободных колебаниях может иметь место, например, за счет действия сил трения. Примером таких колебаний может служить движение математического или физического маятника после кратковременного толчка.

Вынужденные колебания имеют место при действии на механическую систему сил, заданных в виде явных функций времени и не зависящих от движения системы. Примером таких колебаний является тот же физический маятник, но при действии на него периодического внешнего момента, изменяющегося по закону синуса.

Под автоколебаниями механических систем обычно понимают периодические движения с постоянной или почти постоянной амплитудой (амплитудами), которые поддерживаются в системе, несмотря на наличие неизбежных потерь энергии. Поэтому для реализации режима автоколебаний необходим приток энергии в систему, причем источник энергии обычно не обладает колебательными свойствами. Примером автоколебаний можно считать движение механических часов с пружиной (гирей), в которых потенциальная энергия пружины (гири) поддерживает движение колебательного элемента (маятника) с почти постоянной амплитудой. Основным методом определения и исследования автоколебаний в настоящее время является метод усреднения.

Параметрические колебания возникают в системах, параметры

которых заданным образом периодически изменяются во времени. Характерным признаком параметрических колебаний является их отсутствие, если система находится в положении равновесия. Это принципиально отличает параметрические колебания от вынужденных, возникающих и в этом случае. Примером параметрических колебаний может служить механическая система "человек на качелях". Перемещая периодически свой центр масс (периодически изменяя длину физического маятника), человек может раскачать качели. Однако это ему не удастся сделать без начального толчка (если качели не выведены из положения равновесия).

Предлагаемое пособие содержит четыре главы. В первой главе излагаются основы классической теории колебаний линейных механических систем. Рассматриваются свободные и вынужденные колебания голономных систем с одной и многими степенями свободы при действии потенциальных и диссипативных сил. Приводится пример исследования свободных и вынужденных колебаний механической системы с двумя степенями свободы. Во второй главе рассматриваются методы исследования автоколебаний механических систем. Наряду с классическим методом Пуанкаре особое внимание в этой главе уделяется методу усреднения, который является в настоящее время наиболее мощным современным методом определения и исследования автоколебаний в механических системах. Приводится пример исследования автоколебаний в механической системе с двумя степенями свободы. В третьей главе описываются некоторые аспекты теории колебаний нелинейных механических систем. Рассматриваются свободные колебания нелинейной механической системы с одной степенью свободы, имеющей первый интеграл, аналогичный интегралу энергии. Излагается классический метод исследования стационарных периодических решений Ляпунова-Пуанкаре, позволяющий строить

приближенные аналитические решения для нелинейных систем вблизи положения равновесия. В четвертой главе описываются методы исследования нелинейных колебательных многочастотных систем. Наряду с рассмотрением известных результатов, представленных в современной литературе, в главу включены некоторые вопросы, практически не освещенные в учебной литературе: оценка возмущений при прохождении системы через резонанс и описание методов исследования устойчивости резонансного движения колебательной системы с переменными частотами. Приводится пример применения теории многочастотных систем к исследованию параметрических колебаний системы с двумя степенями свободы.

## 1. КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

### 1.1. Свободные колебания системы с одной степенью свободы

Рассмотрим движение механической системы с голономными и стационарными связями с одной степенью свободы в поле потенциальных сил. Как известно / 2 /, согласно теореме Дирихле-Лагранжа для такой системы устойчивому положению равновесия соответствует строгий локальный минимум ее потенциальной энергии. Аналогом такой механической системы может служить, например, груз на пружине, совершающий движения вдоль горизонтальной оси (рис.1.1). Предположим, что груз выведен из устойчивого положения равновесия достаточно малым кратковременным воздействием. После этого, если система не подвергается другим внешним воздействиям и к ней не подводится энергия, груз будет совершать свободные или собственные колебания вблизи устойчивого положения равновесия. При этом в общем случае в системе может присутствовать диссипация энергии за счет, например, сил трения.

Движение рассматриваемой системы описывается уравнением Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q} + Q_T, \quad (1.1)$$

где  $T$  и  $\Pi$  - кинетическая и потенциальная энергии системы,  $q$  - обобщенная координата (отклонение  $x$  груза от положения равновесия - точки  $O$ , см. рис.1.1),  $\dot{q} = dq/dt$  - обобщенная скорость,  $Q_T$  - обобщенная сила трения,  $t$  - время.

Для механической системы "груз на пружине" при малых отклонениях от положения равновесия (при линейной силе упругости  $F_v = cx$ , где  $c$  - коэффициент жесткости пружины) очевидно имеем

Пример системы с одной степенью свободы

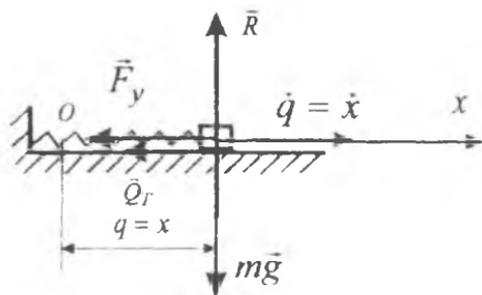


Рис. 1.1.

Фазовый портрет системы без трения

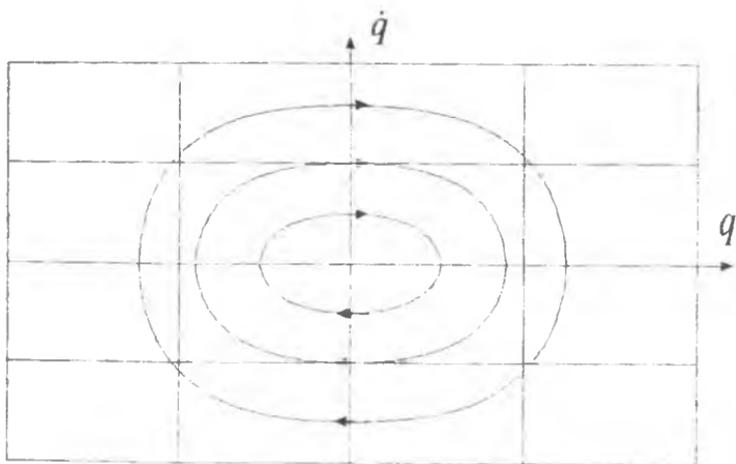


Рис. 1.2

$$T = \frac{1}{2} m \dot{q}^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} c q^2. \quad (1.2)$$

Сила трения  $Q_T$  чаще всего при малых отклонениях от положения равновесия пропорциональна скорости  $\dot{q}$  и имеет вид

$$Q_T = -\alpha \dot{q}, \quad (1.3)$$

где  $\alpha = \text{const} > 0$  - коэффициент пропорциональности. Сила трения, определенная формулой (1.3), называется линейной.

Подставляя выражения (1.2) и (1.3) в уравнение Лагранжа (1.1), получим

$$m \ddot{q} + \alpha \dot{q} + c q = 0. \quad (1.4)$$

Дифференциальное уравнение (1.4) представляет собой линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами, которое нетрудно проинтегрировать при заданных начальных условиях:

$$t=0, \quad q(0)=q_0, \quad \dot{q}(0)=\dot{q}_0. \quad (1.5)$$

Как известно [3], решение линейного однородного дифференциального уравнения (1.4) ищется в виде

$$q = d \exp(\lambda t),$$

где  $d$  и  $\lambda$  - постоянные величины.

Подставляя это решение в уравнение (1.4), найдем

$$(m \lambda^2 + \alpha \lambda + c) d = 0. \quad (1.6)$$

Алгебраическое уравнение (1.6) будет иметь решение  $d \neq 0$ , если

$$m \lambda^2 + \alpha \lambda + c = 0. \quad (1.7)$$

Квадратное уравнение (1.7) является характеристическим для дифференциального уравнения (1.4) и имеет корни

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha \pm (\alpha^2 - 4mc)^{1/2}}{2m}. \quad (1.8)$$

Рассмотрим разные случаи.

1.  $\alpha^2 - 4mc > 0$ . Физически это соответствует достаточно

большому трению. Оба корня в этом случае действительны, различны и отрицательны, и общее решение дифференциального уравнения (I.4) записывается в виде

$$q = d_1 \exp(\lambda_1 t) + d_2 \exp(\lambda_2 t) , \quad (1.9)$$

где  $d_1$  и  $d_2$  - произвольные постоянные.

Подставляя начальные условия (I.5) в решение (I.9), найдем

$$d_1 + d_2 = q_0 , \quad \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 = \dot{q}_0 . \quad (1.10)$$

Откуда

$$d_1 = \frac{\lambda_2 q_0 - \dot{q}_0}{\lambda_2 - \lambda_1} , \quad d_2 = \frac{\lambda_1 q_0 - \dot{q}_0}{\lambda_1 - \lambda_2} .$$

Полученное таким образом решение начальной задачи не колеблясь (апериодически) приближается с ростом  $t$  к положению равновесия  $q=0$ .

2.  $\kappa^2 - 4mc < 0$ . Физически это соответствует достаточно слабому трению. При этом корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  являются комплексно сопряженными с отрицательной действительной частью. Общее решение в этом случае записывается в виде / 3 /

$$q = \exp(-\kappa t / 2m) (d_1 \cos \omega t + d_2 \sin \omega t) , \quad (1.11)$$

где  $\omega = (4mc - \kappa^2)^{1/2} / 2m$  - частота, а произвольные постоянные  $d_1$  и  $d_2$  определяются выражениями

$$d_1 = q_0 , \quad d_2 = (\dot{q}_0 + \kappa q_0 / 2m) / \omega .$$

Решение (I.11) описывает колебательный процесс, причем колебания затухают по закону  $\exp(-\kappa t / 2m)$ . С течением времени  $t$  решение также стремится к положению равновесия  $q=0$ .

3.  $\kappa = 0$ . Трение отсутствует. Решение уравнения (I.4) при этом получается как частный случай решения (I.11):

$$q = d_1 \cos \omega t + d_2 \sin \omega t , \quad (1.12)$$

где  $\omega = (c/m)^{1/2}$ ,  $d_1 = q_0$ ,  $d_2 = \dot{q}_0 / \omega$ .

Решение (I.12) можно записать также в виде

$$q = K \cos(\omega t + \varphi_0) \quad , \quad (1.13)$$

где  $K = (q_0^2 + \dot{q}_0^2 / \omega^2)^{1/2}$  - амплитуда колебаний,  $\varphi_0$  - начальная фаза колебаний,  $\cos \varphi_0 = q_0 / K$ ,  $\sin \varphi_0 = -\dot{q}_0 / K\omega$ .

Из выражения (1.13) следует, что при отсутствии трения движение системы представляет собой незатухающие колебания с постоянной амплитудой  $K$  и частотой  $\omega$ .

4.  $\alpha^2 - 4mc = 0$ . В этом случае корни характеристического уравнения равны друг другу  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha/2m$ , действительны и отрицательны. Общее решение в случае кратных корней уравнения (1.4) будет иметь вид

$$q = \exp(-\alpha t/2m) (d_1 + t d_2) \quad , \quad (1.14)$$

где произвольные постоянные  $d_1$  и  $d_2$  также могут быть найдены из начальных условий (1.5). Практически корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  не бывают в точности равны. Поэтому решение (1.14) описывает некоторую математическую абстракцию, не реализуемую в реальных системах.

## 1.2. Исследование движения систем на фазовой плоскости

Очень часто для наглядности представления колебательного процесса рассматривают движение системы с одной степенью свободы на фазовой плоскости  $(q, \dot{q})$ . Состояние системы на фазовой плоскости в любой фиксированный момент времени  $t$  определяется парой соответствующих значений  $q$  и  $\dot{q}$ . В процессе движения системы изображающая (фазовая) точка  $(q, \dot{q})$  перемещается по фазовой плоскости, описывая фазовую траекторию. Совокупность фазовых траекторий представляет все возможные движения рассматриваемой системы и называется фазовым портретом системы.

Уравнения движения системы на фазовой плоскости можно получить, если известно решение  $q(t), \dot{q}(t)$ . Для этого необходимо

исключить из найденных решений время и получить зависимость  $q$  от  $\dot{q}$ , которая и будет представлять собой уравнение фазовой траектории. Рассмотрим, например, движение системы (I.4) в случае незатухающих колебаний ( $\alpha=0$ ). Тогда, дифференцируя решение (I.13), найдем

$$\dot{q} = -K\omega \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (1.15)$$

Исключая из выражений (I.13) и (I.15) время, получим

$$q^2 + \dot{q}^2 / \omega^2 = K^2 \quad (1.16)$$

Траектория на фазовой плоскости  $(q, \dot{q})$  представляет собой в этом случае эллипс с полуосями  $K$  и  $\omega K$  (рис. I.2). Причем разным начальным условиям  $q_0$  и  $\dot{q}_0$  соответствует при этом свой эллипс, определяемый значениями амплитуды  $K$ . Следовательно, в данном случае фазовая плоскость заполнена бесконечным множеством вложенных в друг друга эллипсов с общим центром в начале координат.

Для того, чтобы от исходного уравнения (I.4) непосредственно перейти к картине на фазовой плоскости, не интегрируя его, поступают следующим образом. Заменяют уравнение второго порядка (I.4) двумя эквивалентными уравнениями первого порядка:

$$\dot{q} = z, \quad \dot{z} = -(az + cq)/m$$

Далее, разделив второе уравнение на первое, получают

$$\frac{dz}{dq} = -\frac{az + cq}{mz}$$

Это уравнение непосредственно определяет в каждой точке фазовой плоскости единственную касательную к соответствующей фазовой траектории, за исключением точки  $q=0, \dot{q}=z=0$ , в которой направление касательной становится неопределенным. Точки фазовой плоскости, в которых направление касательной к фазовым траекториям не определено, называются особыми точками системы. Для

определения особых точек в общем случае исследуемую систему (аналогично системе (I.4) ) приводят к двум уравнениям первого порядка вида

$$\dot{q} = f_1(q, z), \quad \dot{z} = f_2(q, z), \quad (1.17)$$

где  $f_1(q, z)$  и  $f_2(q, z)$  - известные функции.

В этом случае уравнения касательных имеют вид

$$\frac{dz}{dq} = \frac{f_2(q, z)}{f_1(q, z)}. \quad (1.18)$$

Координаты особых точек при этом находятся из системы алгебраических уравнений

$$f_1(q^*, z^*) = 0, \quad f_2(q^*, z^*) = 0, \quad (1.19)$$

где  $q^*, z^*$  - координаты особой точки.

Определение особых точек имеет особое значение при построении фазовых портретов систем. Различают локальные и глобальные фазовые портреты. Часть фазового портрета системы, находящаяся в окрестности некоторой точки (обычно особой), называется локальным фазовым портретом системы в этой точке. Глобальный фазовый портрет определяет движения системы на всей фазовой плоскости. Рассмотрим построение локального фазового портрета в окрестности некоторой особой точки  $(q^*, z^*)$ . Для этого произведем линеаризацию системы (I.17) относительно этой особой точки. Тогда, вводя отклонения  $\Delta q = q - q^*$ ,  $\Delta z = z - z^*$  от точки  $(q^*, z^*)$  и раскладывая функции  $f_1(q, z)$ ,  $f_2(q, z)$  в ряд Тейлора, с учетом (I.17) и (I.19) получим

$$\begin{aligned} \dot{\Delta q} &= b_{11}\Delta q + b_{12}\Delta z + f_1^{(2)}(\Delta q, \Delta z), \\ \dot{\Delta z} &= b_{21}\Delta q + b_{22}\Delta z + f_2^{(2)}(\Delta q, \Delta z), \end{aligned} \quad (1.20)$$

где

$$b_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial q}(q^*, z^*), \quad b_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial z}(q^*, z^*),$$

$$b_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial q}(q^*, z^*) \quad , \quad b_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial z}(q^*, z^*) \quad ,$$

$f_1^{(2)}$  и  $f_2^{(2)}$  - функции, содержащие  $\Delta q$  и  $\Delta z$  во второй и более высоких степенях.

Характеристическое уравнение линейной системы, соответствующей системе (I.20) при  $f_1^{(2)} = f_2^{(2)} = 0$ , имеет вид

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} \\ b_{21} & b_{11} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

Раскрывая данный определитель и решая квадратное уравнение, нетрудно получить

$$\lambda_{1,2} = \frac{b_{11} + b_{22}}{2} \pm \left[ \frac{(b_{11} + b_{22})^2}{4} + b_{12}b_{21} - b_{11}b_{22} \right]^{1/2} .$$

В этом случае решение линейной системы запишется в виде

$$\Delta q = d_1 \exp(\lambda_1 t) + d_2 \exp(\lambda_2 t) \quad , \tag{1.21}$$

$$\Delta z = d_1 \chi_1 \exp(\lambda_1 t) + d_2 \chi_2 \exp(\lambda_2 t) \quad ,$$

где  $d_1$  и  $d_2$  - произвольные постоянные,  $\chi_1$  и  $\chi_2$  коэффициенты распределения, определяемые из решения квадратного уравнения /4/

$$b_{12}\chi^2 + (b_{11} - b_{22})\chi - b_{21} = 0 \quad .$$

Французский математик Пуанкаре, анализируя решение (I.21), показал, что система (I.20) в зависимости от значений корней  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  может иметь следующие основные типы особых точек /4/:

1. Если корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  действительны и отрицательны, то особая точка называется устойчивым узлом. Устойчивый узел озражен на рис. I.3. Траектории системы в этом случае аперидически стремятся к особой точке  $(q^*, z^*)$ .

2. Если корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  действительны и положительны, то особая точка называется неустойчивым узлом. Неустойчивый узел имеет такой же вид, как и устойчивый узел, однако направления

Фазовый портрет системы с большим трением

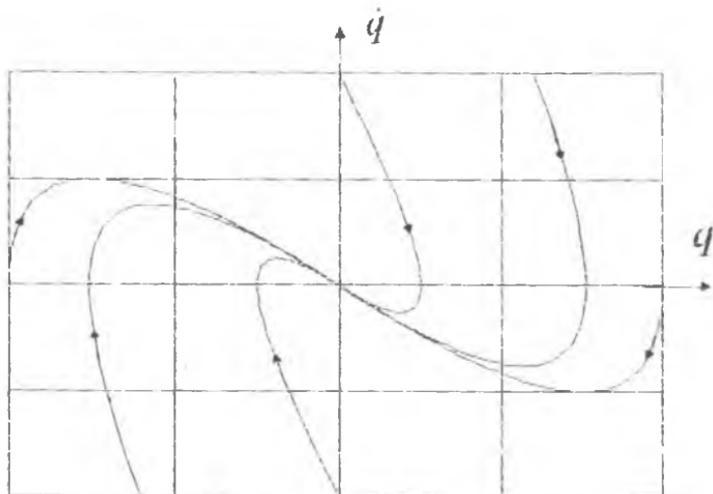


Рис.1.3

Фазовый портрет системы с малым трением

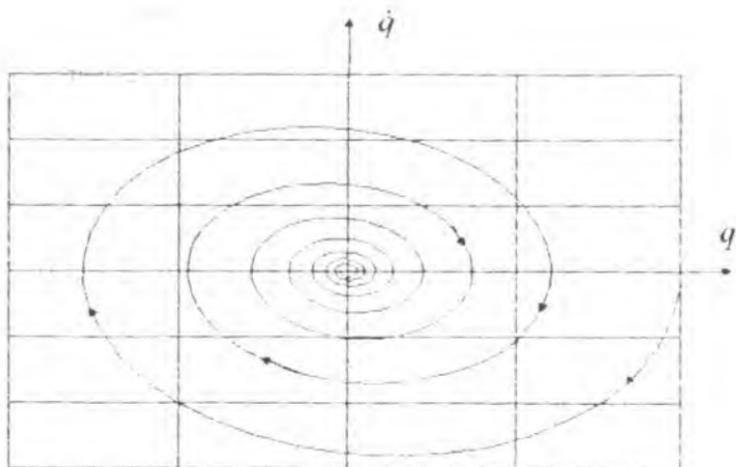


Рис.1.4

движения фазовой точки противоположные. Траектории системы удаляются от особой точки  $(q^*, z^*)$ .

3. Если корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  комплексные с отрицательными действительными частями, то особая точка называется устойчивым фокусом (рис. I.4), на который траектории наматываются спиралями.

4. Если корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  комплексные с положительными вещественными частями, то особая точка есть неустойчивый фокус, с которого траектории разматываются спиралями.

5. Если корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  действительны и разных знаков, то особая точка называется седлом /4/. В нее входят две и из нее выходят две предельные траектории (сепаратрисы), остальные траектории удаляются от особой точки.

Большое значение для качественной теории дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости имеет понятие "грубости" системы. Свойство "грубости" системы можно трактовать как устойчивость вида фазового портрета системы по отношению к малым изменениям правых частей дифференциальных уравнений (I.17). По отношению к особым точкам оно заключается в том, что при малых изменениях параметров системы (I.17) тип особых точек не изменяется. Строгое определение "грубости" системы дали А.А.Андронов и Л.С.Понтрягин /4/. Перечисленные выше пять основных типов особых точек являются "грубыми". Наряду с "грубыми" особыми точками существуют также "негрубые" особые точки, которые при малом изменении параметров системы переходят в основные. Так, например, если корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  являются чисто мнимыми, то мы имеем дело с особой точкой, являющейся переходной между устойчивым и неустойчивым фокусом. Такая особая точка получила название центра (рис. I.2). Ясно, что при малом изменении параметров системы центр переходит или в устойчивый, или в

неустойчивый фокус. Поэтому "негрубые" особые точки представляют собой предельные случаи локальных фазовых портретов системы, которые практически трудно реализовать в реальных системах, так как их параметры обычно известны с некоторой погрешностью.

С помощью изложенной теории определим тип особой точки  $q^*=z^*=0$  системы (I.4), описывающей колебания механической системы с одной степенью свободы вблизи устойчивого положения равновесия. Так как в этом случае  $\Delta q=q, \Delta z=z$ , то характеристическое уравнение (I.7) является в то же время и характеристическим уравнением линеаризованной системы. Поэтому при большом трении  $\alpha^2 - 4mc > 0$  (так как корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  вещественны и отрицательны) особая точка  $q^*=z^*=0$  есть устойчивый узел (рис. I.3). При малом трении  $\alpha^2 - 4mc < 0$  (корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  являются комплексно сопряженными с отрицательной действительной частью) особая точка  $q^*=z^*=0$  есть устойчивый фокус (рис. I.4). При отсутствии трения ( $\alpha=0$ ) для чисто мнимых корней  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  (I.8) особая точка  $q^*=z^*=0$  представляет собой центр (рис. I.2).

### 1.3. Свободные колебания механических систем с несколькими степенями свободы

Рассмотрим движение механической системы с  $\nu$  степенями свободы с голономными и стационарными связями в поле потенциальных сил с учетом сил трения. Уравнения Лагранжа такой системы будут иметь вид

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + Q_{Tj}, \quad j=1, \dots, \nu, \quad (1.22)$$

где  $T$  и  $\Pi$  - кинетическая и потенциальная энергии системы,  $q_j$  -

обобщенные координаты,  $Q_{Tj}$  - обобщенные силы трения.

Обобщенные силы трения (линейное трение) приблизительно пропорциональны обобщенным скоростям  $\dot{q}_j$  и довольно часто задаются следующими формулами:

$$Q_{Tj} = - \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_{jk} \dot{q}_k, \quad (1.23)$$

где  $\alpha_{jk} > 0$  - некоторые константы,  $\dot{q}_k = dq_k/dt$ .

Кинетическая энергия системы представляет собой квадратичную форму обобщенных скоростей с коэффициентами, зависящими от обобщенных координат:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} A_{jk}(q_1, \dots, q_{\nu}) \dot{q}_j \dot{q}_k. \quad (1.24)$$

Иногда удобно бывает силы трения  $Q_{Tj}$  задать посредством одной функции  $F$ , вводимой по аналогии с функциями  $T$  и  $\Pi$  по формулам

$$F = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k. \quad (1.25)$$

Тогда  $Q_{Tj} = - \partial F / \partial \dot{q}_j$  и уравнения Лагранжа примут вид:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j}, \quad j=1, \dots, \nu. \quad (1.26)$$

Функция  $F$  получила название диссипативной функции или функции рассеивания. Причем вследствие симметрии формулы (1.25) также можно считать, что  $\alpha_{jk} = \alpha_{kj}$ .

Пусть отсчет обобщенных координат  $q_j$  выбран так, чтобы в положении равновесия  $q_j = 0$  и потенциальная энергия  $\Pi(q_1, \dots, q_{\nu})$  равнялась нулю:  $\Pi(0, \dots, 0) = 0$ . Тогда в положении равновесия  $q_j = 0$ ,  $\dot{q}_j = 0$  имеем

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + Q_{Tj} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0. \quad (1.27)$$

Рассмотрим колебания механической системы при малых отклонениях от устойчивого положения равновесия. Для этого разложим функции  $\Pi$  и  $T$  в ряды Тейлора по обобщенным координатам  $q_j$  в точке  $q_j=0$ , тогда

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_j \partial q_k} (0, \dots, 0) q_j q_k + \dots \quad (1.28)$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} A_{jk} (0, \dots, 0) \dot{q}_j \dot{q}_k + \dots$$

Сохраняя в выражениях (1.28) лишь квадратичные члены по  $q_j$  и  $\dot{q}_j$ , получим

$$\Pi \approx \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} c_{jk} q_j q_k, \quad T \approx \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (1.29)$$

где

$$c_{jk} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_j \partial q_k} (0, \dots, 0), \quad a_{jk} = A_{jk} (0, \dots, 0)$$

Причем из формулы определения коэффициентов  $c_{jk}$  следует, что  $c_{jk} = c_{kj}$ .

Потенциальная энергия  $\Pi \geq 0$ , так как здесь рассматривается движение вблизи устойчивого положения равновесия (теорема Дирихле-Лагранжа) и обращается в ноль только в положении равновесия (в силу выбора отсчета обобщенных координат). Кинетическая энергия  $T \geq 0$  в силу ее физического смысла. Необходимые и достаточные условия положительной определенности квадратичных форм даются условиями Сильвестра / 5 /:

$$\begin{aligned} c_{11} > 0, & \quad a_{11} > 0, \\ \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, & \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \end{aligned} \quad (1.30)$$

.....

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1\nu} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{\nu 1} & \dots & c_{\nu\nu} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\nu} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & \dots & a_{\nu\nu} \end{vmatrix} > 0.$$

Вычисляя производные функций  $T$  и  $\Pi$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^{\nu} a_{jk} \dot{q}_k, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^{\nu} c_{jk} q_k$$

и подставляя их в уравнения Лагранжа (I.26), получим

$$\sum_{k=1}^{\nu} (a_{jk} \ddot{q}_k + x_{jk} \dot{q}_k + c_{jk} q_k) = 0, \quad j=1, \dots, \nu \quad (1.31)$$

Система дифференциальных уравнений второго порядка (I.31) описывает движение рассматриваемой механической системы вблизи ее устойчивого положения равновесия.

Иногда систему (I.31) удобно представить в матричной форме. Тогда, вводя в рассмотрение квадратные матрицы  $A=[a_{jk}]_{\nu \times \nu}$ ,  $X=[x_{jk}]_{\nu \times \nu}$ ,  $C=[c_{jk}]_{\nu \times \nu}$ , где  $a_{jk}$ ,  $x_{jk}$ ,  $c_{jk}$  ( $i, k=1, \dots, \nu$ ) - элементы матриц, и матрицу-столбец  $q=[q_j]_{\nu \times 1}$ , переищем систему (I.31) в виде

$$A \ddot{q} + X \dot{q} + C q = 0. \quad (1.32)$$

Функции  $T$ ,  $\Pi$  и  $F$  в этом случае также можно записать в матричной форме

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T A \dot{q}, \quad \Pi = \frac{1}{2} q^T C q, \quad F = \frac{1}{2} \dot{q}^T X \dot{q},$$

где  $T$  - знак транспонирования.

Как известно / 3 /, решение системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами (I.32) ищется в виде

$$q = D \exp(\lambda t),$$

где вектор  $D$  и  $\lambda$  - постоянные величины. Подставляя это решение в уравнения (I.32), получим систему алгебраических линейных

уравнений вида

$$(A\lambda^2 + X\lambda + C) D = 0 \quad (1.33)$$

Известно, что система  $\nu$  линейных однородных уравнений (1.33) будет иметь решения, отличные от нуля, если определитель

$$\det(A\lambda^2 + X\lambda + C) = 0 \quad (1.34)$$

После раскрытия определителя получается алгебраическое уравнение степени  $2\nu$  относительно  $\lambda$ , которое имеет ровно  $2\nu$  корней. Решая его, определяют корни  $\lambda_1, \dots, \lambda_{2\nu}$ , называемые собственными значениями. Подставляя какое-либо из этих значений  $\lambda_s$  в систему (1.33), получим соотношение для определения собственного вектора  $D^{(s)}$ :

$$(A\lambda_s^2 + X\lambda_s + C) D^{(s)} = 0 \quad (1.35)$$

Эти собственные векторы  $D^{(s)}$  определяются с точностью до множителя, который по сути является постоянной интегрирования. Таких постоянных интегрирования будет  $2\nu$ , и они будут характеризовать общее решение системы (1.32). Тогда, согласно общей теории дифференциальных уравнений, общее решение системы (1.32) будет иметь вид

$$q = \sum_{s=1}^{2\nu} D^{(s)} \exp(\lambda_s t), \quad (1.36)$$

где  $\lambda_s \neq \lambda_j$  ( $s \neq j$ ,  $s, j = 1, \dots, 2\nu$ ).

Ясно, что поведение решения (1.36) зависит от собственных значений  $\lambda_1, \dots, \lambda_{2\nu}$ . Для того, чтобы исследовать зависимость решений (1.36) от значений  $\lambda_1, \dots, \lambda_{2\nu}$  /6/, рассмотрим какой-нибудь корень уравнения (1.34), который для общности будем предполагать комплексным:  $\lambda = \beta + i\omega$ . Как известно из теории алгебраических уравнений, в этом случае величина ему сопряженная  $\bar{\lambda} = \beta - i\omega$  также будет корнем уравнения (1.34). Корням  $\lambda$  и  $\bar{\lambda}$  будут соответствовать

собственные векторы  $D = \mu + i\eta = [D_j]_{2\nu \times 1}$  и  $\bar{D} = \mu - i\eta = [\bar{D}_j]_{2\nu \times 1}$ , которые также в общем случае будут комплексными и сопряженными.

Умножим каждое из уравнений системы

$$\sum_{k=1}^{\nu} (a_{jk} \lambda^2 + x_{jk} \lambda + c_{jk}) D_k = 0$$

на  $\bar{D}_j$  ( $j=1, \dots, \nu$ ) и сложим полученные выражения, тогда

$$\lambda^2 \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} a_{jk} \bar{D}_j D_k + \lambda \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} x_{jk} \bar{D}_j D_k + \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} c_{jk} \bar{D}_j D_k = 0. \quad (1.37)$$

Так как  $a_{jk} = a_{kj}, x_{jk} = x_{kj}, c_{jk} = c_{kj}$ , то множители при коэффициентах  $a_{jk}, x_{jk}, c_{jk}$  в двойных суммах (1.37) имеют вид

$$\bar{D}_j D_k + D_j \bar{D}_k = (\mu_j - i\eta_j)(\mu_k + i\eta_k) + (\mu_j + i\eta_j)(\mu_k - i\eta_k) = 2(\mu_j \mu_k + \eta_j \eta_k).$$

Следовательно, квадратное уравнение (1.37) примет вид

$$\lambda^2 \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} a_{jk} (\mu_j \mu_k + \eta_j \eta_k) + \lambda \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} x_{jk} (\mu_j \mu_k + \eta_j \eta_k) + \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} c_{jk} (\mu_j \mu_k + \eta_j \eta_k) = 0. \quad (1.38)$$

Принимая во внимание, что функции  $T, \Pi$  и  $F$  представляют собой квадратичные формы (1.29), нетрудно заметить, что суммы в уравнении (1.38) являются теми же квадратичными формами, но выраженными в переменных  $\mu$  и  $\eta$ , то есть

$$\lambda^2 (T_{\mu} + T_{\eta}) + \lambda (F_{\mu} + F_{\eta}) + \Pi_{\mu} + \Pi_{\eta} = 0, \quad (1.39)$$

где  $T_{\mu} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} a_{jk} \mu_j \mu_k$ ,  $T_{\eta} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} a_{jk} \eta_j \eta_k$ ,

$$F_{\mu} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} x_{jk} \mu_j \mu_k, \quad F_{\eta} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} x_{jk} \eta_j \eta_k,$$

$$P_{\mu} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} c_{jk} \mu_j \mu_k, \quad P_{\eta} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} c_{jk} \eta_j \eta_k.$$

Решая уравнение (I.39), получим

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(F_{\mu} + F_{\eta}) \pm [(F_{\mu} + F_{\eta})^2 - 4(T_{\mu} + T_{\eta})(P_{\mu} + P_{\eta})]^{1/2}}{2(T_{\mu} + T_{\eta})}. \quad (1.40)$$

В зависимости от знака дискриминанта уравнения (I.40)

$$\Delta = (F_{\mu} + F_{\eta})^2 - 4(T_{\mu} + T_{\eta})(P_{\mu} + P_{\eta}), \quad (1.41)$$

корни (I.40) могут быть разными.

Прежде всего напомним, что кинетическая энергия  $T$  и диссипативная функция  $F$  в силу своего физического смысла всегда положительны и обращаются в ноль только в положении равновесия  $\vec{q}_j = 0$ . Поэтому соответствующие квадратичные формы будут определенно положительными  $T_{\mu}, T_{\eta}, F_{\mu}, F_{\eta} > 0$ . Квадратичные формы  $P_{\mu}, P_{\eta}$  будут определенно положительными в силу того, что мы рассматриваем движение в окрестности устойчивого положения равновесия (теорема Дирихле-Лагранжа). Поэтому, если  $F > 0$ , то корни  $\lambda_1, \dots, \lambda_{2\nu}$  все будут иметь отрицательные действительные части и положение равновесия линейной системы будет асимптотически устойчиво. При этом, если дискриминант (I.41)  $\Delta < 0$ , то соответствующий корень является комплексным, а если  $\Delta \geq 0$ , то вещественным и отрицательным.

Рассмотрим теперь различные случаи в зависимости от величины сил трения аналогично тому, как это было сделано для системы с одной степенью свободы (раздел I.1).

1. Предположим, что диссипативная функция  $F > 0$  настолько велика, что дискриминант (I.41)  $\Delta > 0$  для всех собственных значений, тогда все собственные значения  $\lambda_j (j=1, \dots, 2\nu)$  будут вещественными и отрицательными. В этом случае в решении (I.36) все экспоненты со временем стремятся к нулю и система аperiodически возвращается в положение равновесия.

2. Предположим, что диссипативная функция системы  $F > 0$  настолько мала, что  $\Delta < 0$  для всех собственных значений  $\lambda_j (j=1, \dots, 2\nu)$ . Тогда все собственные значения будут комплексными с отрицательной действительными частями и решение (I.36) примет вид

$$q = \sum_{j=1}^{\nu} \exp(\beta_j t) [D^{(j)} \exp(i\omega_j t) + \bar{D}^{(j)} \exp(-i\omega_j t)] , \quad (1.42)$$

где  $D^{(j)}$  и  $\bar{D}^{(j)}$  - комплексно сопряженные векторы, определенные с точностью до множителей.

Применяя формулы Эйлера

$\exp(i\omega_j t) = \cos \omega_j t + i \sin \omega_j t$ ,  $\exp(-i\omega_j t) = \cos \omega_j t - i \sin \omega_j t$ ,  
выражение (I.42) нетрудно представить в вещественной форме

$$q = \sum_{j=1}^{\nu} \exp(\beta_j t) ( a^{(j)} \cos \omega_j t + b^{(j)} \sin \omega_j t ) , \quad (1.43)$$

где  $\beta_j < 0$ ,  $a^{(j)} = 2\mu^{(j)}$ ,  $b^{(j)} = -2\eta^{(j)}$ .

Ясно, что при малой, но отличной от нуля диссипации, решение (I.43) системы представляет собой затухающие колебания.

3. Если диссипация отсутствует  $F=0$ , все собственные значения  $\lambda_j (j=1, \dots, 2\nu)$  в соответствии с формулой (I.40) являются чисто мнимыми  $\lambda_j = i\omega_j$  и  $\bar{\lambda}_j = -i\omega_j (j=1, \dots, \nu)$ . Следовательно, решение (I.43) представляется в виде

$$q = \sum_{j=1}^{\nu} ( a^{(j)} \cos \omega_j t + b^{(j)} \sin \omega_j t )$$

или

$$q = \sum_{j=1}^{\nu} K^{(j)} \cos(\omega_j t + \varphi^{(j)}) \quad (1.44)$$

Здесь  $K^{(j)} = [ K_s^{(j)} ]_{\nu \times 1}$  - вектор амплитуд,

$\varphi^{(j)} = [ \varphi_s^{(j)} ]_{\nu \times 1}$  - вектор начальных фаз,

где

$$K_s^{(j)} = [ (a_s^{(j)})^2 + (b_s^{(j)})^2 ]^{1/2}, \quad (1.45)$$

$$\cos \varphi_s^{(j)} = a_s^{(j)} / K_s^{(j)}, \quad \sin \varphi_s^{(j)} = -b_s^{(j)} / K_s^{(j)},$$

$$s=1, \dots, \nu.$$

В этом случае все точки системы совершают в окрестности положения равновесия незатухающие колебания, являющиеся в общем случае суммой  $\nu$  простых колебаний с разными частотами  $\omega_j (j=1, \dots, \nu)$ .

4. Если же некоторые корни окажутся равными между собой  $\lambda_j = \lambda_s = \lambda_{j,s}$ , то на этом основании Лагранж полагал, что в этом случае в решении системы (1.32) (как это следует также из общей теории дифференциальных уравнений) появятся суммы вида

$$(D^{(j)} + D^{(s)} t) \exp(\lambda_{j,s} t)$$

Однако позже Вейерштрасс показал /6/, что это будет иметь место только тогда, когда имеются тождественные уравнения в линейной системе ( количество тождественных уравнений соответствует кратности собственного значения). Следовательно, собственное значение фактически остается первой кратности (если отбросить тождественные уравнения) и приведенное выше решение не будет иметь смысла. В связи с этим заключение Лагранжа теряет силу.

Пример исследования свободных колебаний механической системы с двумя степенями свободы рассматривается в разделе I.5.

#### I.4. Нормальные или главные координаты

При исследовании свободных малых колебаний иногда бывает удобно перейти к нормальным или главным координатам, в которых уравнения малых колебаний имеют достаточно простую форму. В общей теории квадратичных форм доказывается, что, если одна из квадратичных форм  $T$  и  $\Pi$  является определенно положительной ( в рассматриваемом случае определенно положительными являются обе функции  $T \geq 0$  и  $\Pi \geq 0$ ), то всегда можно найти такое линейное преобразование координат

$$q_j = \sum_{s=1}^{\nu} \gamma_{js} \xi_s, \quad j=1, \dots, \nu, \quad (1.46)$$

что  $T$  и  $\Pi$  одновременно преобразуются к виду

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\nu} a_s \xi_s^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\nu} c_s \xi_s^2. \quad (1.47)$$

Подставляя выражения (1.47) в уравнения Лагранжа ( $F=0$ )

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_s} \right] - \frac{\partial T}{\partial \xi_s} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_s}, \quad s=1, \dots, \nu,$$

нетрудно получить уравнения малых колебаний в нормальных координатах

$$a_s \ddot{\xi}_s + c_s \xi_s = 0, \quad s=1, \dots, \nu, \quad (1.48)$$

которые легко интегрируются

$$\xi_s = K_s \cos(\omega_s t + \varphi_s), \quad s=1, \dots, \nu, \quad (1.49)$$

где  $K_s$  и  $\varphi_s$  - произвольные постоянные (амплитуда и начальная

фаза),  $\omega_s = (c_s/a_s)^{1/2}$  - собственные частоты.

Из полученных решений (I.49) следует, что каждая нормальная координата будет совершать гармонические колебания со своей собственной частотой. Другие же координаты (I.46) будут линейными комбинациями нормальных и будут представлять собой суперпозицию  $\nu$  простых колебаний с частотами  $\omega_s$  ( $s=1, \dots, \nu$ ).

Для того, чтобы получить линейное преобразование (I.46), запишем уравнения движения механической системы в матричной форме (I.32) ( $F=0$ )

$$A \ddot{q} + C \dot{q} = 0, \quad (1.50)$$

где  $A$  и  $C$  - симметричные квадратные матрицы размера  $\nu \times \nu$ .

Как известно / 7 /, симметричная матрица с вещественными элементами (ранг которой равен  $\nu$ ) может быть приведена к диагональному виду с помощью ортогонального подобного преобразования

$$Y^T A Y = U, \quad (1.51)$$

где  $Y$  - ортогональная матрица  $\nu \times \nu$ ,

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_\nu \end{bmatrix} - \text{диагональная матрица,}$$

причем для положительно определенной матрицы  $A$   $u_s > 0$  ( $s=1, \dots, \nu$ ).

Введем матрицу

$$U^{1/2} = \begin{bmatrix} u_1^{1/2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_\nu^{1/2} \end{bmatrix}.$$

В этом случае матрица  $A$  может быть представлена в виде  $A = A^{1/2} A^{1/2}$ , где  $A^{1/2} = Y U^{1/2} Y^T$ .

Действительно,

$$A^{1/2} A^{1/2} = YU^{1/2}Y^T YU^{1/2}Y^T = YU^{1/2}U^{1/2}Y^T = YUY^T. \quad (1.52)$$

Отсюда, умножая соотношение (1.52) справа на  $Y^T$ , а слева на  $Y$ , нетрудно получить

$$A^{1/2} A^{1/2} = YUY^T = A. \quad (1.53)$$

При доказательстве равенств (1.52), (1.53) учитывается, что для ортогональной матрицы  $Y$ :  $YY^T = Y^TY = E$ , где  $E$  - единичная матрица.

Рассмотрим теперь линейную однородную систему (1.33) ( $X=0$ )

$$(A \lambda^2 + C) D = 0, \quad (1.54)$$

которая служит для определения собственных значений  $\lambda_j$  и собственных векторов  $D^{(j)}$ .

Представим систему (1.54) в виде

$$(A^{1/2} A^{1/2} \lambda^2 + C) D = 0.$$

Тогда, вынося матричный множитель  $A^{1/2}$  вправо и влево за скобку, получим

$$A^{1/2} (E \lambda^2 + B) R = 0, \quad (1.55)$$

где  $B = A^{-1/2} C A^{-1/2}$ ,  $R = A^{1/2} D$ .

С другой стороны, из (1.54) следует

$$A (E \lambda^2 + A^{-1} C) D = 0. \quad (1.56)$$

Так как соотношения (1.55) и (1.56) получены из одной системы (1.54), то матрицы  $B$  и  $A^{-1}C$  будут иметь одни и те же собственные значения, определяемые из уравнений

$$\det(E \lambda^2 + B) = \det(E \lambda^2 + A^{-1} C) = 0.$$

А, значит, для матрицы  $B$  так же, как и для симметричной матрицы  $A^{-1}C$ , существует ортогональное преобразование, приводящее ее к диагональному виду

$$TBT^T = W^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

или 
$$B = T^T W T, \quad (1.57)$$

где  $T$  - некоторая ортогональная матрица.

Подставляя соотношение (1.57) в систему (1.55), получим

$$A^{1/2} (E \lambda^2 T^T T + T^T W^2 T) R = 0$$

или 
$$A^{1/2} T^T (E \lambda^2 + W^2) S = 0, \quad (1.58)$$

где  $S = TR = TA^{1/2} D$  - новый собственный вектор.

При этом собственные значения, определенные из системы (1.58) посредством уравнения

$$\det(E \lambda^2 + W^2) = 0,$$

будут являться, как это и было показано ранее, чисто мнимыми, и определяться равенством

$$\lambda_j^2 = -\omega_j^2.$$

Покажем, что преобразование координат

$$q = A^{-1/2} T^T \xi \quad (1.59)$$

приведет уравнение (1.50) к диагональному виду.

Подставляя замену (1.59) в уравнение (1.50), получим

$$A A^{-1/2} T^T \overset{**}{\xi} + C A^{-1/2} T^T \xi = 0$$

или

$$A^{1/2} T^T \overset{**}{\xi} + C A^{-1/2} T^T \xi = 0. \quad (1.60)$$

Умножая равенство (1.60) на  $TA^{-1/2}$  слева, найдем

$$\overset{**}{\xi} + TA^{-1/2} C A^{-1/2} T^T \overset{**}{\xi} = \overset{**}{\xi} + T B T^T \overset{**}{\xi} = \overset{**}{\xi} + W^2 \overset{**}{\xi} = 0$$

или, представляя в координатной форме, приходим к уравнениям (1.48) в нормальных координатах, что и требовалось доказать.

Пример приведения системы с двумя степенями свободы к нормальным координатам будет рассмотрен в разделе 1.5.

### 1.5. Пример исследования свободных колебаний линейной системы с двумя степенями свободы

Рассмотрим движение механической системы, состоящей из двух стержней и трех пружин, прикрепленных к ним согласно схеме, изображенной на рис.1.5 / 8 /. Параметры механической системы приведены в табл.1.1, где  $c_1, c_2, c_3$  - коэффициенты жесткости пружин,  $m_1$  и  $m_2$  - массы стержней,  $2l$  - длина стержней.

Таблица 1.1

Параметры механической системы

Обозначение	$m_1$	$m_2$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$l$	$f$
Размерность	кг	кг	Н/м	Н/м	Н/м	м	мм
Значение	4	6	6000	5000	8000	0.4	0.02

По условию задания стержни занимают горизонтальное положение в положении равновесия / 8 /. Обеспечивают данное положение стержней пружины, причем пружина с коэффициентом жесткости  $c_1$  растянута на величину статической деформации  $f_{ст1}$ , а пружины с коэффициентом жесткости  $c_2$  и  $c_3$  сжаты на величину деформаций  $f_{ст2}, f_{ст3}$ .

За обобщенные координаты примем углы поворота стержней I и 2:  $\theta$  и  $\gamma$ . На рис.1.5 показано положение системы при положительных обобщенных координатах.

Определим кинетическую энергию системы как сумму

$$T = T_1 + T_2 \quad (1.61)$$

где  $T_1, T_2$  - кинетические энергии первого и второго стержней.

Кинетическая энергия первого стержня вычисляется как кинетическая энергия вращательного движения стержня относительно точки O :

Система с двумя степенями свободы

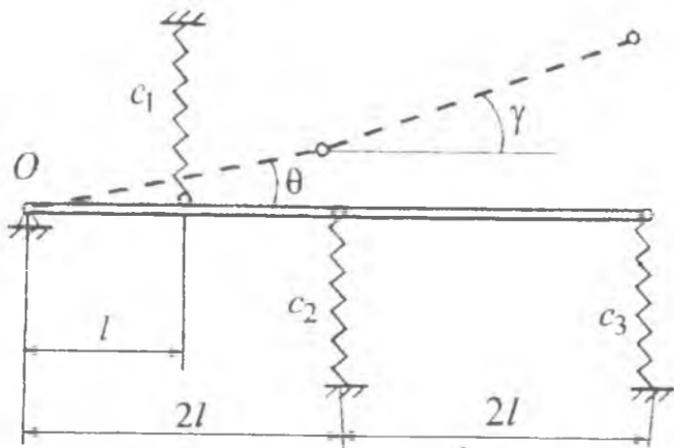


Рис. 1.5

$$T_1 = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}^2, \quad (1.62)$$

где

$J_1 = \frac{1}{3} m_1 (2l)^2 = \frac{4}{3} m_1 l^2$  - момент инерции первого стержня относительно точки  $O$ .

Кинетическая энергия второго стержня при его плоском движении вычисляется в соответствии с теоремой Кенига как сумма кинетической энергии центра масс и кинетической энергии в его вращении вокруг центра масс:

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\gamma}^2, \quad (1.63)$$

где  $v_2$  - абсолютная скорость центра масс второго стержня,

$J_2 = \frac{1}{12} m_2 (2l)^2 = \frac{1}{3} m_2 l^2$  - момент инерции второго стержня вокруг его центра масс.

Абсолютная скорость  $v_2$  определяется как векторная сумма (рис. I.6)

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA},$$

где  $v_A = 2l\dot{\theta}$  - скорость точки  $A$ , принятой за полюс;  $v_{BA} = l\dot{\gamma}$  - скорость точки  $B$  при ее относительном движении вокруг полюса  $A$ .

Откуда, используя теорему косинусов, получим

$$v_2^2 = (2l\dot{\theta})^2 + (l\dot{\gamma})^2 + 4l^2\dot{\theta}\dot{\gamma}\cos(\gamma-\theta). \quad (1.64)$$

Вычисляя полную кинетическую энергию  $T$  системы с учетом выражений (I.62-I.64), найдем

$$T = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{4}{3} m_1 l^2 + 4m_2 l^2 \right) \dot{\theta}^2 + \frac{4}{3} m_2 l^2 \dot{\gamma}^2 + 4l^2 m_2 \dot{\theta} \dot{\gamma} \cos(\gamma-\theta) \right]. \quad (1.65)$$

Выражение для кинетической энергии (I.65) представляет собой квадратичную форму относительно обобщенных скоростей  $\dot{\theta}$  и  $\dot{\gamma}$ . В соответствии с выражением (I.28) коэффициенты этой квадратичной

Скорости характерных точек системы

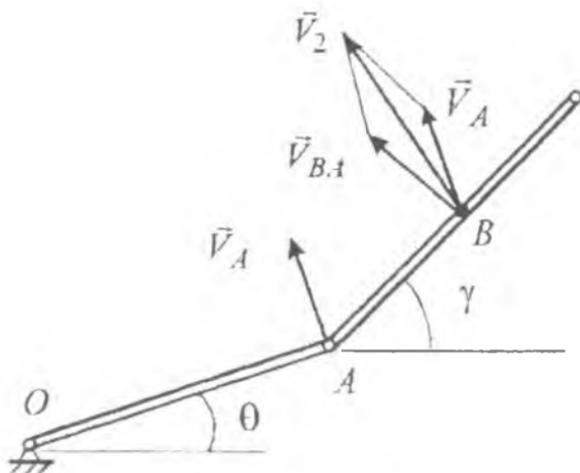


Рис. 1.6

Определение потенциальной энергии системы

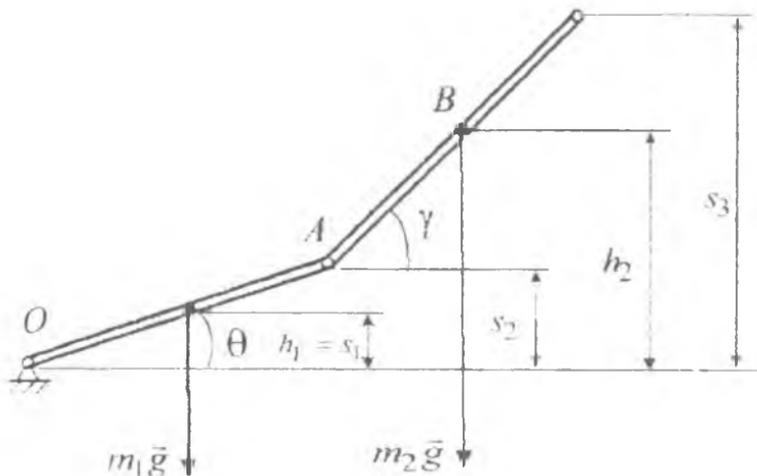


Рис. 1.7

Формы при малых отклонениях от положения равновесия (углах  $\theta$  и  $\gamma$ ) должны быть определены в положении равновесия ( $\theta=\gamma=0$ , нулевой член ряда Тейлора). В этом случае, приводя выражение (I.65) к стандартному виду, получим

$$T \approx \frac{1}{2} (a_{11}\dot{\theta}^2 + 2a_{12}\dot{\theta}\dot{\gamma} + a_{22}\dot{\gamma}^2) \quad , \quad (1.66)$$

где  $a_{11} = 4l^2(m_1/3 + m_2)$ ,  $a_{12} \approx 2l^2m_2$ ,  $a_{22} = 4m_2l^2/3$ .

При определении выражения (I.66) учитывалось, что в положении равновесия  $\cos(\gamma-\theta)=1$ .

Потенциальная энергия системы равна работе сил при перемещении системы из отклоненного положения в положение равновесия. Она определяется как сумма

$$П = П_1 + П_2 + П_{c1} + П_{c2} + П_{c3} \quad ,$$

где  $П_1$  и  $П_2$  - потенциальные энергии стержней в поле силы тяжести,  $П_{c1}, П_{c2}, П_{c3}$  - потенциальные энергии пружин.

Потенциальные энергии  $П_1$  и  $П_2$  определяются выражениями

$$П_1 = m_1gh_1 \quad , \quad П_2 = m_2gh_2 \quad , \quad (1.67)$$

где  $h_1 = l \sin \theta \approx l\theta$ ,  $h_2 = l(2 \sin \theta + \sin \gamma) \approx l(2\theta + \gamma)$  (см. рис. I.7).

Прежде чем записать потенциальные энергии пружин, найдем их деформации:

$$\eta_1 = \int_{c1}^a s_1^{-3} s_1 \quad , \quad \eta_2 = \int_{c2}^b s_2^{-3} s_2 \quad , \quad \eta_3 = \int_{c3}^c s_3^{-3} s_3 \quad , \quad (1.68)$$

где  $s_1, s_2$  и  $s_3$  - перемещения точек A, B и C при положительных обобщенных координатах  $\theta$  и  $\gamma$  (рис. I.7),  $\int_{c1}, \int_{c2}, \int_{c3}$  - статические деформации пружин.

При малых отклонениях от положения равновесия перемещения  $s_1, s_2$  и  $s_3$ , показанные на рис. I.7, приблизительно равны длинам дуг (для перемещения  $s_3$  - сумме) соответствующих окружностей. Поэтому

$$s_1 = l\theta \quad , \quad s_2 = 2l\theta \quad , \quad s_3 = 2l(\theta + \gamma) \quad . \quad (1.69)$$

Следовательно, отсчитывая потенциальную энергию пружин от положения равновесия, получим

$$П_{c1} = \frac{1}{2} c_1 (f_{ст1} - l\theta)^2 - \frac{1}{2} c_1 f_{ст1}^2 = \frac{1}{2} c_1 l^2 \theta^2 - c_1 f_{ст1} l \theta ,$$

$$П_{c2} = \frac{1}{2} c_2 (f_{ст2} - 2l\theta)^2 - \frac{1}{2} c_2 f_{ст2}^2 = \frac{1}{2} c_2 4l^2 \theta^2 - 2c_2 f_{ст2} l \theta , \quad (1.70)$$

$$П_{c3} = \frac{1}{2} c_3 (f_{ст3} - 2l\theta - 2l\gamma)^2 - \frac{1}{2} c_3 f_{ст3}^2 = \frac{1}{2} c_3 4l^2 (\theta + \gamma)^2 - 2c_3 f_{ст3} l (\theta + \gamma) .$$

Потенциальная энергия всей системы получается суммированием выражений (1.67) и (1.70)

$$\begin{aligned} П = m_1 g l \theta + m_2 g l (2\theta + \gamma) + \frac{1}{2} c_1 l^2 \theta^2 + 2c_2 l^2 \theta^2 + 2c_3 (\theta + \gamma)^2 l^2 - \\ - c_1 l \theta f_{ст1} - 2c_2 l \theta f_{ст2} - 2c_3 l (\theta + \gamma) f_{ст3} \quad . \end{aligned} \quad (1.71)$$

В положении устойчивого равновесия  $\theta = \gamma = 0$  потенциальная энергия согласно теореме Дирихле-Лагранжа имеет минимум, поэтому

$$\left. \frac{\partial П}{\partial \theta} \right|_{\substack{\theta=0 \\ \gamma=0}} = m_1 g l + 2m_2 g l - c_1 l f_{ст1} - 2c_2 l f_{ст2} - 2c_3 l f_{ст3} = 0 , \quad (1.72)$$

$$\left. \frac{\partial П}{\partial \gamma} \right|_{\substack{\theta=0 \\ \gamma=0}} = m_2 g l - 2c_3 l f_{ст3} = 0 \quad .$$

Следовательно, потенциальная энергия (1.71) с учетом условий экстремума (1.72) принимает вид

$$П = \frac{1}{2} c_1 l^2 \theta^2 + 2c_2 l^2 \theta^2 + 2c_3 (\theta + \gamma)^2 l^2 \quad . \quad (1.73)$$

Записывая выражение (1.73) в стандартной квадратичной форме, найдем

$$П \approx \frac{1}{2} (c_{11} \theta^2 + 2c_{12} \theta \gamma + c_{22} \gamma^2) \quad , \quad (1.74)$$

где  $c_{11} = l^2(c_1 + 4c_2 + 4c_3)$ ,  $c_{12} = 4l^2c_3$ ,  $c_{22} = 4l^2c_3$ .

Подставляя выражения для кинетической (I.66) и потенциальной (I.74) энергий в уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial T}{\partial \theta} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \theta}, \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}} \right] - \frac{\partial T}{\partial \gamma} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma},$$

приходим к уравнениям малых свободных колебаний системы в окрестности положения равновесия ( $\theta = \gamma = 0$ ):

$$a_{11}\ddot{\theta} + a_{12}\ddot{\gamma} + c_{11}\theta + c_{12}\gamma = 0, \quad (1.75)$$

$$a_{21}\ddot{\theta} + a_{22}\ddot{\gamma} + c_{21}\theta + c_{22}\gamma = 0.$$

Линейная алгебраическая система (I.33) ( $X=0$ ) для определения собственных значений и соответствующих собственных векторов в этом случае примет вид

$$\begin{bmatrix} a_{11}\lambda^2 + c_{11} & a_{12}\lambda^2 + c_{12} \\ a_{21}\lambda^2 + c_{21} & a_{22}\lambda^2 + c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = 0.$$

Собственные значения системы (I.75) будут определяться из решения алгебраического уравнения (I.34), а именно:

$$(a_{11}\lambda^2 + c_{11})(a_{22}\lambda^2 + c_{22}) - (a_{12}\lambda^2 + c_{12})^2 = 0 \quad (1.76)$$

и будут являться (как это было показано выше) при отсутствии диссипации чисто мнимыми

$$\lambda_1 = i\omega_1, \quad \lambda_2 = -i\omega_1, \quad \lambda_3 = i\omega_2, \quad \lambda_4 = -i\omega_2,$$

где  $\omega_{1,2}$  - собственные частоты системы.

Вычисляя собственные частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  системы из уравнения (I.76) с учетом значений параметров, приведенных в табл. I.1, получим

$$\omega_1 = 41.80 \text{ с}^{-1}, \quad \omega_2 = 72.48 \text{ с}^{-1}.$$

Каждой собственной частоте системы (одной паре комплексно

сопряженных корней) будут соответствовать собственный вектор, определяемый из системы

$$\begin{bmatrix} -a_{11}\omega_{1,2}^2 + c_{11} & -a_{12}\omega_{1,2}^2 + c_{12} \\ -a_{21}\omega_{1,2}^2 + c_{21} & -a_{22}\omega_{1,2}^2 + c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1^{(1,2)} \\ D_2^{(1,2)} \end{bmatrix} = 0. \quad (1.77)$$

Система (1.77) позволяет установить связи между компонентами собственных векторов, которые имеют вид

$$\frac{D_2^{(1)}}{D_1^{(1)}} = -\frac{-a_{11}\omega_1^2 + c_{11}}{-a_{12}\omega_1^2 + c_{12}} = -\frac{-a_{12}\omega_1^2 + c_{12}}{-a_{22}\omega_1^2 + c_{22}} = \chi_1, \quad (1.78)$$

$$\frac{D_2^{(2)}}{D_1^{(2)}} = -\frac{-a_{11}\omega_2^2 + c_{11}}{-a_{12}\omega_2^2 + c_{12}} = -\frac{-a_{12}\omega_2^2 + c_{12}}{-a_{22}\omega_2^2 + c_{22}} = \chi_2,$$

где  $\chi_1$  и  $\chi_2$  иногда называют коэффициентами распределения амплитуд на частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Эти величины определяют отношение амплитуд главных колебаний для данной системы.

Коэффициенты распределения для рассматриваемой системы будут иметь следующие значения:  $\chi_1 = -0.61$ ,  $\chi_2 = -3.10$ .

Отсюда получаем  $D_2^{(1)} = \chi_1 D_1^{(1)}$ ,  $D_2^{(2)} = \chi_2 D_1^{(2)}$ . Учитывая эти соотношения, нетрудно доказать, что и все амплитуды в решении (1.44) будут также иметь аналогичную связь, так как они пропорциональны соответствующим компонентам собственных векторов:

$$K_2^{(1)} = \chi_1 K_1^{(1)}, \quad K_2^{(2)} = \chi_2 K_1^{(2)}.$$

Кроме того,

$$\varphi_1^{(1)} = \varphi_2^{(1)} = \varphi^{(1)}, \quad \varphi_1^{(2)} = \varphi_2^{(2)} = \varphi^{(2)},$$

что следует из выражений (1.45).

Тогда, вводя обозначения  $K_1^{(1)} = C_1$ ,  $K_1^{(2)} = C_2$ , запишем общее решение системы (1.72) в виде

$$\theta = C_1 \cos(\omega_1 t + \varphi^{(1)}) + C_2 \cos(\omega_2 t + \varphi^{(2)}), \quad (1.79)$$

$$\gamma = C_1 \chi_1 \cos(\omega_1 t + \varphi^{(1)}) + C_2 \chi_2 \cos(\omega_2 t + \varphi^{(2)}),$$

где произвольные постоянные  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\varphi^{(1)}$  и  $\varphi^{(2)}$  определяются из начальных условий.

С другой стороны, учитывая вид решения (I.49) для главных координат, соотношения (I.79) можно трактовать как формулы перехода от главных координат  $\xi_1, \xi_2$  к координатам  $q_1, q_2$ , то есть

$$\theta = \xi_1 + \xi_2, \quad \gamma = \chi_1 \xi_1 + \chi_2 \xi_2. \quad (1.80)$$

Подставляя замену (I.80) в исходные уравнения (I.75), получим

$$(a_{11} + \chi_1 a_{12}) \ddot{\xi}_1 + (a_{11} + \chi_2 a_{12}) \ddot{\xi}_2 + (c_{11} + \chi_1 c_{12}) \xi_1 + (c_{11} + \chi_2 c_{12}) \xi_2 = 0, \quad (1.81)$$

$$(a_{21} + \chi_1 a_{22}) \ddot{\xi}_1 + (a_{21} + \chi_2 a_{22}) \ddot{\xi}_2 + (c_{21} + \chi_1 c_{22}) \xi_1 + (c_{21} + \chi_2 c_{22}) \xi_2 = 0.$$

Причем нетрудно доказать равенства

$$\begin{aligned} a_{11} + \chi_1 a_{12} &= \frac{a_{11} c_{12} - c_{11} a_{12}}{c_{12} - a_{12} \omega_1^2}, & c_{11} + \chi_1 c_{12} &= \frac{a_{11} c_{12} - c_{11} a_{12}}{c_{12} - a_{12} \omega_1^2} \omega_1^2, \\ a_{11} + \chi_2 a_{12} &= \frac{a_{11} c_{12} - c_{11} a_{12}}{c_{12} - a_{12} \omega_2^2}, & c_{11} + \chi_2 c_{12} &= \frac{a_{11} c_{12} - c_{11} a_{12}}{c_{12} - a_{12} \omega_2^2} \omega_2^2, \\ a_{21} + \chi_1 a_{22} &= \frac{a_{21} c_{22} - c_{21} a_{22}}{c_{22} - a_{22} \omega_1^2}, & c_{21} + \chi_1 c_{22} &= \frac{a_{21} c_{22} - c_{21} a_{22}}{c_{22} - a_{22} \omega_1^2} \omega_1^2, \\ a_{21} + \chi_2 a_{22} &= \frac{a_{21} c_{22} - c_{21} a_{22}}{c_{22} - a_{22} \omega_2^2}, & c_{21} + \chi_2 c_{22} &= \frac{a_{21} c_{22} - c_{21} a_{22}}{c_{22} - a_{22} \omega_2^2} \omega_2^2. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Подставляя выражения (I.82) в уравнения (I.81), получим

$$\frac{\ddot{\xi}_1}{c_{12} - a_{12} \omega_1^2} + \frac{\ddot{\xi}_2}{c_{12} - a_{12} \omega_2^2} + \frac{\omega_1^2 \xi_1}{c_{12} - a_{12} \omega_1^2} + \frac{\omega_2^2 \xi_2}{c_{12} - a_{12} \omega_2^2} = 0, \quad (1.83)$$

$$\frac{\overset{\dots}{\xi_1}}{c_{22} - a_{22}\omega_1^2} + \frac{\overset{\dots}{\xi_2}}{c_{22} - a_{22}\omega_2^2} + \frac{\omega_1^2 \xi_1}{c_{22} - a_{22}\omega_1^2} + \frac{\omega_2^2 \xi_2}{c_{22} - a_{22}\omega_2^2} = 0.$$

Выражая из системы (I.83) производные  $\overset{\dots}{\xi_1}$  и  $\overset{\dots}{\xi_2}$ , найдем

$$\overset{\dots}{\xi_1} = \Delta_{\xi_1} / \Delta, \quad \overset{\dots}{\xi_2} = \Delta_{\xi_2} / \Delta. \quad (I.84)$$

Здесь

$$\Delta = \frac{1}{(c_{12} - a_{12}\omega_1^2)(c_{22} - a_{22}\omega_2^2)} - \frac{1}{(c_{22} - a_{22}\omega_1^2)(c_{12} - a_{12}\omega_2^2)},$$

$$\Delta_{\xi_1} = - \left[ \frac{\omega_1^2 \xi_1}{c_{12} - a_{12}\omega_1^2} + \frac{\omega_2^2 \xi_2}{c_{12} - a_{12}\omega_2^2} \right] \frac{1}{c_{22} - a_{22}\omega_2^2} +$$

$$+ \left[ \frac{\omega_1^2 \xi_1}{c_{22} - a_{22}\omega_1^2} + \frac{\omega_2^2 \xi_2}{c_{22} - a_{22}\omega_2^2} \right] \frac{1}{c_{12} - a_{12}\omega_2^2} = -\omega_1^2 \xi_1 \Delta,$$

(I.85)

$$\Delta_{\xi_2} = - \left[ \frac{\omega_1^2 \xi_1}{c_{22} - a_{22}\omega_1^2} + \frac{\omega_2^2 \xi_2}{c_{22} - a_{22}\omega_2^2} \right] \frac{1}{c_{12} - a_{12}\omega_1^2} +$$

$$+ \left[ \frac{\omega_1^2 \xi_1}{c_{12} - a_{12}\omega_1^2} + \frac{\omega_2^2 \xi_2}{c_{12} - a_{12}\omega_2^2} \right] \frac{1}{c_{22} - a_{22}\omega_1^2} = -\omega_2^2 \xi_2 \Delta.$$

Подставляя выражения (I.85) в равенства (I.84), получим

$$\overset{\dots}{\xi_1} + \omega_1^2 \xi_1 = 0, \quad \overset{\dots}{\xi_2} + \omega_2^2 \xi_2 = 0,$$

что и требовалось доказать.

Поэтому уравнения, определяющие первое главное колебание, примут вид

$$\theta = \xi_1 = C_1 \cos(\omega_1 t + \varphi^{(1)}) , \quad \gamma = \chi_1 \xi_1 = C_1 \chi_1 \cos(\omega_1 t + \varphi^{(1)}) .$$

Уравнения, определяющие второе главное колебание, имеют следующую форму:

$$\theta = \xi_2 = C_2 \cos(\omega_2 t + \varphi^{(2)}) , \quad \gamma = \chi_2 \xi_2 = C_2 \chi_2 \cos(\omega_2 t + \varphi^{(2)}) .$$

Коэффициенты распределения  $\chi_1$  и  $\chi_2$  часто называют коэффициентами собственных форм, так как их значения определяют отношения амплитуд колебаний различных главных координат. Значения коэффициентов  $\chi_1$  и  $\chi_2$  определяются только параметрами рассматриваемой системы (табл. I.1) и не зависят от начальных условий. Если начальные условия движения системы выбрать из условия  $C_2 = 0$ , то получим форму первого главного колебания системы, если - из условия  $C_1 = 0$ , то форму второго главного колебания системы.

### I.6. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы

Рассмотрим воздействие периодической возмущающей силы, не зависящей от обобщенной координаты, на механическую систему с одной степенью свободы. Такая сила называется возмущающей и вызывает в системе возникновение вынужденных колебаний. В примере движения груза на пружине (рис. I.1) такой возмущающей силой может являться, например, периодическая внешняя сила, действующая на груз по оси  $Ox$   $Q_b(t)$  и зависящая явно от времени. Уравнения движения такой системы получаются из уравнений Лагранжа (I.1) добавлением силы  $Q_b(t)$ :

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q} + Q_T + Q_b(t) . \quad (1.86)$$

После проведения дифференцирования уравнения (1.86) преобразуются к виду

$$m \ddot{q} + \kappa \dot{q} + c q = Q_b(t) . \quad (1.87)$$

Не ограничивая общности, можно считать, что сила  $Q_b(t)$  изменяется по закону синуса:  $Q_b(t) = f \sin pt$ , где  $f$  и  $p$  - амплитуда и частота периодического возмущения. Более сложное периодическое возмущение, состоящее из нескольких периодических сил, вследствие справедливости для линейного уравнения (1.87) принципа суперпозиции решений может быть рассмотрено аналогично. К дифференциальному уравнению типа (1.87) приводятся также некоторые задачи о движении систем с кинематическим возбуждением, когда колебания вызываются периодическим движением какой-либо точки механической системы. Так, например, если точка крепления пружины груза (рис. I.1) совершает горизонтальные движения по закону  $x_2(t)$ , то кинетическая и потенциальная энергии системы будут иметь вид

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{q} + \dot{x}_2)^2 , \quad \Pi = \frac{1}{2} c q^2 ,$$

где  $q = x$ ,  $\dot{q}$  и  $\dot{x}_2$  - относительная и переносная скорости груза. Откуда, после подстановки в уравнения Лагранжа (1.86), нетрудно получить

$$m \ddot{q} + \kappa \dot{q} + c q = - m \ddot{x}_2 .$$

Как видно, это уравнение по форме совпадает с уравнением (1.87) с силовым воздействием, если ввести эквивалентную вынуждающую силу инерции  $Q_b(t) = -m \ddot{x}_2$ .

Решение неоднородного линейного уравнения (1.87), как известно, ищется в виде суммы двух слагаемых

$$q = q^0 + q^* , \quad (1.88)$$

где  $q^0$  - решение однородного уравнения,  $q^*$  - некоторое частное решение неоднородного уравнения (1.87).

Функция  $q^0(t)$  соответствует свободным колебаниям механической системы под действием потенциальных и диссипативных сил, которые подробно изучались в разделе I.I. Как было установлено, в результате действия силы трения  $\alpha \geq 0$  обобщенная координата  $q^0(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  стремится к нулю, то есть свободные колебания системы с течением времени затухают. Поэтому определяющую роль в решении (I.88) играет второе слагаемое (частное решение).

Для определения функции  $q^*(t)$  перейдем в уравнении (I.87) к комплексным переменным, положив  $Q_b(t) = f \exp(ipt)$ , где  $i$  - мнимая единица. Переход в комплексную область позволяет упростить аналитические выкладки, сделать их более наглядными. С другой стороны, используя формулу Эйлера, получим  $Q_b(t) = f(\cos pt + i \sin pt)$ . Так как для линейной системы (I.87) справедлив принцип суперпозиции решений, то для получения частного решения, соответствующего возмущающей силе  $Q_b(t) = f \sin pt$ , достаточно найти частное решение для функций  $Q_b(t) = f \exp(ipt)$  и взять от этого решения мнимую часть.

Итак, будем искать частное решение неоднородного уравнения

$$m \ddot{q} + \alpha \dot{q} + c q = f \exp(ipt) \quad (I.89)$$

в виде

$$q^* = G \exp(ipt), \quad (I.90)$$

где  $G$  - амплитуда частного решения.

Для определения амплитуды  $G$  подставим решение (I.90) в уравнение (I.89), тогда, сокращая на экспоненту  $\exp(ipt)$ , получим

$$G = \frac{f}{-p^2 m + i p \alpha + c}$$

В этом случае частное решение запишется в виде

$$q^* = \frac{f}{-p^2 m + i\mu p + c} \exp(ipt) \quad (1.91)$$

В частном случае при отсутствии диссипации будем иметь

$$q^* = \frac{f}{-p^2 m + c} \exp(ipt) \quad (1.92)$$

Решение (1.92) будет ограниченным, если знаменатель  $-p^2 m + c \neq 0$ . Случай  $-p^2 m + c = 0$  возможен, если  $p$  равна собственной частоте свободных колебаний  $p = \omega$ , так как  $\omega = (c/m)^{1/2}$ . Поэтому при  $p = \omega$  решение  $q^*(t) \rightarrow \infty$  и возникает так называемое явление резонанса. При наличии в системе силы трения  $\mu \neq 0$  явление резонанса также имеет место (возрастание амплитуды колебаний  $G$ ), однако при этом решение  $q^*(t)$  ограничено.

Установим некоторые характерные свойства частного решения (1.92). Для этого умножим числитель и знаменатель выражения (1.92) на  $-p^2 m - i\mu p + c$  и, выделяя в решении мнимую часть, найдем

$$\text{Im}(q^*(t)) = \frac{f}{m} \frac{[(\omega^2 - p^2) \sin pt - \mu p \cos pt]}{(\omega^2 - p^2)^2 + \mu^2 p^2} \quad (1.93)$$

где  $\mu = \mu/m$ .

Частное решение (1.93) соответствует, как это было указано выше, периодической силе вида  $Q_b = f \sin pt$ .

Приведем решение к виду, удобному для аналитического анализа, тогда

$$\text{Im}(q^*(t)) = f V \sin(pt - \theta) \quad (1.94)$$

где  $V = [(1 - \bar{p}^2)^2 + \bar{\mu}^2 \bar{p}^2]^{-1/2} / m \omega^2$  - коэффициент, показывающий, во сколько раз увеличится амплитуда колебаний решения по сравнению с амплитудой периодического воздействия;  $\bar{p} = p/\omega$ ,  $\bar{\mu} = \mu/\omega$ ,

$$\cos \theta = (1 - \bar{p}^2) [(1 - \bar{p}^2)^2 + \bar{\mu}^2 \bar{p}^2]^{-1/2} \quad (1.95)$$

$$\sin \theta = \bar{\mu} \bar{p} [(1-\bar{p}^2)^2 + \bar{\mu}^2 \bar{p}^2]^{-1/2}$$

$\theta$  - угол, показывающий, на сколько отстает решение (I.94) от действующего возмущения.

При этом зависимость  $V=V(\bar{p})$  часто называют амплитудной характеристикой системы, а зависимость  $\theta=\theta(\bar{p})$  - фазовой характеристикой. Найдем максимум функции  $V$  по параметру  $\bar{p}=r/\omega$ , определяющему отношение частот системы. Максимум функции  $V(\bar{p})$  будет иметь место ( $\omega=\text{const}$ ) при минимуме функции  $\varphi(x)=(1-x)^2 + \bar{\mu}^2 x$  ( $x=\bar{p}^2$ ), входящей в знаменатель выражения для  $V$ . Поэтому, определяя первую и вторую производные функции  $\varphi(x)$ , получим

$$\frac{d\varphi}{dx} = 2(x-1) + \bar{\mu}^2, \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 2 > 0.$$

Следовательно, при  $x=x_3=1-\bar{\mu}^2/2$  функция  $\varphi(x)$  имеет минимум, а функция  $V(\bar{p})$  при  $\bar{p}_3^2=1-\bar{\mu}^2/2$  имеет максимум, где  $x_3$  и  $\bar{p}_3$  - экстремальные значения соответствующих параметров. Подставляя  $\bar{p}_3$  в выражение для функции  $V(\bar{p})$ , нетрудно вычислить максимально возможное значение этого коэффициента:

$$\max V = \frac{1}{\bar{p}_3^2} = \frac{1}{\pi \omega^2 \bar{\mu} (1-\bar{\mu}^2/2)^{1/2}}. \quad (1.96)$$

Анализ выражения (I.96) показывает, что при уменьшении демпфирования (параметра  $\bar{\mu}=\alpha/\pi\omega$ ) максимум функции  $V(\bar{p})$  увеличивается в соответствии с формулой (I.96) и  $\max V \rightarrow \infty$  при  $\bar{\mu} \rightarrow 0$ , что и было указано ранее. При этом максимум функции  $V(\bar{p})$  достигается в точке  $\bar{p}_3^2=1-\bar{\mu}^2/2$  немного правее точки резонанса  $\bar{p}=1$  и смещается вправо при увеличении демпфирования (параметра  $\bar{\mu}$ ). Учитывая приведенные рассуждения, нетрудно построить несколько амплитудных характеристик  $V(\bar{p})$  при различных значениях параметра  $\bar{\mu}$  ( $m=1, \omega=1$ ) (рис. I.8). Фазовые характеристики системы при этом в

Амплитудные характеристики системы  
при различных значениях параметра  $\bar{\mu}$   
( $\bar{\mu}_1 < \bar{\mu}_2 < \bar{\mu}_3$ )

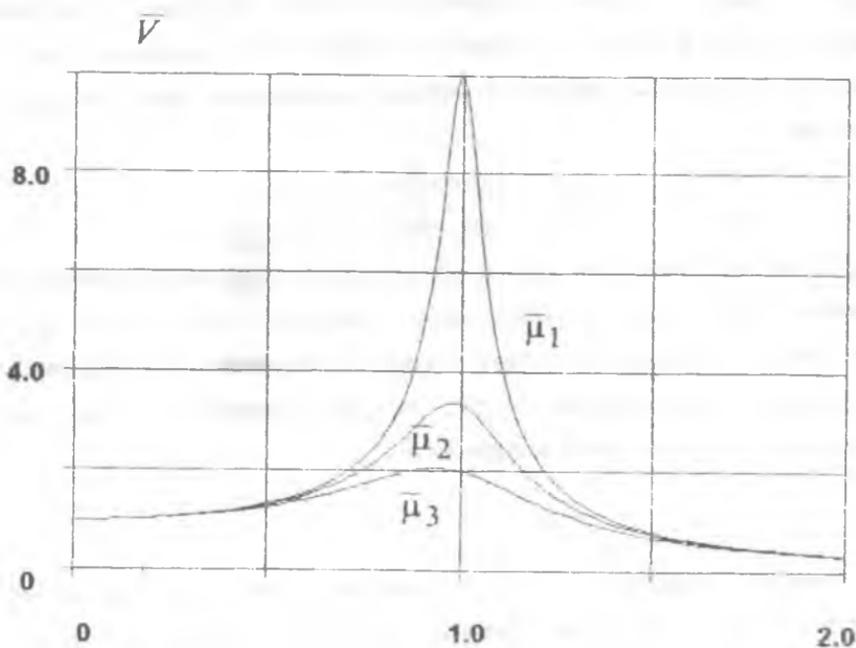


Рис. 1.8

Фазовые характеристики системы  
при различных значениях параметра  $\mu$

$$(\mu_1 < \mu_2 < \mu_3)$$

$\theta$ , град

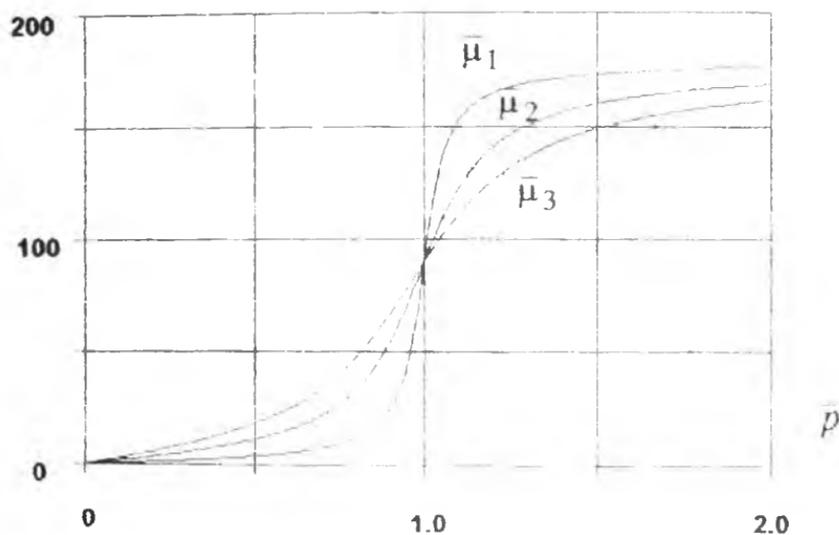


Рис. 1.9

соответствии с выражениями (I.95) будут иметь вид, показанный на рис. I.9. В окрестности резонанса  $\bar{p} \approx 1$  частное решение отстает от действующего периодического возмущения приблизительно на  $\pi/2$ .

### I.7. Вынужденные колебания системы с несколькими степенями свободы

Рассмотрим воздействие периодических возмущающих сил, не зависящих от обобщенных координат, на механическую систему с  $\nu$  степенями свободы, движение которой описывается уравнениями Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} + Q_{b_j}(t), \quad j=1, \dots, \nu, \quad (I.97)$$

где  $T$  и  $\Pi$  - кинетическая и потенциальная энергии системы,  $F$  - диссипативная функция (см. раздел I.3),  $Q_{b_j}(t) = f_j \sin pt$  - периодические возмущающие силы,  $f_j$  - амплитуды возмущающих сил,  $p$  - частота периодических возмущений.

В случае малых колебаний механической системы в окрестности устойчивого положения равновесия (устойчивость здесь понимается в смысле устойчивости свободных колебаний механической системы при  $Q_{b_j} = 0$ , см. раздел I.3) функции  $T, \Pi$  и  $F$  задаются положительно определенными квадратичными формами вида

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T A \dot{q}, \quad \Pi = \frac{1}{2} q^T C q, \quad F = \frac{1}{2} \dot{q}^T X \dot{q}, \quad (I.98)$$

где  $A = [a_{jk}]_{\nu \times \nu}$ ,  $C = [c_{jk}]_{\nu \times \nu}$ ,  $X = [x_{jk}]_{\nu \times \nu}$  - квадратные симметричные матрицы с постоянными элементами,  $q = [q_j]_{\nu \times 1}$  - матрица-столбец обобщенных координат.

Подставляя выражения (I.98) в систему уравнений (I.97) и

проводя необходимые преобразования (см. раздел I.3), получим

$$A \ddot{q} + X \dot{q} + C q = f \sin pt \quad , \quad (1.99)$$

где  $f = [f_j]_{n \times 1}$  - матрица-столбец амплитуд возмущающих сил.

Решение неоднородной системы дифференциальных уравнений движения (I.99) определяется, как и для системы с одной степенью свободы, в виде

$$q = q^o + q^* \quad . \quad (1.100)$$

Решение однородной системы  $q^o(t)$  было подробно изучено в разделе I.3. Как было установлено, в результате действия диссипативных сил  $F \geq 0$  решение  $q^o(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Поэтому рассмотрим определение частного решения  $q^*(t)$ , соответствующего вынужденным колебаниям системы (I.99). Переходя к комплексным переменным, положим  $Q_{vj}(t) = f_j \exp(ipt)$ , тогда

$$A \ddot{q} + X \dot{q} + C q = f \exp(ipt) \quad . \quad (1.101)$$

Частное решение системы (I.101) будем искать в виде

$$q^* = G \exp(ipt) \quad , \quad (1.102)$$

где  $G = [G_j]_{n \times 1}$  - матрица-столбец амплитуд частного решения.

Для определения вектора  $G$  подставим решение (I.102) в систему (I.101), тогда, сокращая на экспоненту  $\exp(ipt)$ , получим

$$(-p^2 A + ipX + C) G = f \quad (1.103)$$

или  $G = (-p^2 A + ipX + C)^{-1} f$  ,

где  $(-p^2 A + ipX + C)^{-1}$  матрица, обратная матрице  $(-p^2 A + ipX + C)$ .

В этом случае частное решение запишется в виде

$$q^* = (-p^2 A + ipX + C)^{-1} f \exp(ipt) \quad . \quad (1.104)$$

В частном случае при отсутствии диссипации  $X=0$  будем иметь

$$q^* = (-p^2 A + C)^{-1} f \exp(ipt) \quad . \quad (1.105)$$

Решение (I.105) будет ограниченным, если определитель  $\det(-p^2 A + C) \neq 0$ . Обращение в ноль этого определителя возможно, если частота внешнего периодического воздействия  $p$  равна одной из

собственных частот системы  $\omega_j (j=1, \dots, \nu)$ , так как характеристическое уравнение для определения частот системы (I.101) при  $X=0$  имеет вид  $\det(\lambda^2 A + C) = \det(-\omega^2 A + C) = 0$ . Поэтому при  $p \rightarrow \omega_j$  решение  $q^*(t) \rightarrow \infty$  и возникает явление резонанса. При наличии в системе диссипативных сил  $X \neq 0$  явление резонанса также имеет место (возрастание амплитуд колебаний  $G$ ), однако при этом решение  $q^*(t)$  ограничено.

Остановимся подробнее на случае системы с двумя степенями свободы при отсутствии диссипации  $X=0$ . Тогда, определяя мнимую часть решения (I.105), получим

$$q_1 = G_1 \sin p t \quad , \quad q_2 = G_2 \sin p t \quad ,$$

где  $G_1$  и  $G_2$  - амплитуды вынужденных колебаний, определяемые из решения системы алгебраических уравнений (I.103) ( $X=0$ ):

$$\begin{bmatrix} -a_{11}p^2 + c_{11} & -a_{12}p^2 + c_{12} \\ -a_{21}p^2 + c_{21} & -a_{22}p^2 + c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} . \quad (1.106)$$

Откуда, решая линейные алгебраические уравнения (I.106), нетрудно получить

$$G_1 = \frac{f_1(-a_{22}p^2 + c_{22}) - f_2(-a_{12}p^2 + c_{12})}{(-a_{11}p^2 + c_{11})(-a_{22}p^2 + c_{22}) - (-a_{12}p^2 + c_{12})^2} ,$$

$$G_2 = \frac{-f_1(-a_{12}p^2 + c_{12}) + f_2(-a_{11}p^2 + c_{11})}{(-a_{11}p^2 + c_{11})(-a_{22}p^2 + c_{22}) - (-a_{12}p^2 + c_{12})^2} . \quad (1.107)$$

Условие  $(-a_{11}p^2 + c_{11})(-a_{22}p^2 + c_{22}) - (-a_{12}p^2 + c_{12})^2 = 0$  определяет два резонансных значения частоты  $p$ : они равны собственным частотам  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . При изучении вынужденных колебаний с двумя степенями свободы обычно строят зависимости  $G_1(p)$  и  $G_2(p)$ , называемые амплитудными характеристиками системы. Пример

построения амплитудных характеристик для конкретной системы с двумя степенями разбирается в разделе I.2.

Рассмотрим далее частный случай выражений (I.107), когда  $f_2=0$ ,  $a_{12}=a_{21}=0$ . В этом случае формулы (I.107) примут вид

$$G_1 = \frac{f_1(-a_{22} p^2 + c_{22})}{(-a_{11} p^2 + c_{11})(-a_{22} p^2 + c_{22}) - c_{12}^2}$$

$$G_2 = \frac{-f_1 c_{12}}{(-a_{11} p^2 + c_{11})(-a_{22} p^2 + c_{22}) - c_{12}^2}$$

В этом случае условие  $-a_{22} p^2 + c_{22} = 0$  определяет частоту  $p$ , при которой вынужденные колебания по первой обобщенной координате отсутствуют. В этом результате содержится возможность практической борьбы с вынужденными колебаниями / I /. Допустим, что имеется система с одной степенью свободы, на которую действует периодическая вынуждающая сила. Добавив в систему дополнительную массу на упругой связи и выбрав жесткость пружины и дополнительную массу из условия  $-a_{22} p^2 + c_{22} = 0$ , можно добиться устранения колебаний по обобщенной координате  $q_1$ . В этом случае дополнительная часть системы называется динамическим гасителем колебаний / I /.

### I.8. Пример исследования вынужденных колебаний линейной системы с двумя степенями свободы

Рассмотрим движение системы с двумя степенями свободы, показанной на рис. I.5, под действием периодического момента  $M = f \sin pt$ , где  $f$  и  $p$  — амплитуда и частота периодического возмущения, приложенного к первому стержню. Свободные колебания

данной системы исследовались в разделе I.5. Параметры системы приводятся в таблице I.I. Кинетическая и потенциальная энергии системы определены в разделе I.5 и имеют вид (I.66) и (I.74). Поэтому дифференциальные уравнения, описывающие вынужденные колебания системы в обобщенных координатах  $\theta$  и  $\gamma$ , имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} + Q_M, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \gamma} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma},$$

где  $Q_M = M$  — обобщенная сила, соответствующая возмущающему моменту.

Отсюда, повторяя выкладки раздела I.5, получим

$$\begin{aligned} a_{11} \ddot{\theta} + a_{12} \ddot{\gamma} + c_{11} \dot{\theta} + c_{12} \dot{\gamma} &= f \sin p t, \\ a_{21} \ddot{\theta} + a_{22} \ddot{\gamma} + c_{21} \dot{\theta} + c_{22} \dot{\gamma} &= 0 \end{aligned} \quad (1.108)$$

Частное решение системы (I.108), определяющее вынужденные колебания, имеет вид

$$\theta = G_{\theta} \sin p t, \quad \gamma = G_{\gamma} \sin p t,$$

где амплитуды  $G_{\theta}$  и  $G_{\gamma}$  вынужденных колебаний определяются из соотношения (I.107) в виде

$$\begin{aligned} G_{\theta} &= \frac{f (-a_{22} p^2 + c_{22})}{(a_{11} a_{22} + a_{12}^2)(p^2 - \omega_1^2)(p^2 - \omega_2^2)}, \\ G_{\gamma} &= \frac{-f (-a_{12} p^2 + c_{12})}{(a_{11} a_{22} + a_{12}^2)(p^2 - \omega_1^2)(p^2 - \omega_2^2)}. \end{aligned} \quad (1.109)$$

Формулы (I.109) определяют амплитудные характеристики  $G_{\theta}(p)$  и  $G_{\gamma}(p)$  данной системы. Рассмотрим поведение амплитуд  $G_{\theta}$  и  $G_{\gamma}$  для трех характерных интервалов изменения частоты  $p$ :

$$0 \leq p < \omega_1, \quad \omega_1 < p < \omega_2, \quad \omega_2 < p < \infty$$

I. Если  $0 \leq p < \omega_1$ , то  $p^2 - \omega_1^2 < 0$ ,  $p^2 - \omega_2^2 < 0$  и  $G_{\theta} > 0$ ,  $G_{\gamma} < 0$ , так как  $a_{11} a_{22} + a_{12}^2 = 2.32 > 0$ ,  $f > 0$ ,  $c_{22} > 0$ ,  $c_{12} > 0$ ,  $-a_{22} p^2 + c_{22} > 0$ .

$f(-a_{12}p^2 + c_{12}) > 0$ . С ростом величины  $p$  амплитуды  $G_\theta$  и  $G_\gamma$  возрастают по абсолютной величине. При этом колебания первого стержня происходят в одной фазе с изменением возмущающего момента. Отрицательный знак амплитуды  $G_\gamma$  показывает, что вынужденные колебания второго стержня осуществляются в противофазе с изменением возмущающего момента. При  $p = \omega_1 = 41.80 \text{ c}^{-1}$  в системе наступает резонанс и функции  $G_\theta(p)$ ,  $G_\gamma(p)$  имеют бесконечный разрыв.

2. Если  $\omega_1 < p < \omega_2$ , то  $p^2 - \omega_1^2 > 0$ ,  $p^2 - \omega_2^2 < 0$  и знак знаменателя выражений (I.109) отрицательный. При определении знаков амплитуд  $G_\theta$  и  $G_\gamma$  необходимо рассмотреть числители выражений (I.109), в которых стоят линейные функции от  $p^2$ . Эти функции обращаются в ноль при

$$p_1 = (c_{22}/a_{22})^{1/2} \approx 63.25 \text{ c}^{-1},$$

$$p_2 = (c_{12}/a_{12})^{1/2} \approx 51.64 \text{ c}^{-1}.$$

Поэтому, если  $\omega_1 < p < p_1$ , то  $G_\theta < 0$  и колебания первого стержня происходят в противофазе с возмущающим моментом, если  $p_1 < p < \omega_2$  - одной фазе. Аналогично, для второго стержня, если  $\omega_1 < p < p_2$ , то  $G_\gamma > 0$  и его колебания происходят в одной фазе с возмущающим моментом, если  $p_2 < p < \omega_2$  - в противофазе. Если  $p = p_1$  или  $p = p_2$ , то вынужденные колебания соответственно стержней первого или второго отсутствуют. При  $p = \omega_2 = 72.48 \text{ c}^{-1}$  в системе наступает второй резонанс.

3. Если  $\omega_2 < p < \infty$ , то  $p^2 - \omega_1^2 < 0$ ,  $p^2 - \omega_2^2 < 0$ . Следовательно, знаменатели выражений положительны, причем в этом интервале  $G_\theta < 0$  и  $G_\gamma > 0$ . Поэтому колебания первого стержня осуществляются в противофазе с возмущающим моментом, а второго стержня - в одной фазе. С ростом  $p$  амплитуды  $G_\theta$  и  $G_\gamma$  уменьшаются по абсолютной величине и стремятся к нулю при  $p \rightarrow \infty$ .

На рис. I.10 показаны амплитудные характеристики  $G_{\theta}(p)$  и  $G_{\gamma}(p)$ , построенные с применением формул (I.109), вид которых полностью соответствует проведенному аналитическому анализу.

Амплитудные характеристики системы  
с двумя степенями свободы

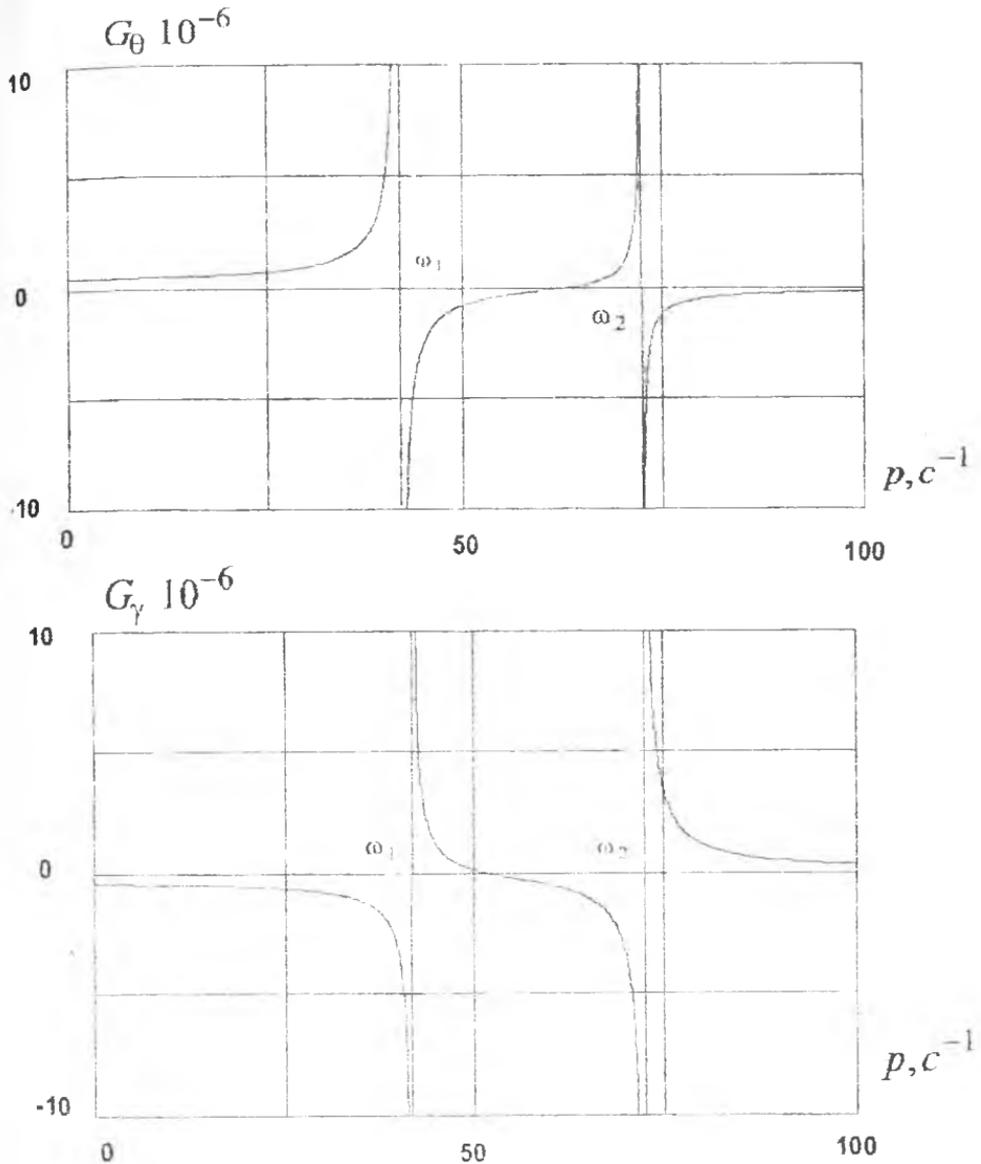


Рис. 1.10

## 2. АВТОКОЛЕБАНИЯ В МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

### 2.1. Причины возникновения автоколебаний

В первой главе настоящего пособия рассматривались колебания механических систем в окрестности устойчивых положений равновесия. Однако эти методы не позволяют изучить дальнейшее развитие колебаний, если положение равновесия из-за каких-либо причин становится неустойчивым. В частности, часто возрастание амплитуды колебаний приводит к появлению периодических движений с постоянной или почти постоянной амплитудой, величина которой поддерживается, несмотря на неизбежные потери энергии в системе. Такой режим обычно называют автоколебаниями. Для существования автоколебаний необходим приток энергии в систему, причем источник энергии обычно не обладает колебательными свойствами. В рамках теории линейных механических систем объяснить явление автоколебаний не представляется возможным, поэтому в этом случае приходится исследовать нелинейные системы. Рассмотрим, например, колебательную систему с одной степенью свободы (груз на пружине, рис.1.1), на которую действует нелинейная сила трения  $Q_T = -(\alpha_1 + \alpha_3 q^2) \dot{q}$  ( $q = x, \alpha_1 < 0, \alpha_3 > 0$ ). Уравнения движения такой системы будут иметь вид

$$m \ddot{q} + c \dot{q} = -(\alpha_1 + \alpha_3 q^2) \dot{q} \quad (2.1)$$

При малых отклонениях от положения равновесия ( $q = \dot{q} = 0$ ) влияние линейного члена в силе трения  $Q_T$  является определяющим, что приводит при  $\alpha_1 < 0$  (антидемпфирование) к возрастанию амплитуды колебаний. С ростом же отклонений от положения равновесия будет увеличиваться демпфирующее влияние нелинейного члена в силе трения  $Q_T$  и при  $\alpha_3 > 0$  движение рассматриваемой системы будет

стремиться при некотором балансе подводимой и теряемой энергии к режиму автоколебаний. Эти качественные рассуждения не являются строгими, однако они позволяют понять с физической точки зрения причину возникновения автоколебаний. Более строго существование автоколебаний можно обосновать введением в рассмотрение полной механической энергии груза (рис.1.1), вычисленной без учета силы трения:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + \frac{1}{2} c q^2 \quad (2.2)$$

Определим полную производную энергии (2.2) в силу возмущенной системы (2.1), тогда

$$dE/dt = (m \ddot{q} + c q) \dot{q} = -(\alpha_1 + \alpha_3 q^2) \dot{q}^2$$

Поэтому при  $dE/dt > 0$  или при  $q^2 < -\alpha_1/\alpha_3 = q_*^2$  ( $|q| < |q_*|$ ), где  $q_*$  - некоторое равновесное значение координаты  $q$ , энергия системы увеличивается, а при  $dE/dt < 0$  или  $q^2 > -\alpha_1/\alpha_3 = q_*^2$  ( $|q| > |q_*|$ ) - энергия уменьшается. Следовательно, движение рассматриваемой системы стремится к некоторому равновесному состоянию, которое отлично от точки равновесия  $q=q=0$ . В системе возникают автоколебания. Возникновение автоколебаний иллюстрирует рис.2.1,а, где показано поведение системы на фазовой плоскости  $(q, \dot{q})$ . На нем кривая 1 соответствует движению, возникающему при малых отклонениях от положения равновесия ( $|q| < |q_*|$ ), а кривая 2 - движению при больших отклонениях ( $|q| > |q_*|$ ). Замкнутая кривая, к которой неограниченно приближаются кривые 1 и 2, называется предельным циклом и описывает режим устойчивых автоколебаний.

Определение 2.1.

Замкнутая траектория на фазовой плоскости называется предельным циклом, если она изолирована от всех других замкнутых траекторий.

Замкнутая траектория является изолированной от других

### Виды предельных циклов

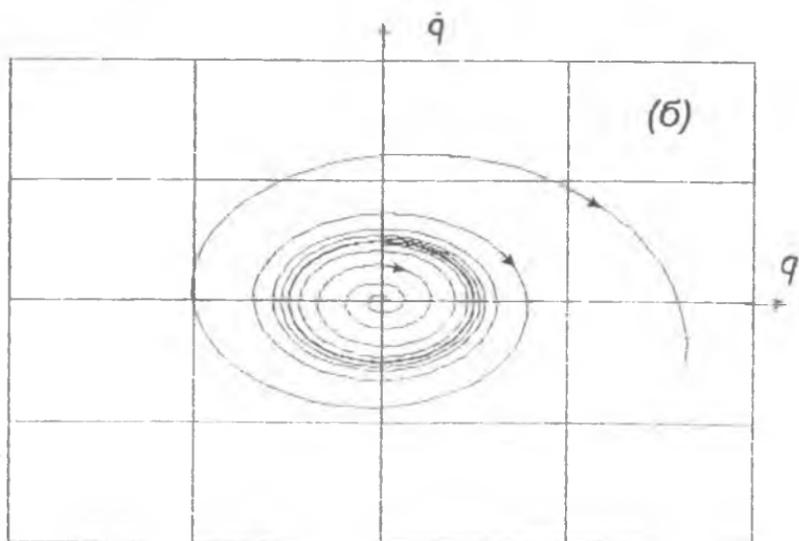
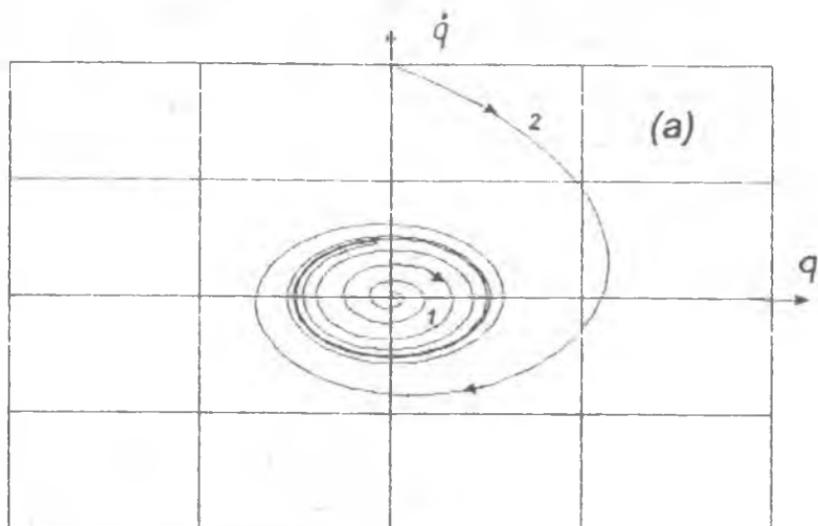


Рис.2.1

замкнутых траекторий, если существует некоторая окрестность этой траектории, не содержащая других замкнутых траекторий.

Замечание.

Замкнутая траектория, существующая в консервативных системах в окрестности особых точек типа центра (рис.1.2), не является предельным циклом, так как любая ее окрестность содержит другие замкнутые траектории.

Различают следующие типы предельных циклов:

1) устойчивый предельный цикл (рис.2.1,а), к которому стремятся все фазовые траектории в некоторой его окрестности; 2) неустойчивый предельный цикл (рис.2.1,б), от которого удаляются фазовые траектории; 3) полуустойчивый предельный цикл, с одной стороны которого траектории стремятся к нему, а с другой - удаляются.

## 2.2. Исследование автоколебаний механических систем методом Пуанкаре

Изучение автоколебаний механических систем связано с исследованием нелинейных дифференциальных уравнений, которые обычно не имеют аналитического решения. Это затрудняет определение и исследование автоколебаний. Использование для этих целей численных методов возможно, однако не приводит к получению достаточно полной картины поведения системы, так как любой численный расчет - это только одно частное решение и судить по нему о всей совокупности возможных движений сложно. Поэтому для исследования автоколебаний механических систем приходится пользоваться различными приближенными методами. Среди приближенных методов анализа нелинейных уравнений особое место

занимают асимптотические методы, в которых решения ищутся в виде рядов по малым параметрам.

Применение асимптотических методов позволяет:

1. Уменьшить размерность задачи, а в некоторых случаях и получить аналитическое решение.

2. Проводить более полное качественное исследование движения механических систем.

3. Получать эффективные численные алгоритмы решения задачи, учитывающие ее аналитические особенности.

В общем случае численные и аналитические (в частности, асимптотические) методы взаимно дополняют друг друга и их совместное применение позволяет проводить достаточно полное исследование разнообразных колебательных систем.

Прежде чем применять асимптотические методы при исследовании, необходимо обоснованно выделить малые параметры в рассматриваемой системе. В настоящее время существует два основных способа введения малых параметров в математическую модель. Первый способ заключается в приведении уравнений к безразмерному виду и в сравнении величин коэффициентов этих уравнений. В этом случае малыми считаются параметры, которые принимают значение много меньше единицы по сравнению с основными параметрами, принимающими значение порядка единицы.

Данный способ введения малых параметров используется для сравнительно простых уравнений и систем, когда количество параметров невелико и движения стационарны. В противном случае такой подход становится громоздким и применять его при построении асимптотических решений становится достаточно сложно.

Второй способ введения малого параметра связан с ограничением типа рассматриваемых движений. В этом случае, исходя

из какой-либо предварительной информации, можно допустить, что движение рассматриваемой системы мало отличается от движения определенного класса, например, гармонических колебаний. Все члены в уравнениях движения делятся на основные и возмущающие. Возмущающие функции в уравнениях движения масштабируются путем введения перед ними множителя - малого параметра  $\varepsilon$ . В этом случае успех использования асимптотических методов определяется близостью движения рассматриваемой системы к движению определенного класса.

Пример 2.1.

Рассмотрим движение маятника, описываемое уравнением

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F(x, \dot{x}) \quad , \quad (2.3)$$

где  $F(x, \dot{x})$  - известная функция, характеризующая действие возмущающих сил на маятник  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ .

Пусть  $F(x, \dot{x})$  является ограниченной функцией своих переменных  $|F(x, \dot{x})| < M$ , где  $M$  - некоторая константа, и заранее известно, что эта функция оказывает малое влияние на движение маятника. Проведем масштабирование функции  $F(x, \dot{x})$  с помощью множителя - малого параметра  $\varepsilon$ , то есть положим  $F(x, \dot{x}) = \varepsilon f(x, \dot{x})$ , где  $f(x, \dot{x})$  - некоторая новая функция. Ясно, что если функция  $F(x, \dot{x})$  (константа  $M$ ) имела порядок  $\varepsilon$ , то функция  $f(x, \dot{x})$  будет иметь уже порядок единицы. После введения таким образом малого параметра уравнение (2.3) примет вид

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}) \quad , \quad (2.4)$$

Где параметр  $\varepsilon$  показывает, что возмущающая функция  $\varepsilon f$  является малой по сравнению с основными членами, описывающими движение невозмущенного маятника:

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0 \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) получило название порождающего или невозмущенного. Оно имеет известное решение

$$x_0 = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (2.6)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  - произвольные постоянные.

Основной задачей асимптотических методов является нахождение решений уравнений в виде рядов по степеням малого параметра  $\varepsilon$  (см. Приложения 2 и 3):

$$x = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \varepsilon^3 \dots \quad (2.7)$$

где  $x_0(t)$ ,  $x_1(t)$ , ... - ограниченные функции, подлежащие определению.

Нулевой член ряда (2.7) представляет собой решение порождающего уравнения, а последующие члены определяют поправки к этому решению. Ясно, что определяя в виде ряда (2.7) решение исходного уравнения, мы предполагаем тем самым, что оно мало отличается от решения порождающего уравнения.

После построения решения в виде ряда (2.7) при необходимости можно перейти к исходным функциям, положив формально в разложениях (2.7)  $\varepsilon=1$  и рассматривать полученный ряд как некоторый ряд, члены которого определены через функции, входящие в исходное уравнение. Справедливость полученных решений в каждом конкретном случае можно проверить, сопоставляя значения учтенных и отброшенных членов ряда, а также численным моделированием на ЭВМ исходных уравнений движения.

Одним из основоположников применения асимптотических методов при исследовании колебаний механических систем был великий французский математик А. Пуанкаре. Пуанкаре предложил один из асимптотических методов определения предельных циклов в системе,

движение которой описывается уравнением второго порядка (2.4).

Будем отыскивать периодические решения уравнения (2.4) с частотой  $\omega(\varepsilon) = \omega$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . На этом основании положим

$$\omega(\varepsilon) = \frac{\omega}{1 + g_1 \varepsilon + g_2 \varepsilon^2 + \dots}$$

где  $g_1, g_2, \dots$  поправки к периоду

$$T(\varepsilon) = \frac{2\pi}{\omega} (1 + g_1 \varepsilon + g_2 \varepsilon^2 + \dots)$$

Сделаем в уравнении (2.4) замену независимой переменной, введя в рассмотрение фазу  $\tau$  :

$$\tau = \omega(\varepsilon)t = \omega t / (1 + g_1 \varepsilon + g_2 \varepsilon^2 + \dots)$$

Тогда

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + x(1 + g_1 \varepsilon + \dots)^2 = \frac{\varepsilon}{\omega^2} f(x, \frac{dx}{d\tau} \frac{\omega}{1 + g_1 \varepsilon + \dots}) (1 + g_1 \varepsilon + \dots)^2$$

Будем искать решение этого уравнения в виде ряда

$$x = x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + \varepsilon^3 \dots \quad (2.8)$$

Подставив разложение (2.8) в уравнение (2.4) и приравняв члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим

$$x_0'' + x_0 = 0 \quad , \quad (2.9)$$

$$x_1'' + x_1 = f(x_0, x_0') / \omega^2 - 2x_0 g_1 \quad , \quad (2.10)$$

где  $x_0'' = d^2 x_0 / d\tau^2$ ,  $x_1'' = d^2 x_1 / d\tau^2$ ,  $x_0' = dx_0 / d\tau$ .

Решая первое уравнение (2.9), найдем

$$x_0 = C_1 \cos \tau + C_2 \sin \tau \quad . \quad (2.11)$$

Поскольку уравнение (2.4) автономно, то, не ограничивая общности, произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  можно определить из начальных условий

$$x_0(0) = K \quad , \quad x_0'(0) = 0 \quad ,$$

где  $K$  - амплитуда периодического движения.

Для определения неизвестного значения амплитуды  $K$  и поправки к периоду  $g_1$  необходимо рассмотреть уравнение для следующего приближения (2.10). Подставляя решение (2.11) в уравнение (2.10), получим

$$x_1'' + x_1 = f(K \cos \tau, -\omega k \sin \tau) - 2K g_1 \cos \tau = F(\tau) \quad (2.12)$$

Причем функция  $x_1(\tau)$  должна удовлетворять условию периодичности  $x_1(\tau) = x_1(\tau + 2\pi)$ . Так как в правой части уравнения (2.12) стоит некоторая функция  $F(\tau)$ , зависящая от  $\sin \tau$  и  $\cos \tau$ , то для периодичности решения  $x_1(\tau)$  необходимо и достаточно ортогональность правой части функциям  $\sin \tau$  и  $\cos \tau$  /5/:

$$\int_0^{2\pi} F(\tau) \cos \tau d\tau = 0, \quad \int_0^{2\pi} F(\tau) \sin \tau d\tau = 0 \quad (2.13)$$

При выполнении условий (2.13) в правой части уравнения (2.12) не будет членов, содержащих  $\sin \tau$  и  $\cos \tau$  в первой степени, что исключает возможность появления непериодических частных решений этого уравнения.

Условия (2.13) позволяют определить постоянные  $K$  и  $g_1$ , характеризующие искомое периодическое решение, и после подстановки в них функции  $F(\tau)$  принимают вид

$$g_1 = \frac{1}{2\pi K \omega^2} \int_0^{2\pi} (f(K \cos \tau, -\omega k \sin \tau) \cos \tau) d\tau, \quad (2.14)$$

$$\int_0^{2\pi} (f(K \cos \tau, -\omega k \sin \tau) \sin \tau) d\tau = 0 \quad (2.15)$$

Последнее соотношение представляет собой некоторое уравнение для определения  $K$ . Это уравнение может иметь не тривиальные решения  $K \neq 0$ , может не иметь решений, отличных от тривиального  $K = 0$  или удовлетворяться тождественно. Последний случай имеет, например, место, когда система (2.4) консервативна. В самом деле, пусть

$f = f(x) = f(K \cos \tau)$ , тогда

$$\int_0^{2\pi} (f(K \cos \tau) \sin \tau) d\tau = 0,$$

так как функция  $f(K \cos \tau)$  - четная периодическая функция  $\tau$  периода  $2\pi$ .

Пусть  $K$  - отличный от нуля простой корень уравнения (2.15). Тогда рассматриваемая механическая система имеет предельный цикл, уравнение которого в нулевом приближении будет иметь вид

$$x(\tau) = K \cos[\omega \tau / (1 + g_1 \varepsilon)] \quad (2.16)$$

Замечание.

В случае существования кратных корней уравнения (2.15) вопрос о существовании предельных циклов в системе требует дополнительного исследования.

Аналогично могут быть определены последующие члены асимптотического разложения (2.8) / 5 /. Как показал Пуанкаре, ряды (2.8) сходятся для достаточно малых  $\varepsilon$ .

Недостатком метода Пуанкаре является отсутствие возможности исследования устойчивости определяемых предельных циклов.

Пример 2.2.

Характерным примером определения предельных циклов является исследование известного уравнения Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -(\nu_0 + \nu_2 x^2) \dot{x} \quad (2.17)$$

где  $\nu_0 < 0$  и  $\nu_2 > 0$  - некоторые постоянные.

Периодическое решение уравнения (2.17) ищется в соответствии с алгоритмом, изложенным выше, а его нулевое приближение определяется формулами (2.14-2.15), где

$$\varepsilon f(x, \dot{x}) = -(\nu_0 + \nu_2 x^2) \dot{x} \quad (2.18)$$

Подставляя функцию (2.18) в соотношения (2.14-2.15), получим

$$g_1 = \frac{1}{2\pi K \omega^2} \int_0^{2\pi} (v_0 + v_2 K^2 \cos^2 \tau) \omega K \sin \tau \cos \tau \, d\tau, \quad (2.19)$$

$$\int_0^{2\pi} (v_0 + v_2 K^2 \cos^2 \tau) \omega K \sin^2 \tau \, d\tau. \quad (2.20)$$

Вычисляя интегралы (2.19-2.20), найдем

$$g_1 = 0, \quad K \omega (v_0 + v_2 K^2 / 4) = 0.$$

Последнее соотношение позволяет определить нетривиальное решение для  $K = 2(-v_0/v_2)^{1/2} \neq 0$ , соответствующее существующему для рассматриваемой системы при  $v_0 < 0, v_2 > 0$  ( $v_0 > 0, v_2 < 0$ ) предельному циклу

$$x_0(t) = 2(-v_0/v_2)^{1/2} \cos \omega t, \quad (2.21)$$

определенному в нулевом приближении.

### 2.3. Применение метода усреднения при исследовании автоколебаний механических систем

Методы малого параметра, разработанные классиками асимптотического анализа Пуанкаре А., Ляпуновым А.М. и др., имеют все же весьма ограниченную область применения, так как они направлены на решение узкого круга задач: построение стационарных периодических решений и определение асимптотических разложений в окрестности этих решений. Эти методы не позволяют изучать переходные процессы в системах, изменение амплитудных характеристик системы во времени, устойчивость резонансного движения системы при медленном изменении ее параметров и т.д. В связи с этим, в основном благодаря работам отечественных математиков Н.Н.Боголюбова, Н.М.Крылова, Ю.А.Митропольского, В.М.Волосова и др., был разработан метод усреднения, лишенный перечисленных выше недостатков классических методов малого

параметра. Истоки метода усреднения восходят к работам Лапласа в небесной механике, а также к работам голландского инженера Ван-дер-Поля, который впервые применил принцип усреднения для анализа электрических колебаний. Впоследствии скорее интуитивные представления о методе усреднения, данные в этих работах, были развиты, обобщены и обоснованы в работах Н.М.Крылова и Н.Н.Боголюбова.

Идея метода усреднения проста и заключается в усреднении процесса по быстрым переменным (очень часто времени) с целью исследования зависимости медленных переменных системы от времени, представляющей основной интерес для исследователя. В настоящее время метод усреднения является наиболее мощным средством приближенного исследования нелинейных колебательных систем.

Рассмотрим применение метода усреднения для определения и исследования автоколебаний в механической системе с одной степенью свободы, движение которой описывается уравнением второго порядка вида

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}) \quad , \quad (2.22)$$

где  $\varepsilon f$  - функция, характеризующая малые возмущения, действующие на "маятник".

Невозмущенное уравнение ( $\varepsilon=0$ ), соответствующее уравнению (2.22), будет иметь вид

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

и имеет решение

$$x = K \cos \omega t + \varphi_0 \quad , \quad (2.23)$$

где  $K$  и  $\varphi_0$  - амплитуда и фаза невозмущенных колебаний,  $\omega$  - частота,  $\varphi_0$  - начальная фаза.

Дифференцируя (2.23) в силу невозмущенного уравнения, найдем

$$y = dx/dt = -K\omega \sin \omega t \quad . \quad (2.24)$$

Соотношения (2.23-2.24) будем трактовать как формулы для замены переменных  $x, y$  на новые переменные  $K, \varphi$  - амплитуду и фазу в возмущенном уравнении (2.22). Однако в возмущенном уравнении величины  $K$  и  $\varphi_0$  будут уже не постоянными, а будут изменяться со временем. Хотя решения уравнения (2.22) будут также иметь характер колебаний вследствие достаточно малой величины возмущающей функции  $\varepsilon f$ , однако эти колебания будут происходить с изменяющейся амплитудой  $K$  и фазой  $\varphi_0$ . Получим дифференциальные уравнения для новых переменных. Заменяем уравнение (2.22) двумя уравнениям первого порядка, тогда

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\omega^2 x + \varepsilon f(x, y). \quad (2.25)$$

Подставляя замену (2.23-2.24) в систему (2.25), получим

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} \cos\varphi - K \frac{d\varphi}{dt} \sin\varphi &= -K\omega \sin\varphi, \\ -\frac{dK}{dt} \sin\varphi - K \frac{d\varphi}{dt} \cos\varphi &= -K\omega \cos\varphi + \frac{\varepsilon}{\omega} f(K\cos\varphi, -K\omega \sin\varphi). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Определяя из уравнений (2.26) производные  $dK/dt$  и  $d\varphi/dt$ , получим дифференциальные уравнения для новых переменных:

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{\omega} f(K\cos\varphi, -K\omega \sin\varphi) \sin\varphi, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega - \frac{\varepsilon}{\omega} f(K\cos\varphi, -K\omega \sin\varphi) \cos\varphi. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Из вида системы (2.27) следует, что амплитуда  $K$  является медленной переменной, так как ее производная пропорциональна малому параметру  $\varepsilon$ , а фаза  $\varphi$  - быстрой переменной (иногда говорят - быстро вращающейся фазой, так как  $d\varphi/dt > 0$ ). Второй член во втором уравнении системы (2.27) определяет малую поправку к частоте  $\omega$  и равен  $d\varphi/dt = -\varepsilon f \cos\varphi / \omega$ . Применяемая в таком виде

замена переменных фактически является одной из формы метода вариации произвольных постоянных, причем варьируемыми постоянными являются  $K$  и  $\varphi_0$ .

Система двух уравнений (2.27) полностью эквивалентна уравнению второго порядка (2.22), причем правые части уравнений (2.27) являются периодическими функциями фазы  $\varphi$  с периодом  $2\pi$ , вследствие произведенных замен переменных.

Так как амплитуда  $K$  (и фаза  $\varphi_0$ ) есть медленная переменная, то можно ожидать, что не возникнет большой ошибки, если заменить правые части системы (2.27) их средними значениями за период  $2\pi$ , тогда

$$\frac{dK^0}{dt} = \varepsilon A_1(K^0) \quad , \quad (2.28)$$

$$\frac{d\varphi^0}{dt} = \omega + \varepsilon B_1(K^0) \quad , \quad (2.29)$$

где  $K^0$  и  $\varphi^0$  - средние значения амплитуды и фазы,

$$A_1(K^0) = \left\langle -\frac{f}{\omega} \sin\varphi \right\rangle = -\frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(K \cos\varphi, -K\omega \sin\varphi) \sin\varphi \, d\varphi \quad ,$$

$$B_1(K^0) = \left\langle -\frac{f}{\omega} \cos\varphi \right\rangle = -\frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(K \cos\varphi, -K\omega \sin\varphi) \cos\varphi \, d\varphi \quad -$$

усредненные правые части системы (2.27),  $\langle \dots \rangle$  - оператор усреднения.

Уравнения (2.28-2.29) часто называют укороченными или уравнениями Ван-дер-Поля, по имени голландского инженера, который впервые применил изложенную схему усреднения для уравнения второго порядка (2.22). Поэтому и данный метод иногда называют методом Ван-дер-Поля. Метод Ван-дер-Поля является упрощенным

вариантом метода усреднения, который будет подробно изложен в главе 4.

Укороченные или усредненные уравнения (2.28-2.29) существенно проще исходного уравнения (2.22), так как первое уравнение для амплитуды  $K^0$  может быть проинтегрировано независимо от уравнения для  $\varphi^0$ . Очень часто при исследовании колебаний (в частности, автоколебаний) бывает достаточно провести анализ только уравнения для амплитуды (2.28) и найти закон ее изменения. После определения зависимости  $K^0(t)$  определение фазы сводится к взятию интеграла от правой части уравнения для фазы  $\varphi^0$  (взятию квадратуры).

Исследование уравнения (2.28) на предмет наличия автоколебаний (предельных циклов) в механической системе обычно начинают с определения ее особых точек

$$A_1(K_*^0) = 0 \quad , \quad (2.30)$$

где  $K_*^0$  - некоторый корень функции  $A_1(K_*^0)$ . Значения амплитуды  $K^0 = K_*^0$  иногда называют особыми точками или стационарными амплитудами системы (2.28-2.29). Определение особых точек сводится к решению трансцендентного уравнения (2.30). Уравнение (2.30) может иметь конечное или бесконечное число корней, может не иметь корней (нет стационарных решений), может удовлетворяться тождественно. Последнее имеет место для консервативных систем, когда любое из состояний системы - стационарное.

После нахождения стационарных точек переходят к определению их типа методами качественной теории дифференциальных уравнений. Для этого исследуют поведение уравнения (2.30) при малых отклонениях от стационарных решений  $\Delta K = K^0 - K_*^0$ . Составляя линеаризованное относительно стационарной точки уравнение, получим

$$\frac{d\Delta K}{dt} = \lambda \Delta K \quad , \quad (2.31)$$

где  $\lambda = \frac{dA}{dK^0}(K_*^0)$ , которое имеет известное решение

$$\Delta K = \Delta K(0) \exp(\lambda t),$$

где  $\Delta K(0)$  - начальное отклонение амплитуды.

Устойчивость особой точки  $K^0 = K_*^0$  определяется по значению собственного значения линейного уравнения (2.31)  $\lambda$ . В частности, для асимптотической устойчивости решения  $K^0 = K_*^0$  необходимо и достаточно, чтобы  $\lambda < 0$ .

Если в механической системе удастся найти амплитуды  $K^0 = K_*^0 \neq 0$ , для которых  $\lambda < 0$  ( $\lambda > 0$ ), то в исходной системе (2.22) существует устойчивый (неустойчивый) предельный цикл. Если  $\lambda = 0$  или уравнение (2.30) имеет кратные корни, то необходимы дополнительные исследования для определения наличия и вида предельного цикла. Подробно вопрос обоснования использования усредненных уравнений для анализа свойств исходной системы изложен в монографии / 9 /.

Рассмотрим пример определения и исследования автоколебаний в механической системе с одной степенью свободы.

### Пример 2.3.

Рассмотрим уравнение движения маятника с нелинейным демпфированием (антидемпфированием) вида

$$\ddot{x} + (v_0 + v_1 \dot{x} + v_2 x^2 + v_3 x^3 + v_4 x^4) \dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad . \quad (2.32)$$

Предположим, что возмущающая функция

$$s f(x, \dot{x}) = -(v_0 + v_1 \dot{x} + v_2 x^2 + v_3 x^3 + v_4 x^4) \dot{x} \quad (2.33)$$

является достаточно малой.

Перейдем в уравнении (2.32) от переменных  $x, \dot{x}$  к переменным амплитуда-фаза  $K, \varphi$  по формулам

$$x = K \cos \varphi, \quad \dot{x} = -K \omega \sin \varphi, \quad (2.34)$$

которые получаются при рассмотрении решений невозмущенной системы ( $\varepsilon=0$ ):

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Дифференциальные уравнения в переменных  $(K, \varphi)$  будут иметь вид (2.27), причем для рассматриваемой системы

$$-\frac{\varepsilon}{\omega} f(K \cos \varphi, -K \omega \sin \varphi) \sin \varphi = -K(v_0 + v_1 K \cos \varphi + v_2 K^2 \cos^2 \varphi + v_3 K^3 \cos^3 \varphi + v_4 K^4 \cos^4 \varphi) \sin^2 \varphi. \quad (2.35)$$

Проводя усреднение функции (2.35), получим

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{v_0 K}{2} - \frac{v_2 K^3}{8} - \frac{v_4 K^5}{16} = \varepsilon A_1(K), \quad (2.36)$$

где индекс  $(0)$  у переменной  $K^{(0)}$  для простоты опущен.

Исследуем уравнение для амплитуды (2.36). При этом предположим для определенности, что  $v_0 > 0$  и  $v_4 > 0$ . Решая уравнение

$$-\frac{v_0 K_*}{2} - \frac{v_2 K_*^3}{8} - \frac{v_4 K_*^5}{16} = 0,$$

определяем особые точки

$$K_{*,1} = 0, \quad K_{*,2,3} = \frac{v_2}{v_4} \pm \left[ \frac{v_2^2}{v_4} - \frac{8v_0}{v_4} \right]^{1/2}. \quad (2.37)$$

Так как  $v_0 > 0$  и  $v_4 > 0$ , то при  $v_2 > 0$  и  $(v_2/v_4)^2 < 8v_0/v_4$  уравнение не имеет положительных решений, отличных от тривиального  $K_{*,1} = 0$ , и график функции  $A_1(K)$  выглядит так, как показано на рис. 2.2а.

Колебания любой амплитуды являются затухающими, так как  $dK/dt < 0$ .

Пусть теперь, наоборот,  $v_2 < 0$  и  $(v_2/v_4)^2 > 8v_0/v_4$ . Тогда имеем две стационарные амплитуды  $K_{*,2}$  и  $K_{*,3}$ , определяемые формулами (2.37), и уравнение (2.36) (после разложения многочлена  $\varepsilon A_1(K)$  на

Зависимость производной  $dK / dt$   
от амплитуды  $K$

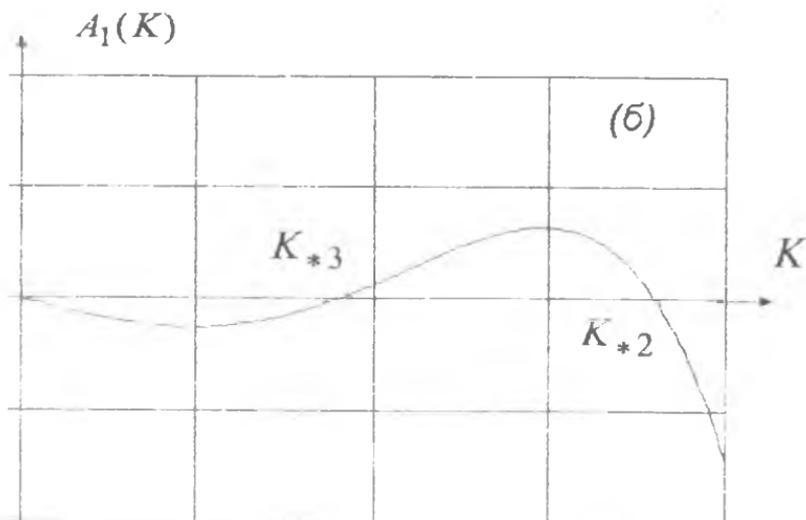
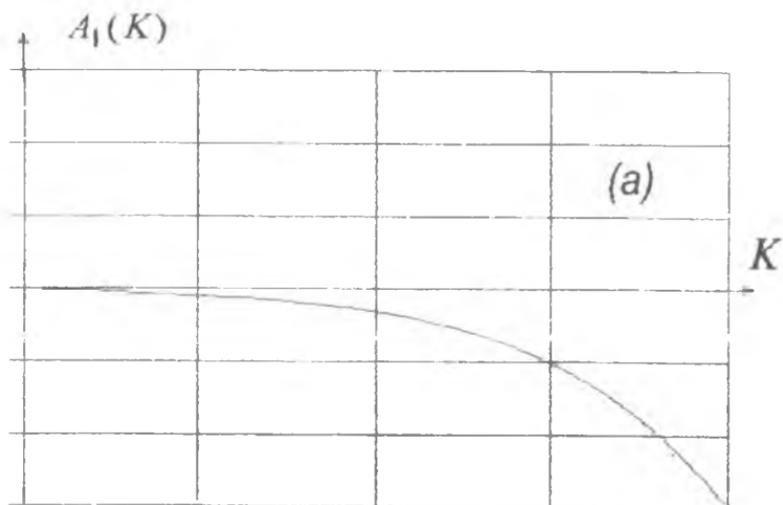


Рис.2.2

множители) представляется в виде

$$\frac{dK}{dt} = - \frac{Kv_4}{16} (K^2 - K_{*3}^2)(K^2 - K_{*2}^2) .$$

График зависимости  $\varepsilon A_1(K)$  приведен для этого случая на рис.2.2,б. В этом случае в данной системе имеются два предельных цикла с амплитудами  $K=K_{*2}$  и  $K=K_{*3}$ , один из которых устойчив ( $K=K_{*2}$ ), а другой - неустойчив ( $K=K_{*3}$ ). Для определения устойчивости точек  $K=K_{*2,3}$  необходимо составить линеаризованную систему

$$\frac{d\Delta K}{dt} = \varepsilon A_1'(K_{*2,3}) \Delta K ,$$

где  $\Delta K = K - K_{*2,3}$ ,  $A_1' = dA_1/dK$ , и определить значения производной  $A_1'$  в особых точках  $A_1'(K_{*2}) < 0$  и  $A_1'(K_{*3}) > 0$ .

Известное уравнение Ван-дер-Поля (2.17) является частным случаем уравнения (2.32) и имеет вид

$$\ddot{x} + (v_0 + v_2 x^2) \dot{x} + \omega^2 x = 0 , \quad (2.38)$$

где  $v_0 < 0$ ,  $v_2 > 0$ .

Соответствующее усредненное уравнение принимает следующую форму:

$$\frac{dK}{dt} = - \frac{v_0 K}{2} - \frac{v_2 K^3}{8} = \varepsilon A_1(K)$$

и имеет две особые точки

$$K_{*1} = 0, \quad K_{*2} = 2(-v_0/v_2)^{1/2} .$$

Определяя производную

$$A_1'(K_{*2}) = - \frac{v_0}{2} - \frac{3v_2 K_{*2}^2}{8} = v_0 < 0 ,$$

убеждаемся, что возникающий при этом предельный цикл

$$x = K_{*2} \cos \omega t \quad (2.39)$$

является устойчивым.

При определении формулы (2.39) учитывается, что поправка к частоте

$$B_1(K) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\nu_0 + \nu_2 K^2 \cos^2 \varphi) \text{Катнр} \cos \varphi \, d\varphi = 0.$$

#### 2.4. Определение и исследование автоколебаний в механической системе с двумя степенями свободы

Рассмотрим механическую систему с двумя степенями свободы, на которую кроме потенциальных сил действуют малые нелинейные демпфирующие (антидемпфирующие) обобщенные силы, не зависящие явно от времени. Движение такой системы описывается уравнениями Лагранжа

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} + \varepsilon Q_1(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2), \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_2} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2} + \varepsilon Q_2(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2), \end{aligned} \quad (2.40)$$

где  $T$  и  $\Pi$  - кинетическая и потенциальная энергии,  $q_1, q_2$  - обобщенные координаты,  $\varepsilon Q_1$  и  $\varepsilon Q_2$  - возмущающие силы.

Предположим, что невозмущенная система ( $\varepsilon=0$ ) имеет устойчивое положение равновесия  $q_1=q_2=\dot{q}_1=\dot{q}_2=0$  и функции  $T$  и  $\Pi$  в окрестности точки покоя представляются в виде положительно определенных квадратичных форм (см. разделы I.3, I.8)

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} (a_{11} \dot{q}_1^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22} \dot{q}_2^2), \\ \Pi &= \frac{1}{2} (c_{11} q_1^2 + 2c_{12} q_1 q_2 + c_{22} q_2^2). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Подставляя функции (2.41) в уравнения движения (2.40),

получим

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 &= \varepsilon Q_1(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2), \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 &= \varepsilon Q_2(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Как известно (см. раздел I.8), невозмущенная система

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 &= 0, \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

имеет решение вида

$$\begin{aligned} q_1 &= C_1 \cos(\omega_1 t + \varphi^{(1)}) + C_2 \cos(\omega_2 t + \varphi^{(2)}), \\ q_2 &= C_1 \chi_1 \cos(\omega_1 t + \varphi^{(1)}) + C_2 \chi_2 \cos(\omega_2 t + \varphi^{(2)}), \end{aligned} \quad (2.44)$$

где  $C_1, C_2, \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}$  - произвольные постоянные,  $\omega_1$  и  $\omega_2$  - собственные частоты ( $\omega_1 \neq \omega_2$ ), которые определяются решением алгебраического уравнения (I.76) (см. раздел I.8).

Применим для исследования автоколебаний возмущенной системы (2.42) метод усреднения (метод Ван-дер-Поля), используя методику, подробно изложенную в разделе 2.3 для системы с одной степенью свободы. В соответствии с этим приведем систему (2.42) к четырём уравнениям первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= y_1, \\ \dot{q}_2 &= y_2, \\ a_{11}\dot{y}_1 + a_{12}\dot{y}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 &= \varepsilon Q_1, \\ a_{21}\dot{y}_1 + a_{22}\dot{y}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 &= \varepsilon Q_2 \end{aligned} \quad (2.45)$$

и сделаем в этой системе замену переменных

$$\begin{aligned} q_1 &= K_1 \cos(\omega_1 t + \varphi^{(1)}) + K_2 \cos(\omega_2 t + \varphi^{(2)}), \\ q_2 &= K_1 \chi_1 \cos(\omega_1 t + \varphi^{(1)}) + K_2 \chi_2 \cos(\omega_2 t + \varphi^{(2)}), \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$y_1 = -K_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t + \varphi^{(1)}) - K_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t + \varphi^{(2)})$$

$$y_2 = -K_1 \omega_1 \chi_1 \sin(\omega_1 t + \varphi^{(1)}) - K_2 \omega_2 \chi_2 \sin(\omega_2 t + \varphi^{(2)})$$

где в качестве новых переменных в соответствии с методом вариации произвольных постоянных взяты амплитуды  $K_1, K_2$  и начальные фазы  $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}$ . После подстановки замены (2.46) в систему (2.45) и проведения дифференцирования получится система линейных алгебраических уравнений относительно  $\dot{K}_1, \dot{K}_2, K_1 \dot{\varphi}^{(1)}, K_2 \dot{\varphi}^{(2)}$  вида

/ 10 /

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_1 & -\sin \varphi_2 \\ \chi_1 \cos \varphi_1 & \chi_2 \cos \varphi_2 & -\chi_1 \sin \varphi_1 & -\chi_2 \sin \varphi_2 \\ -\omega_1 D_1 \sin \varphi_1 & -\omega_2 D_2 \sin \varphi_2 & -\omega_1 D_1 \cos \varphi_1 & -\omega_2 D_2 \cos \varphi_2 \\ -\omega_1 D_3 \sin \varphi_1 & -\omega_2 D_4 \sin \varphi_2 & -\omega_1 D_3 \cos \varphi_1 & -\omega_2 D_4 \cos \varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{K}_1 \\ \dot{K}_2 \\ K_1 \dot{\varphi}^{(1)} \\ K_2 \dot{\varphi}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon Q_1 \\ \varepsilon Q_2 \end{bmatrix}$$

где  $\varphi_1 = \omega_1 t + \varphi^{(1)}$ ,  $\varphi_2 = \omega_2 t + \varphi^{(2)}$  - фазы,

$$D_1 = a_{11} + a_{12} \chi_1, \quad D_2 = a_{11} + a_{12} \chi_2, \quad D_3 = a_{12} + a_{22} \chi_1, \quad D_4 = a_{12} + a_{22} \chi_2.$$

Решая эту систему, например, относительно  $\dot{K}_1$ , найдем

$$\frac{dK_1}{dt} = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

где определители системы

$$\Delta = \omega_1 \omega_2 (\chi_2 - \chi_1) (a_{11} a_{22} - a_{12}^2),$$

$$\Delta_1 = -\varepsilon (\chi_2 - \chi_1) \omega_2 (D_4 Q_1 - D_2 Q_2) \sin \varphi_1.$$

Поэтому

$$\frac{dK_1}{dt} = \frac{\varepsilon (D_4 Q_1 - D_2 Q_2) \sin \varphi_1}{\omega_1 (\chi_2 - \chi_1) (a_{11} a_{22} - a_{12}^2)} \quad (2.47)$$

Аналогично для других производных

$$\frac{dK_2}{dt} = \frac{\varepsilon (D_3 Q_1 - D_1 Q_2) \sin \varphi_2}{\omega_2 (\chi_2 - \chi_1) (a_{11} a_{22} - a_{12}^2)} \quad (2.48)$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1 - \frac{\varepsilon(D_4 Q_1 - D_2 Q_2) \cos \varphi_1}{K_1 \omega_1 (\chi_2 - \chi_1) (a_{11} a_{22} - a_{12}^2)} \quad (2.49)$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2 + \frac{\varepsilon(D_3 Q_1 - D_1 Q_2) \cos \varphi_2}{K_2 \omega_2 (\chi_2 - \chi_1) (a_{11} a_{22} - a_{12}^2)} \quad (2.50)$$

При определении уравнений (2.49-2.50) учитывалось, что  $d\varphi_1/dt = \omega_1 + d\varphi^{(1)}/dt$ ,  $d\varphi_2/dt = \omega_2 + d\varphi^{(2)}/dt$ .

Система (2.47-2.50) представляет собой преобразованную к другим переменным исходную систему (2.42), причем правые части этой системы в силу сделанной замены переменных периодичны по фазам  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  с периодом  $2\pi$ . В частности, обобщенные силы вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \varepsilon Q_1(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) = & \varepsilon Q_1(K_1 \cos \varphi_1 + K_2 \cos \varphi_2, K_1 \chi_1 \cos \varphi_1 + K_2 \chi_2 \cos \varphi_2, \\ & -K_1 \omega_1 \sin \varphi_1 - K_2 \omega_2 \sin \varphi_2, -K_1 \omega_1 \chi_1 \sin \varphi_1 - K_2 \omega_2 \chi_2 \sin \varphi_2) \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon Q_2(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) = & \varepsilon Q_2(K_1 \cos \varphi_1 + K_2 \cos \varphi_2, K_1 \chi_1 \cos \varphi_1 + K_2 \chi_2 \cos \varphi_2, \\ & -K_1 \omega_1 \sin \varphi_1 - K_2 \omega_2 \sin \varphi_2, -K_1 \omega_1 \chi_1 \sin \varphi_1 - K_2 \omega_2 \chi_2 \sin \varphi_2) \end{aligned}$$

Поэтому усредняя правые части уравнений (2.47-2.48) по быстрым фазам  $\varphi_1, \varphi_2$ , получим

$$\frac{dK_1^0}{dt} = \varepsilon A_1(K_1^0, K_2^0) \quad , \quad \frac{dK_2^0}{dt} = \varepsilon A_2(K_1^0, K_2^0) \quad (2.52)$$

где

$$A_1(K_1^0, K_2^0) = - \frac{\langle (D_4 Q_1 - D_2 Q_2) \sin \varphi_1 \rangle}{\omega_1 (\chi_2 - \chi_1) (a_{11} a_{22} - a_{12}^2)} \quad (2.53)$$

$$A_2(K_1^0, K_2^0) = \frac{\langle (D_3 Q_1 - D_1 Q_2) \sin \varphi_2 \rangle}{\omega_2 (\chi_2 - \chi_1) (a_{11} a_{22} - a_{12}^2)}$$

$$\langle (D_4 Q_1 - D_2 Q_2) \sin \varphi_1 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (D_4 Q_1 - D_2 Q_2) \sin \varphi_1 \, d\varphi_1 d\varphi_2 ,$$

$$\langle (D_3 Q_1 - D_1 Q_2) \sin \varphi_2 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (D_3 Q_1 - D_1 Q_2) \sin \varphi_2 \, d\varphi_1 d\varphi_2 .$$
(2.54)

Особые точки системы (2.52) определяются из условий

$$A_1(K_{*1}, K_{*2}) = 0 , \quad A_2(K_{*1}, K_{*2}) = 0 ,$$
(2.55)

которые должны выполняться одновременно.

После нахождения особых точек для исследования их устойчивости составляют линеаризованную относительно  $K_{*1}^0, K_{*2}^0$  систему, тогда

$$\frac{d\Delta K_1}{dt} = a_{11}\Delta K_1 + a_{12}\Delta K_2 ,$$

$$\frac{d\Delta K_2}{dt} = a_{21}\Delta K_1 + a_{22}\Delta K_2 ,$$
(2.56)

где

$$a_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial K_j^0} (K_{*1}^0, K_{*2}^0) \quad (i, j = 1, 2) ,$$

$\Delta K_1 = K_1^0 - K_{*1}^0$  ,  $\Delta K_2 = K_2^0 - K_{*2}^0$  - отклонения от особой точки.

Составляя характеристическое уравнение линейной системы (2.56) с постоянными коэффициентами, получим

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 ,$$
(2.57)

откуда определяются корни характеристического уравнения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

По значениям корней  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  судят об устойчивости или неустойчивости стационарных решений  $K_{*1}^0, K_{*2}^0$  усредненной системы (2.52) и о наличии в механической системе предельных циклов. Подробно вопрос о соответствии исследования усредненных уравнений

свойствам исходных уравнений изложен в работе / 9 /. Приведем лишь некоторые результаты.

Теорема 2.1 / II /.

Пусть усредненная система (2.52) имеет невырожденное положение равновесия ( $K^0 = K_*^0$ ). Тогда исходная система (2.47-2.50) имеет предельный цикл. Если все собственные значения усредненной системы, линеаризованной около этого положения равновесия, имеют отрицательные вещественные части, то цикл асимптотически устойчив. Если вещественная часть одного из собственных значений положительна, то цикл неустойчив.

Здесь отметим, что положение равновесия называется невырожденным, если линеаризованная около него система не имеет нулевых собственных значений.

Приведенная теорема является основанием использования усредненных уравнений для качественного исследования движений исходной системы. Однако она не охватывает случаев, когда имеются нулевые собственные значения или когда усредненная система имеет периодическое решение. Последний случай подробно рассмотрен в работе / 9 /, где показано, что при этом в пространстве переменных исходной системы существует некоторое многообразие (поверхность), которое может быть устойчивым или неустойчивым в зависимости от знаков вещественных частей собственных значений линеаризованной около этого решения системы. Здесь данный вопрос не рассматривается. Подробная теория существования многообразий систем дифференциальных уравнений, включая и применение для этого метода усреднения, изложена в монографии / 12 /.

2.5. Пример исследования автоколебаний в системе с двумя степенями свободы

Рассмотрим механическую систему, показанную на рис.1.5, свободные и вынужденные колебания которой изучались в разделах I.5 и I.8. Предположим, что на первый стержень системы действует нелинейный демпфирующий (антидемпфирующий) возмущающий момент  $M_b = -(v_0 + v_2 \dot{\theta}^2) \dot{\theta}$ , где  $v_0 < 0, v_2 > 0$  - малые заданные параметры. Тогда уравнения движения механической системы примут вид (см.раздел I.5)

$$\begin{aligned} a_{11} \ddot{\theta} + a_{12} \ddot{\gamma} + c_{11} \dot{\theta} + c_{12} \dot{\gamma} &= \varepsilon Q_1, \\ a_{21} \ddot{\theta} + a_{22} \ddot{\gamma} + c_{21} \dot{\theta} + c_{22} \dot{\gamma} &= 0 \end{aligned} \quad (2.58)$$

где  $\varepsilon Q_1 = -(v_0 + v_2 \dot{\theta}^2) \dot{\theta}$  - обобщенная сила, соответствующая моменту  $M_b$ .

Делая в системе (2.58) замену переменных

$$\begin{aligned} \theta &= K_1 \cos(\omega_1 t + \varphi^{(1)}) + K_2 \cos(\omega_2 t + \varphi^{(2)}) \\ \gamma &= K_1 \chi_1 \cos(\omega_1 t + \varphi^{(1)}) + K_2 \chi_2 \cos(\omega_2 t + \varphi^{(2)}) \\ \dot{\theta} &= -K_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t + \varphi^{(1)}) - K_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t + \varphi^{(2)}) \\ \dot{\gamma} &= -K_1 \omega_1 \chi_1 \sin(\omega_1 t + \varphi^{(1)}) - K_2 \omega_2 \chi_2 \sin(\omega_2 t + \varphi^{(2)}) \end{aligned} \quad (2.59)$$

и повторяя преобразования предыдущего раздела, получим усредненную систему для амплитуд колебаний  $K_1^0, K_2^0$  (2.52) в виде

$$\begin{aligned} \frac{dK_1}{dt} &= - \frac{\varepsilon D_1 \langle Q_1 \sin \varphi_1 \rangle}{\omega_1 (\chi_2 - \chi_1) (a_{11} a_{22} - a_{12}^2)} \\ \frac{dK_2}{dt} &= \frac{\varepsilon D_2 \langle Q_1 \sin \varphi_2 \rangle}{\omega_2 (\chi_2 - \chi_1) (a_{11} a_{22} - a_{12}^2)} \end{aligned} \quad (2.60)$$

где величины  $\omega_1, \omega_2, \chi_1, \chi_2, a_{11}, a_{22}, a_{12}, \dots$  определены в разделе I.5. Верхний индекс (0) у переменных  $K_1^0, K_2^0$  в дальнейшем для

простоты будет опущен.

После проведения усреднения (2.54) по фазам  $\varphi_1, \varphi_2$ , получим

$$\begin{aligned} \varepsilon \langle Q_1 \sin \varphi_1 \rangle &= \frac{K_1 \omega_1}{2} \left( v_0 + \frac{v_2 K_1^2}{4} + \frac{v_2 K_2^2}{2} \right), \\ \varepsilon \langle Q_1 \sin \varphi_2 \rangle &= \frac{K_2 \omega_2}{2} \left( v_0 + \frac{v_2 K_2^2}{4} + \frac{v_2 K_1^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Подставляя выражения (2.61) в систему (2.60), получаем окончательную форму усредненных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dK_1}{dt} &= C_1 K_1 \left( v_0 + \frac{v_2 K_1^2}{4} + \frac{v_2 K_2^2}{2} \right), \\ \frac{dK_2}{dt} &= C_2 K_2 \left( v_0 + \frac{v_2 K_2^2}{4} + \frac{v_2 K_1^2}{2} \right), \end{aligned} \quad (2.62)$$

где 
$$C_1 = - \frac{D_4}{2 (\chi_2 - \chi_1) (a_{11} a_{22} - a_{12}^2)}, \quad C_2 = \frac{D_3}{2 (\chi_2 - \chi_1) (a_{11} a_{22} - a_{12}^2)}.$$

Система (2.62) имеет четыре особые точки, определяемые из условий  $dK_1/dt = dK_2/dt = 0$ :

- 1)  $K_{*1} = 0, K_{*2} = 0$ ; 2)  $K_{*1} = 0, K_{*2} = 2(-v_0/v_2)^{1/2}$ ;
- 3)  $K_{*1} = 2(-v_0/v_2)^{1/2}, K_{*2} = 0$ ; 4)  $K_{*1} = K_{*2} = 2(-3v_0/v_2)^{1/2} / 3$ .

Тип этих особых точек устанавливается посредством анализа значений корней характеристического уравнения (2.57) линеаризованной системы. При этом

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\partial A_1}{\partial K_1} = C_1 \left( v_0 + \frac{3v_2 K_{*1}^2}{4} + \frac{v_2 K_{*2}^2}{2} \right), \\ a_{12} &= \frac{\partial A_1}{\partial K_2} = C_1 v_2 K_{*1} K_{*2}, \quad a_{21} = \frac{\partial A_2}{\partial K_1} = C_2 v_2 K_{*1} K_{*2}, \\ a_{22} &= \frac{\partial A_2}{\partial K_2} = C_2 \left( v_0 + \frac{3v_2 K_{*2}^2}{4} + \frac{v_2 K_{*1}^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Корни характеристического уравнения определяются выражениями

$$\lambda_{1,2} = \frac{d_{11} + d_{22}}{2} \pm \left[ \frac{(d_{11} + d_{22})^2}{4} - (d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}) \right]^{1/2}. \quad (2.64)$$

Для анализа автоколебаний рассматриваемой механической системы (2.58) с двумя степенями свободы зададимся конкретными значениями параметров  $\nu_0$  и  $\nu_2$  нелинейного демпфирования:  $\nu_0 = -0.1$ ;  $\nu_2 = 0.1$ . В этом случае с использованием исходных данных раздела I.5 (таблица I.I) непосредственным вычислением корней  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  для четырех особых точек системы получаем

1.  $\lambda_1 \sim 0.018$ ;  $\lambda_2 \sim 0.010$ ;  $K_{*1} = K_{*2} = 0$ .
2.  $\lambda_1 \sim -0.018$ ;  $\lambda_2 \sim -0.020$ ;  $K_{*1} = 0$ ;  $K_{*2} = 2$ .
3.  $\lambda_1 \sim -0.017$ ;  $\lambda_2 \sim -0.019$ ;  $K_{*1} = 2$ ;  $K_{*2} = 0$ .
4.  $\lambda_1 \sim 0.009$ ;  $\lambda_2 \sim -0.027$ ;  $K_{*1} = K_{*2} \sim 1.155$ .

В этом случае качественная теория динамических систем на плоскости / 4 / позволяет установить тип найденных особых точек. Так, первая особая точка является неустойчивым узлом, вторая и третья точки - устойчивыми узлами, четвертая точка - седлом. Поэтому в силу теоремы 2.I в рассматриваемой системе возможны устойчивые автоколебания с амплитудами, близкими к значениям  $K_{*1} = 0, K_{*2} = 2$  (вторая точка) и к значениям  $K_{*1} = 2, K_{*2} = 0$  (третья точка). В четвертой точке  $K_{*1} = K_{*2} \sim 1.155$  также существует предельный цикл, однако он неустойчив. Фазовый портрет усредненной системы (2.62) показан на рис.2.3 и построен непосредственным численным интегрированием системы (2.62) на ЭВМ с различными начальными условиями по  $K_1(0), K_2(0)$ . Проведенный численный эксперимент полностью соответствует представленному выше качественному анализу системы (2.62).

Фазовый портрет усредненной системы  
с двумя степенями свободы

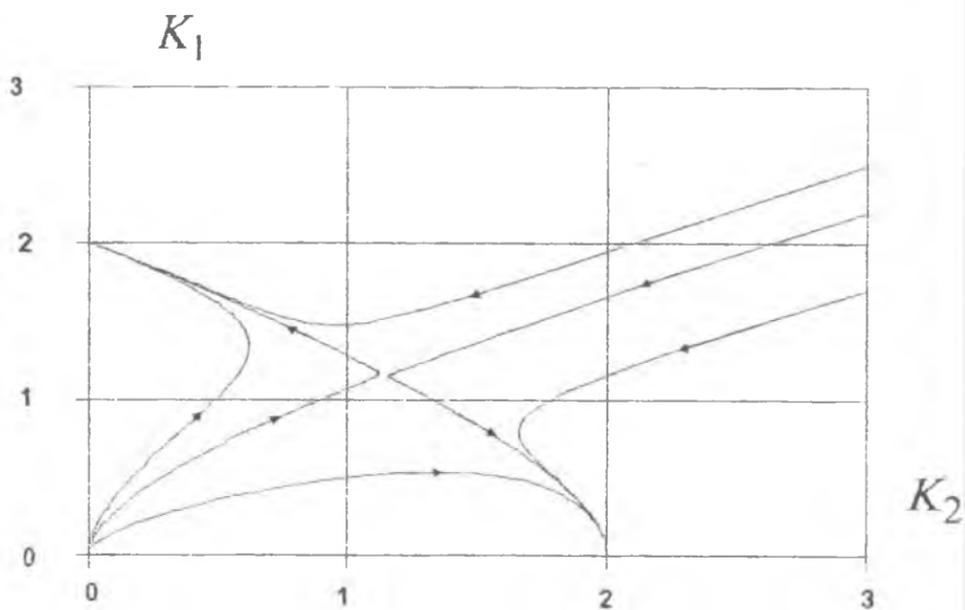


Рис. 2.3

### 3. КОЛЕБАНИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

#### 3.1. Качественное исследование нелинейных колебаний системы с одной степенью свободы

Исследование нелинейных колебаний обычно вызывает серьезные трудности, так как дифференциальные уравнения, описывающие их движение, как правило, не имеют аналитических решений. Поэтому основными способами изучения нелинейных колебаний являются численный эксперимент и качественная теория дифференциальных уравнений. Последняя позволяет представить полную картину движения нелинейной системы в фазовом пространстве, что значительно облегчает ее последующий анализ приближенными методами (например, асимптотическими) и позволяет правильно интерпретировать результаты численных экспериментов.

В качестве примера качественного исследования нелинейных колебаний рассмотрим движение консервативной механической системы с одной степенью свободы под действием потенциальных сил. Кинетическая и потенциальная энергии такой системы будут иметь вид

$$T = \frac{1}{2} a(q)\dot{q}^2, \quad \Pi = \Pi(q), \quad (3.1)$$

где  $q$  - обобщенная координата,  $a(q)$  - известная функция.

Исследуем движение такой системы, не делая предположения о малости колебаний относительно устойчивого положения равновесия, как это было в разделе 1.1.

Движение рассматриваемой механической системы описывается уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q}. \quad (3.2)$$

Вычислив соответствующие производные от функций  $T$  и  $\Pi$  (3.1) и подставив их в уравнение (3.2), получим

$$\ddot{q} + \frac{1}{2a} \frac{\partial a}{\partial q} \dot{q}^2 = -\frac{1}{a} \frac{\partial \Pi}{\partial q} \quad (3.3)$$

Приведем уравнение (3.3) к нормальной форме Коши, тогда, вводя обозначение  $z = \dot{q}$ , получим

$$\begin{aligned} \dot{q} &= z = f_1(z) \\ \dot{z} &= -\frac{1}{2a} \frac{\partial a}{\partial q} z^2 - \frac{1}{a} \frac{\partial \Pi}{\partial q} = f_2(q, z) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Исследуем систему второго порядка (3.4) методами качественной теории дифференциальных уравнений. Особые точки системы (3.4) определяются из условий

$$\begin{aligned} z &= 0 \\ -\frac{1}{2a} \frac{\partial a}{\partial q} z^2 - \frac{1}{a} \frac{\partial \Pi}{\partial q} &= 0 \end{aligned}$$

или

$$z = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0,$$

то есть располагаются на оси абсцисс ( $q$ ) и являются экстремальными точками потенциальной энергии.

Предположим, что  $q^*$  - некоторая экстремальная точка потенциальной энергии:  $\partial \Pi / \partial q(q^*) = 0$ . Определим тип этой особой точки, составив уравнения линеаризованной относительно нее системы, тогда, полагая

$$q = q^* + \Delta q, \quad z = \Delta z,$$

где  $\Delta q, z = \Delta z$  - отклонения фазовых координат системы от особой точки, получим следующую линеаризованную систему:

$$\begin{aligned} \dot{\Delta q} &= d_{11} \Delta q + d_{12} \Delta z \\ \dot{\Delta z} &= d_{21} \Delta q + d_{22} \Delta z \end{aligned} \quad (3.5)$$

где коэффициенты

$$d_{11} = \partial f_1 / \partial q = 0, \quad d_{12} = \partial f_1 / \partial z = 1,$$

$$d_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial q} = - \left[ \frac{1}{2a} \frac{\partial a}{\partial q} \right]_q z^2 - \left[ \frac{1}{a} \right]_q \frac{\partial \Pi}{\partial q} - \frac{1}{a} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} = - \frac{1}{a} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2},$$

$$d_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial z} = - \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial q} z = 0$$

определяются в особой точке  $q=q^*, z=0$ .

Характеристическое уравнение системы (3.5) имеет вид

$$\lambda^2 - d_{12}d_{21} = 0$$

или

$$\lambda^2 = - \frac{1}{a} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} (q^*).$$

Так как  $a > 0$  (кинетическая энергия  $T > 0$  и обращается в ноль только при  $\dot{q} = z = 0$ ), то тип особой точки определяется знаком второй производной  $\partial^2 \Pi / \partial q^2 (q^*)$ . Если  $\partial^2 \Pi / \partial q^2 (q^*) > 0$  (функция  $\Pi$  имеет минимум), то характеристическое уравнение имеет чисто мнимые корни

$$\lambda_{1,2} = \pm i \left[ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} / a \right]^{1/2}$$

и особая точка является особой точкой типа центра. Если  $\partial^2 \Pi / \partial q^2 (q^*) < 0$  (функция  $\Pi$  имеет максимум), то характеристическое уравнение имеет два вещественных корня разных знаков, что соответствует особой точке типа седла.

Чтобы выяснить структуру фазового портрета системы (3.3), необходимо рассмотреть ее интеграл энергии

$$H = a\dot{q}^2/2 + \Pi(q) = const, \quad (3.6)$$

Определяя из выражения (3.6) производную  $\dot{q}$ , получим

$$\dot{q} = \pm [2(H - \Pi)/a]^{1/2}. \quad (3.7)$$

Формула (3.7) показывает, что все фазовые траектории системы (3.3) симметричны относительно оси абсцисс (оси  $q$ ).

Приведенные рассуждения позволяют строить фазовые портреты нелинейных систем по виду их потенциальной энергии.

Некоторые примеры построения фазовых портретов приводятся на рис.3.1-3.2.

Рис.3.1 соответствует периодической функции  $\Pi(q) = \cos q$ . Так как максимумы этой функции имеют одни и те же значения, то сепаратрисы соединяют седла. Этот вывод следует непосредственно из выполнения для этой системы закона сохранения энергии, так как для всех точек одной фазовой траектории значение энергии одинаково.

Более сложный случай периодической функции  $\Pi(q)$  изображен на рис.3.2.

Из приведенных примеров ясен принцип построения фазовых портретов систем, имеющих потенциальную энергию, периодически зависящую от обобщенной координаты. Особенно важную роль при построении фазовых портретов таких систем играют сепаратрисы (от французского слова *separer* - разделять), неустойчивые фазовые траектории, выходящие (или входящие) из седел и разделяющие области с различным характером движения: либрационным (колебательным) и ротационным (вращательным). Уравнение сепаратрисы для ее построения нетрудно получить из интеграла энергии (3.6) системы, определив постоянную энергии  $H$  из условия  $H = \Pi(q^*)$ , где  $q^*$  - особая точка типа седла, из которой выходит сепаратриса. Тогда уравнение сепаратрисы будет иметь вид

$$H = a(q)\dot{q}^2/2 + \Pi(q) - \Pi(q^*) = 0 .$$

Описанная схема качественного исследования нелинейной колебательной системы применима и для более широкого класса систем второго порядка, в частности, для неконсервативных. Все рассуждения данного раздела могут быть повторены для системы

### Фазовый портрет системы второго порядка

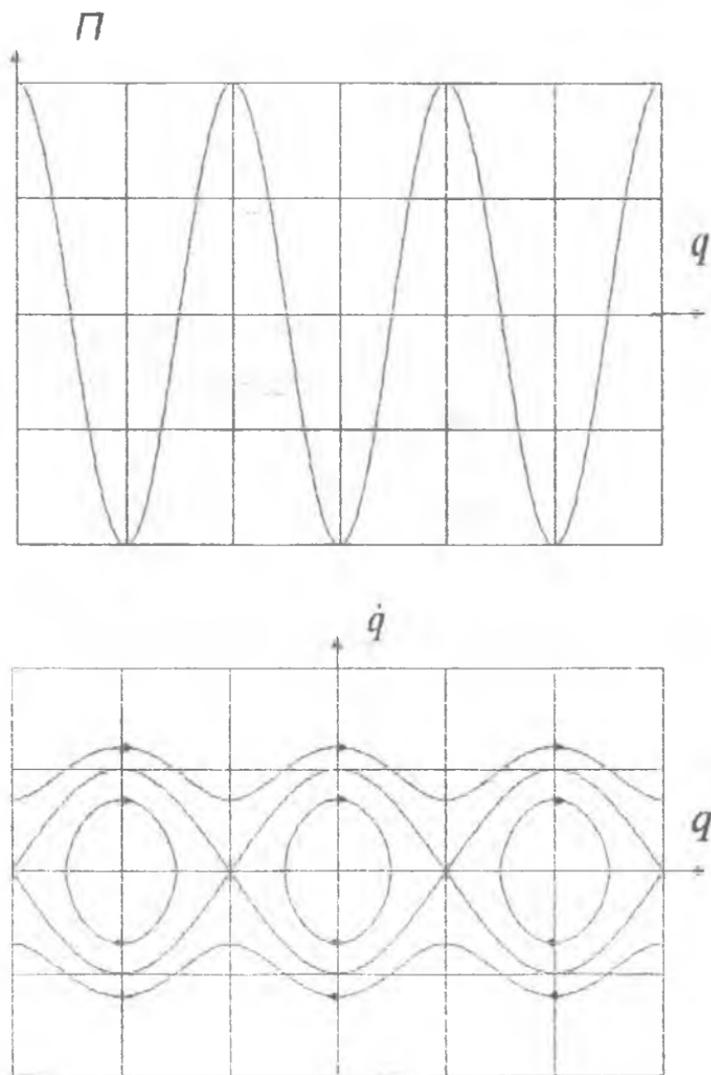


Рис.3.1

Фазовый портрет системы второго порядка

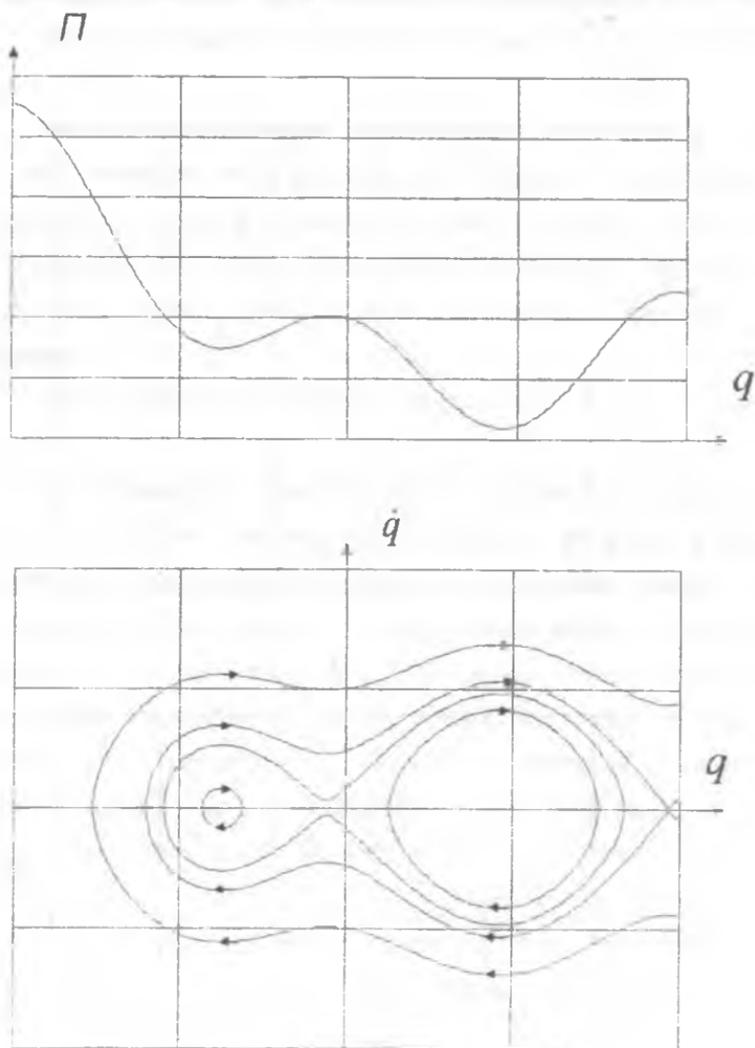


Рис.3.2

$$\ddot{q} + f(q) = 0 ,$$

которая имеет, как известно, интеграл

$$I = \dot{q}^2/2 + \int f(q) dq = const ,$$

аналогичный интегралу энергии. При этом роль аналога потенциальной энергии будет играть функция

$$\Pi(q) = \int f(q) dq + C ,$$

где  $C$  - произвольная постоянная.

### Пример 3.1.

Рассмотрим движение математического маятника, на который действуют сила тяжести и постоянный крутящий момент  $M$ . Уравнение движения данной механической системы будет иметь вид

$$ml^2 \ddot{\varphi} + mgl \sin\varphi = M , \quad (3.8)$$

где  $m$  - масса материальной точки,  $l$  - длина маятника,  $g$  - гравитационное ускорение,  $M$  - постоянный момент,  $\varphi$  - угол отклонения маятника.

Рассматриваемая механическая система неконсервативна, однако у нее имеется интеграл, подобный интегралу энергии вида

$$I = \dot{\varphi}^2/2 + \int (g/l \sin\varphi - \bar{M}) d\varphi = \dot{\varphi}^2/2 - g/l \cos\varphi - \bar{M}\varphi = const ,$$

где  $\bar{M} = M / ml^2$ .

Особые точки данной системы определяются из условия  $\partial\Pi/\partial\varphi=0$ , где  $\Pi = -g/l \cos\varphi - \bar{M}\varphi$ , тогда  $\partial\Pi/\partial\varphi = g/l \sin\varphi^* - \bar{M} = 0$ , откуда

$$\sin\varphi^* = \bar{M} l/g . \quad (3.9)$$

При  $\bar{M} > g/l$  уравнение (3.9) не имеет решений и маятник при достаточно большом крутящем моменте вращается. При  $0 < \bar{M} < g/l$  рассмотрим построение фазового портрета системы на отрезке  $[-\pi, \pi]$

(все другие отрезки оси  $\varphi$  рассматриваются аналогично). На этом отрезке система имеет две особые точки

$$\begin{aligned}\varphi_1^* &= \text{Arcsin}(M l/g) \quad , \\ \varphi_2^* &= -\text{Arcsin}(M l/g) + \pi \quad ,\end{aligned}$$

где  $\text{Arcsin}(M l/g)$  - главное значение арксинуса.

Определяя вторую производную функции  $\Pi(\varphi)$ , получим

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2}(\varphi_1^*) = \frac{g}{l} \cos \varphi_1^* > 0 \quad ,$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2}(\varphi_2^*) = \frac{g}{l} \cos \varphi_2^* < 0 \quad ,$$

поэтому особая точка  $\varphi = \varphi_1^*$  есть особая точка типа центра, а особая точка  $\varphi = \varphi_2^*$  - особая точка типа седла. Уравнение сепаратрисы будет иметь вид

$$I_c = \dot{\varphi}^2/2 - g/l \cos \varphi - M\varphi + g/l \cos \varphi_2^* + M\varphi_2^* = 0 \quad ,$$

где  $I_c$  - интеграл, определенный на сепаратрисе.

Потенциальная энергия  $\Pi(\varphi)$  системы и соответствующий ей фазовый портрет при  $M > 0$  изображен на рис.3.3. Сепаратрисы, изображенные на рис.3.3, не соединяют седла, так как система не консервативна и ее функция  $\Pi(\varphi)$  имеет разные значения в точках своих максимумов. Поэтому сепаратрисы образуют петли, разделяющие области колебательных и вращательных движений. Если начальная энергия маятника мала ( $I_c < 0$ ), то, несмотря на действие постоянного крутящего момента  $M$ , маятник будет совершать колебательные движения в окрестности центра. Если начальная энергия маятника достаточно велика ( $I_c > 0$ ), то он будет вращаться. Причем если маятник при этом вращается в обратном направлении ( $\dot{\varphi} < 0$ ), то он в результате действия постоянного момента  $M > 0$  изменит свое вращение на противоположное (рис.3.3), не попав в колебательную область (трение отсутствует).

Фазовый портрет системы второго порядка

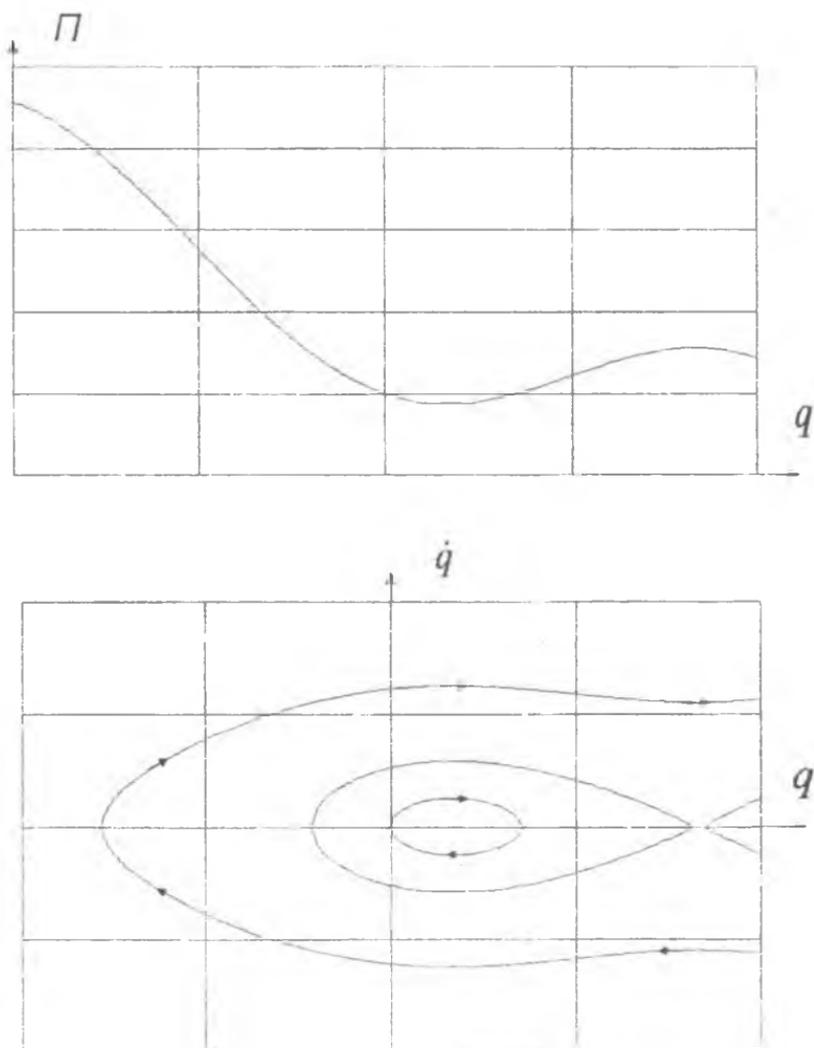


Рис.3.3

### 3.2. Классический метод исследования периодических решений Ляпунова-Пуанкаре

После построения фазового портрета нелинейной системы по методу, изложенному в предыдущем разделе 3.1, переходят к подробному изучению колебаний вблизи особых точек типа центра, используя квазилинейные уравнения (уравнения, близкие к линейным). Теория движения таких систем и построение их приближенных решений рассматривались в трудах А.Пуанкаре и А.М.Ляпунова.

Система, получившая название системы А.М.Ляпунова, имеет вид  
/ 5 /

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= a_{11}\xi + a_{12}\eta + \Xi(\xi, \eta) \\ \dot{\eta} &= a_{21}\xi + a_{22}\eta + \Omega(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (3.10)$$

где  $\Xi$  и  $\Omega$  - аналитические функции переменных  $\xi$  и  $\eta$  в окрестности точки  $\xi=\eta=0$  и такие, что они содержат члены второго порядка и выше по  $\xi$  и  $\eta$ .

Для системы (3.10) должны быть выполнены два условия:

1. Линейная относительно  $\xi$  и  $\eta$  система имеет характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

с чисто мнимыми корнями  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ .

2. Система (3.10) допускает аналитический первый интеграл, разложение которого по степеням переменных  $\xi$  и  $\eta$  начинается с членов второго порядка.

Замечание.

Система Ляпунова (3.10) как частный случай содержит уравнение нелинейного маятника (см.раздел 3.1)

$$\ddot{q} + f(q) = 0 \quad , \quad (3.11)$$

где функция  $f(q)$  представима в виде

$$f(q) = \omega^2 q + a_2 q^2 + \dots$$

Делая теперь в уравнении (3.11) замену  $\dot{\xi} = -\omega\eta$  ,  $q = \xi$  , приходим к системе

$$\dot{\xi} = -\omega\eta \quad , \quad \dot{\eta} = \omega\xi + a_2 \xi^2/\omega + \dots$$

с интегралом

$$I = \omega^2 \eta^2/2 + \int f(\xi) d\xi = \omega^2 \eta^2/2 + \omega^2 \xi^2/2 + a_2 \xi^3/3 + \dots = const$$

и являющейся системой Ляпунова.

Систему (3.10) обычно приводят к канонической форме. Для этого исключим переменную  $\eta$  из системы (3.10), тогда

$$\ddot{\xi} - \dot{\xi}(a_{11} + a_{22}) + \xi(a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}) = 0 \quad . \quad (3.12)$$

Условие I для уравнения (3.12) будет выполнено, если  $a_{11} = -a_{22}$ ,  $a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12} > 0$ . Тогда, делая в системе (3.10) замену

$$\xi = x \quad , \quad \eta = -(a_{11}x + \omega y) / a_{12} \quad ,$$

где  $\omega = (a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12})^{1/2}$ , приходим к канонической форме

$$\dot{x} = -\omega y + X(x, y) \quad , \quad \dot{y} = \omega x + Y(x, y) \quad , \quad (3.13)$$

где  $X = \Xi$  ,  $Y = -(a_{12}\Omega + a_{11}\Xi) / \omega$  .

Уточним также вид интеграла  $I = const$ . Согласно условию 2 его представление имеет вид

$$I = A x^2 + B y^2 + C xy + \dots = const \quad .$$

Найдем производную

$$dI/dt = 2\omega(B-A)xy + C\omega(x^2 - y^2) + W(x, y) = 0 \quad ,$$

где функция  $W$  определяет члены третьего порядка и выше. Отсюда  $A=B$  и  $C=0$ , поэтому (с точностью до множителя)

$$I(x, y) = x^2 + y^2 + W(x, y) = \mu = const \quad .$$

где  $\mu$  — некоторая постоянная, которую всегда можно считать положительной при достаточно малых  $|x|$  и  $|y|$ .

При этих условиях А.М.Ляпунов доказал следующую теорему.

Теорема 3.1/ 5 /.

Если постоянная  $\mu$  достаточно мала, то все решения системы уравнений (3.13) — периодические функции  $t$ , причем период  $T$  — четная функция величины  $\mu$  и при  $\mu \rightarrow 0$  стремится к  $2\pi/\omega$ . Решения системы (3.13) являются аналитическими функциями величины  $x(t_0) = \varepsilon$  — начального отклонения переменной  $x$ . Причем

$$T = 2\pi (1 + \varepsilon^2 h_2 + \varepsilon^3 h_3 + \dots) / \omega$$

На основании этой теоремы производят построение решения системы (3.13) при  $x(t_0) = \varepsilon$ ,  $y(t_0) = 0$  в виде асимптотических рядов (см. Приложения 2 и 3)

$$x(\tau) \sim \sum_{k=1}^{\infty} x_k(\tau) \varepsilon^k, \quad y(\tau) \sim \sum_{k=1}^{\infty} y_k(\tau) \varepsilon^k, \quad (3.14)$$

где

$$\tau = \frac{2\pi}{T} = \frac{\omega t}{1 + \varepsilon^2 h_2 + \dots}$$

Изменение масштаба времени в рядах (3.14) путем введения новой переменной  $\tau$  связано с необходимостью исключения в разложениях вековых составляющих, пропорциональных времени  $t$ , которые характерны для всех прямых асимптотических разложений / 5 /. По переменной  $\tau$  искомые решения всегда имеют фиксированный период  $2\pi$  вне зависимости от числа учтенных членов в рядах (3.14). Поэтому неизвестные функции  $x_k, y_k$  также ищутся в классе периодических по  $\tau$  с периодом  $2\pi$  (и, следовательно, ограниченных) функций.

После изменения масштаба времени система (3.13) примет вид

$$\frac{dx}{d\tau} = [-\omega y + X(x, y)] \frac{1 + \varepsilon^2 h_2 + \dots}{\omega}$$

$$\frac{dy}{d\tau} = [\omega x + Y(x, y)] \frac{1 + \varepsilon^2 h_2 + \dots}{\omega} \quad (3.15)$$

Подставляя в систему (3.15) асимптотические разложения (3.14), получим

$$\sum x_k' \varepsilon^k = [-\omega \sum y_k' \varepsilon^k + X(\sum x_k' \varepsilon^k, \sum y_k' \varepsilon^k)] \frac{1 + \varepsilon^2 h_2 + \dots}{\omega}$$

$$\sum y_k' \varepsilon^k = [\omega \sum x_k' \varepsilon^k + Y(\sum x_k' \varepsilon^k, \sum y_k' \varepsilon^k)] \frac{1 + \varepsilon^2 h_2 + \dots}{\omega}$$

где  $x' = dx/d\tau$ ,  $y' = dy/d\tau$ .

Представляя функции  $X$  и  $Y$  в виде

$$X = \varepsilon^2 X^{(2)} + \varepsilon^3 X^{(3)} + \dots$$

$$Y = \varepsilon^2 Y^{(2)} + \varepsilon^3 Y^{(3)} + \dots$$

и приравнивая члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , найдем

$$x_1' = -y_1, \quad y_1' = x_1, \quad (3.16)$$

$$x_2' = -y_2 + X^{(2)}(x_1, y_1) / \omega, \quad (3.17)$$

$$y_2' = x_2 + Y^{(2)}(x_1, y_1) / \omega,$$

$$x_3' = -y_3 + X^{(3)}(x_1, y_1, x_2, y_2) / \omega - h_2 y_1, \quad (3.18)$$

$$y_3' = x_3 + Y^{(3)}(x_1, y_1, x_2, y_2) / \omega + h_2 x_1,$$

$$\dots$$

$$x_k' = -y_k + D^{(k)}(x_1, y_1, \dots, x_{k-1}, y_{k-1}) - h_{k-1} y_1, \quad (3.19)$$

$$y_k' = x_k + E^{(k)}(x_1, y_1, \dots, x_{k-1}, y_{k-1}) + h_{k-1} x_1.$$

где  $D^{(k)}$  и  $E^{(k)}$  - известные функции.

Система дифференциальных уравнений (3.16-3.19) может быть

решена последовательно при следующих начальных условиях:

$$x(t_0) = \varepsilon x_1(t_0) + \varepsilon^2 x_2(t_0) + \varepsilon^3 \dots = \varepsilon \quad ,$$

$$y(t_0) = \varepsilon y_1(t_0) + \varepsilon^2 y_2(t_0) + \varepsilon^3 \dots = 0 \quad ,$$

откуда

$$x_1(t_0) = 1 \quad , \quad y_1(t_0) = 0 \quad ,$$

$$x_k(t_0) = 0 \quad , \quad y_k(t_0) = 0 \quad , \quad k=2,3,\dots$$

Решая первые два уравнения (3.16), найдем

$$x_1 = \cos \tau \quad , \quad y_1 = \sin \tau \quad . \quad (3.20)$$

Последующие приближения определяются решением неоднородных линейных уравнений вида (3.19), причем искомые функции  $x_k, y_k$  должны удовлетворять условиям периодичности  $x_k(\tau) = x_k(\tau + 2\pi)$ ,  $y_k(\tau) = y_k(\tau + 2\pi)$ . Выпишем эти условия в конкретном виде. Для этого найдем решения линейных неоднородных уравнений (3.19) методом вариации произвольных постоянных. Решение однородной системы имеет вид

$$x_k = C_1 \cos \tau + C_2 \sin \tau, \quad y_k = -C_1 \sin \tau + C_2 \cos \tau, \quad (3.21)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  - произвольные постоянные.

Подставляя решение (3.21) в систему (3.19) и полагая  $C_1(\tau)$ ,  $C_2(\tau)$ , получим

$$\frac{dC_1}{d\tau} \cos \tau + \frac{dC_2}{d\tau} \sin \tau = F_1(\tau) \quad , \quad (3.22)$$

$$\frac{dC_1}{d\tau} \sin \tau - \frac{dC_2}{d\tau} \cos \tau = F_2(\tau) \quad ,$$

где  $F_1(\tau) = D^{(k)}(\tau) - h_{k-1} y_1(\tau)$ ,  $F_2(\tau) = E^{(k)}(\tau) + h_{k-1} x_1(\tau)$ .

Выражая из соотношений (3.22) функции  $C_1(\tau), C_2(\tau)$ , найдем

$$C_1(\tau) = \int_0^{\tau} (F_1 \cos \tau + F_2 \sin \tau) d\tau + C_3 \quad ,$$

$$C_2(\tau) = \int_0^{\tau} (F_1 \sin \tau - F_2 \cos \tau) d\tau + C_4 \quad ,$$

где  $C_3$  и  $C_4$  - новые произвольные постоянные.

Тогда решения неоднородной системы (3.19) примут вид

$$x_k(\tau) = I_1 \cos \tau + I_2 \sin \tau + C_3 \cos \tau + C_4 \sin \tau ,$$

$$y_k(\tau) = I_1 \sin \tau - I_2 \cos \tau + C_3 \sin \tau - C_4 \cos \tau ,$$

где

$$I_1 = \int_0^{\tau} (F_1 \cos \tau + F_2 \sin \tau) d\tau , \quad I_2 = \int_0^{\tau} (F_2 \sin \tau - F_1 \cos \tau) d\tau .$$

Так как функции  $x_k(\tau)$ ,  $y_k(\tau)$  ( $k=2,3,\dots$ ) должны удовлетворять начальным условиям  $x_k(0), y_k(0)=0$ , то  $C_3=C_4=0$ .

Условия периодичности этих функций при этом примут вид

$$x_k(2\pi) = I_1(2\pi) \cos \tau + I_2(2\pi) \sin \tau = 0 ,$$

$$y_k(2\pi) = I_1(2\pi) \sin \tau - I_2(2\pi) \cos \tau = 0$$

или в матричном виде

$$\begin{bmatrix} \cos \tau & \sin \tau \\ \sin \tau & -\cos \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(2\pi) \\ I_2(2\pi) \end{bmatrix} = 0 . \quad (3.23)$$

Так как определитель системы (3.23) отличен от нуля, то она может иметь лишь тривиальное решение

$$I_1(2\pi) = \int_0^{2\pi} (F_1 \cos \tau + F_2 \sin \tau) d\tau = 0 , \quad (3.24)$$

$$I_2(2\pi) = \int_0^{2\pi} (F_1 \sin \tau - F_2 \cos \tau) d\tau = 0 .$$

Соотношения (3.24) представляют собой условия периодичности функций  $x_k(\tau), y_k(\tau)$ . Из этих условий могут быть найдены константы  $h_k$  ( $k=2,3,\dots$ ), определяющие поправки к периоду колебаний исследуемой системы.

Пример 3.2.

Рассмотрим определение периодических решений уравнений Дюффинга

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -\nu x^3, \quad (3.25)$$

где  $\omega$  и  $\nu > 0$  - некоторые параметры при следующих начальных условиях:  $x(0) = \varepsilon$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ .

Уравнение (3.25) имеет интеграл

$$I = \dot{x}^2/2 + \omega^2 x^2/2 + \nu x^4/4 = \text{const},$$

причем потенциальная энергия системы  $\Pi(x) = \omega^2 x^2/2 + \nu x^4/4$  имеет единственный минимум  $\min \Pi(x) = 0$ . Решения уравнения (3.25) на фазовой плоскости  $(x, \dot{x})$  представляют собой замкнутые кривые (рис. I.2), каждая из которых соответствует определенному значению интеграла  $I$ .

Найдем решения уравнения (3.25) методом Ляпунова-Пуанкаре.

Будем искать эти решения в виде

$$x(\tau) = \varepsilon x_1(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + \varepsilon^3 x_3(\tau) + \varepsilon^4 \dots, \quad (3.26)$$

где

$$\tau = \frac{2\pi t}{T} = \frac{\omega t}{1 + \varepsilon^2 h_2 + \dots}, \quad \varepsilon = x(0)$$

Подставляя ряд (3.26) в уравнение (3.25) и переходя к новой независимой переменной  $\tau$ , найдем

$$\begin{aligned} \varepsilon x_1'' + \varepsilon^2 x_2'' + \varepsilon^3 x_3'' + \dots = [-\omega^2(\varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \dots) - \\ - \nu (\varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots)^3] (1 + \varepsilon^2 h_2 + \dots)^2 / \omega^2. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} (\varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots)^3 = \varepsilon^3 x_1^3 + \varepsilon^4 \dots \\ (1 + \varepsilon^2 h_2 + \dots)^2 = 1 + 2\varepsilon^2 h_2 + \varepsilon^3 \dots \end{aligned}$$

и приравнявая в соотношении (3.27) члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , найдем

$$x_1'' + x_1 = 0 \quad , \quad (3.28)$$

$$x_2'' + x_2 = 0 \quad , \quad (3.29)$$

$$x_3'' + x_3 = - \nu x_1^3 / \omega^2 - 2h_2 x_1 = F(\tau) \quad , \quad (3.30)$$

.....

Решим систему (3.28-3.30) последовательно. Уравнение (3.28) имеет решение

$$x_1 = C_1 \cos \tau + C_2 \sin \tau \quad .$$

Определяя произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  из начальных условий  $x_1(0)=1$ ,  $x_1'(0)=0$ , получим  $C_1=1$ ,  $C_2=0$ .

Аналогично, решая уравнение (3.29), получим

$$x_2 = C_3 \cos \tau + C_4 \sin \tau \quad .$$

Так как  $x_2(0)=0$ ,  $x_2'(0)=0$ , то  $C_3=C_4=0$ .

При определении функции  $x_3(\tau)$  необходимо решить линейное неоднородное уравнение

$$x_3'' + x_3 = - \nu \cos^3 \tau / \omega^2 - 2h_2 \cos \tau \quad . \quad (3.31)$$

Решение однородного уравнения, соответствующего (3.31), имеет вид

$$x_3^0 = C_5 \cos \tau + C_6 \sin \tau \quad . \quad (3.32)$$

Условие периодичности функции  $x_3(\tau)$  заключается в том, чтобы правая часть уравнения (3.31) не содержала члены, пропорциональные  $\sin \tau$  или  $\cos \tau$ . В противном случае решение  $x_3(\tau)$  будет содержать вековые члены и функция  $x_3(\tau)$  не будет периодичной. Поэтому условия периодичности функции  $x_3(\tau)$  примут вид ( $F_1=0$ )

$$\int_0^{2\pi} (- \nu \cos^3 \tau / \omega^2 - 2h_2 \cos \tau) \sin \tau d\tau = 0 \quad . \quad (3.33)$$

$$\int_0^{2\pi} (- \nu \cos^3 \tau / \omega^2 - 2h_2 \cos \tau) \cos \tau d\tau = 0 \quad . \quad (3.34)$$

Второе условие (3.34) позволяет определить константу  $h_2$ :

$$h_2 = -\frac{\nu}{\omega^2} \int_0^{2\pi} \cos^4 \tau d\tau = -\frac{3}{8} \frac{\nu}{\omega^2} \quad (3.35)$$

А первое условие (3.33) удовлетворяется тождественно.

Учитывая выражение (3.35), уравнение (3.31) после проведения простых тригонометрических преобразований примет вид

$$x_3'' + x_3 = -\nu \cos 3\tau / 4\omega^2 \quad (3.36)$$

Определяя частное решение неоднородного уравнения (3.36) и учитывая (3.32), запишем общее решение уравнения в виде

$$x_3 = C_5 \cos \tau + C_6 \sin \tau + \nu \cos 3\tau / 32\omega^2$$

Отсюда, учитывая начальные условия  $x_3(0) = x_3'(0) = 0$ , найдем

$$C_5 = -\nu / 32\omega^2, \quad C_6 = 0$$

Решение исходного уравнения с точностью до величин  $O(\varepsilon^4)$  будет иметь вид

$$x = \varepsilon \cos \tau - \varepsilon \nu (\cos \tau - \cos 3\tau) / 32\omega^2 + O(\varepsilon^4),$$

где  $\tau = t / (1 - 3\nu\varepsilon^2 / 8\omega^2 + \dots)$

## 4. ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЗОНАНСОВ В КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

## 4.1. Система с быстрыми фазами. Определение резонансов, возникающих в системе

В теории нелинейных систем особенно сложными и малоизученными являются задачи, связанные с возникновением разнообразных резонансных явлений в их движении. Резонансы возникают в колебательных системах, характеризуемых несколькими частотами. Исследование многочастотных систем имеет большое значение в современной науке и технике, так как реализация резонансных соотношений между частотами приводит, как правило, к потере устойчивости положения равновесия и, следовательно, к переходу системы в другое положение равновесия, качественно отличное от предыдущего. Примеры потери устойчивости линейных систем при возникновении резонансов были рассмотрены в разделах 1.6 и 1.8 при изучении вынужденных колебаний. К исследованию резонансов сводятся также задачи анализа параметрических колебаний механических систем, когда параметры систем изменяются периодически. Наиболее сложными для изучения являются системы с переменными частотами, так называемые существенно нелинейные системы [3], которые будут рассмотрены в разделе 4.6.

Основным объектом исследования в математической теории многочастотных систем является стандартная система с несколькими фазами вида

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(x, \varphi), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega(x) + \varepsilon F(x, \varphi), \quad (4.1)$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)$  — вектор медленных переменных,  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$  —

вектор быстрых фаз,  $\omega(x) = (\omega_1(x), \dots, \omega_m(x))$  - вектор-функция частот, зависящих от медленных переменных;  $X(x, \varphi)$  и  $\Phi(x, \varphi)$  - функции, периодически зависящие от фаз  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  с периодом  $2\pi$ ;  $\varepsilon$  - малый параметр.

Замечание.

Если некоторая функция  $f(\gamma)$  быстрой переменной  $\gamma$  периодична по ней с периодом  $T$  ( $f(\gamma+T) = f(\gamma)$ ), то вводя новую переменную  $\varphi = \omega_\gamma \gamma$ , где  $\omega_\gamma = 2\pi/T$  - частота колебаний переменной  $\gamma$ , получим функцию  $f(\varphi/\omega_\gamma)$ , периодичную по новой переменной с периодом  $2\pi$ .

Пример 4.1.

В качестве примера приведения механической системы к стандартному виду (4.1) рассмотрим систему с двумя степенями свободы (рис. 1.5), колебания которой изучались в разделах 1.5, 1.8, 2.5. Предположим, что на данную систему действуют обобщенные силы, периодически зависящие от времени, вида

$$\varepsilon Q_1 = \varepsilon Q_1(\theta, \gamma, \dot{\theta}, \dot{\gamma}, pt) \quad , \quad \varepsilon Q_2 = \varepsilon Q_2(\theta, \gamma, \dot{\theta}, \dot{\gamma}, pt) \quad , \quad (4.2)$$

где  $p$  - частота периодического воздействия.

Приведенные зависимости (4.2) обобщают случаи, рассмотренные ранее. Так, если обобщенные силы (4.2) не зависят от обобщенных координат  $\theta, \gamma$  и скоростей  $\dot{\theta}, \dot{\gamma}$ , то приходим к случаю вынужденных колебаний, рассмотренному в разделе 1.8. Если обобщенные силы  $\varepsilon Q_1, \varepsilon Q_2$  не зависят от  $pt$ , то получаем случай неперiodических возмущающих сил, подробно рассмотренный при изучении автоколебаний данной механической системы (раздел 2.5).

Форма уравнений движения рассматриваемой механической системы остается прежней (2.58). Поэтому для приведения этой системы

$$a_{11} \ddot{\theta} + a_{12} \ddot{\gamma} + c_{11} \dot{\theta} + c_{12} \dot{\gamma} = \varepsilon Q_1 \quad , \quad (4.3)$$

$$a_{21}\ddot{\theta} + a_{22}\ddot{\gamma} + c_{21}\dot{\theta} + c_{22}\dot{\gamma} = \varepsilon Q_2$$

к стандартному виду используется без изменений схема, изложенная в разделе 2.4.

Тогда, переходя в системе (4.3) к переменным амплитуды - фазы, получим

$$\begin{aligned} \frac{dK_1}{dt} &= \frac{\varepsilon(D_4Q_1 - D_2Q_2) \sin\varphi_1}{\omega_1(\chi_2 - \chi_1)(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)} \\ \frac{dK_2}{dt} &= \frac{\varepsilon(D_3Q_1 - D_1Q_2) \sin\varphi_2}{\omega_2(\chi_2 - \chi_1)(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)} \\ \frac{d\varphi_1}{dt} &= \omega_1 - \frac{\varepsilon(D_4Q_1 - D_2Q_2) \cos\varphi_1}{K_1\omega_1(\chi_2 - \chi_1)(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)} \\ \frac{d\varphi_2}{dt} &= \omega_2 + \frac{\varepsilon(D_3Q_1 - D_1Q_2) \cos\varphi_2}{K_2\omega_2(\chi_2 - \chi_1)(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)} \\ \frac{d\psi}{dt} &= p \end{aligned} \quad (4.4)$$

где  $K_1, K_2$  и  $\varphi_1, \varphi_2, \psi = pt$  - амплитуды и фазы рассматриваемой системы, а параметры  $D_1, D_2, D_3, D_4$  определены в разделе 2.4.

Следовательно, данная система сводится к трехчастотной системе, причем  $\omega_1$  и  $\omega_2$  - собственные частоты системы, определенные в разделе 1.5;  $p$  - частота внешнего воздействия.

Говорят, что в стандартной системе (4.1) возникает резонанс, если целочисленная комбинация частот  $\omega_1, \dots, \omega_m$  близка к нулю:

$$\varepsilon_1\omega_1(x) + \dots + \varepsilon_m\omega_m(x) = 0 \quad (4.5)$$

где  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$  - обычно малые целые числа,  $\omega_1(x) \neq 0, \dots, \omega_m(x) \neq 0$ .

Порядком резонанса системы (4.1) называют число

$$|N| = |\varepsilon_1| + \dots + |\varepsilon_m|$$

где  $\nu_1, \dots, \nu_m$  удовлетворяют соотношениям (4.5).

Чем меньше порядок резонанса  $|N|$ , тем сильнее воздействие резонанса (4.5) на движение системы / I4 /. Поэтому на практике обычно изучают резонансы только низших порядков, то есть когда  $\nu_1, \dots, \nu_m$  в соотношении (4.5) являются малыми целыми числами.

Для двухчастотной системы ( $m=2$ ) резонанс  $\omega_1(x)=\omega_2(x)$  называют главным резонансом ( $|N|=2$ ), а резонансы, для которых  $|N|>2$ , называют резонансами высших порядков или комбинационными резонансами.

В теории резонансных систем обычно разделяют случаи с постоянными частотами и случаи с переменными частотами, когда частоты  $\omega_1, \dots, \omega_m$  являются функциями медленных переменных  $x$ . В последнем варианте соотношение (4.5) задает в пространстве переменных  $x_1, \dots, x_n$  некоторую поверхность, которую называют резонансной поверхностью.

Основным методом исследования многочастотной системы (4.1) в настоящее время является метод усреднения, разработанный в современном виде Боголюбовым Н.Н., Митропольским Ю.А., Волосовым В.М. и другими отечественными учеными. В работах этих ученых было показано, что метод усреднения органично связан с применением специальной замены переменных, приводящей к разделению движений в исходной системе. Изложим этот метод применительно к системе (4.1). Сделаем в системе (4.1) замену переменных / 5 /:

$$x = x^0 + \varepsilon u_1(x^0, \varphi^0) + \varepsilon^2 u_2(x^0, \varphi^0) + \dots, \quad (4.6)$$

$$\varphi = \varphi^0 + \varepsilon v_1(x^0, \varphi^0) + \varepsilon^2 v_2(x^0, \varphi^0) + \dots,$$

где  $x^0$  и  $\varphi^0$  - новые переменные,  $u_k$  и  $v_k$  ( $k=1, 2, \dots$ ) - функции, периодичные по фазам  $\varphi^0$  с нулевым средним. Причем новые переменные

$x^0$  и  $\varphi^0$  должны удовлетворять дифференциальным уравнениям, правые части которых не содержат фазы  $\varphi^0$  (усредненные уравнения):

$$\begin{aligned} \frac{dx^0}{dt} &= \varepsilon A_1(x^0) + \varepsilon^2 A_2(x^0) + \varepsilon^3 \dots, \\ \frac{d\varphi^0}{dt} &= \omega(x^0) + \varepsilon B_1(x^0) + \varepsilon^2 \dots \end{aligned} \quad (4.7)$$

Неизвестные функции  $u_k, v_k, A_k$  и  $B_k$  ( $k=1, 2, \dots$ ) подлежат определению в процессе построения решений методом усреднения.

Рассмотрим построение асимптотических решений (4.6) для медленных переменных  $x$  (построение решений для быстрых переменных  $\varphi$  проводится аналогично).

Подставляя замену переменных (4.6) в первое уравнение системы (4.1) и раскладывая функцию  $X$  в ряд Маклорена по параметру  $\varepsilon$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{dx^0}{dt} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial x^0} \frac{dx^0}{dt} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \varphi^0} \frac{d\varphi^0}{dt} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial x^0} \frac{dx^0}{dt} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial \varphi^0} \frac{d\varphi^0}{dt} + \varepsilon^3 \dots = \\ = \varepsilon X(x^0, \varphi^0) + \varepsilon^2 \frac{\partial X}{\partial \varepsilon} + \varepsilon^3 \dots \end{aligned} \quad (4.8)$$

где

$$\left. \frac{\partial X}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial X}{\partial x} u_1 + \frac{\partial X}{\partial \varphi} v_1.$$

Определяя производные  $dx^0/dt$  и  $d\varphi^0/dt$  в соответствии с выражениями (4.7), представим соотношение (4.8) в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon A_1(x^0) + \varepsilon^2 A_2(x^0) + \varepsilon^3 \dots + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial x^0} (\varepsilon A_1(x^0) + \varepsilon^2 \dots) + \\ + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \varphi^0} (\omega(x^0) + \varepsilon B_1(x^0) + \dots) + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial x^0} (\varepsilon A_1(x^0) + \varepsilon^2 \dots) + \\ + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial \varphi^0} (\omega(x^0) + \varepsilon \dots) + \varepsilon^3 \dots = \varepsilon X(x^0, \varphi^0) + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial X}{\partial x} u_1 + \frac{\partial X}{\partial \varphi} v_1 \right) + \varepsilon^3 \dots \end{aligned} \quad (4.9)$$

В соответствии с общей схемой построения асимптотических решений приравняем в выражении (4.9) члены при одинаковых степенях  $\epsilon$ . Тогда

$$\frac{\partial u_1}{\partial \varphi^0} \omega(x^0) = X(x^0, \varphi^0) - A_1(x^0),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial \varphi^0} \omega(x^0) = \frac{\partial X}{\partial x} u_1 + \frac{\partial X}{\partial \varphi} v_1 - \frac{\partial u_1}{\partial x^0} A_1(x^0) - \frac{\partial u_1}{\partial \varphi^0} B_1(x^0) - A_2(x^0),$$

..... (4.10)

$$\frac{\partial u_k}{\partial \varphi^0} \omega(x^0) = D_k(x^0, \varphi^0) - A_k(x^0) ,$$

где  $D_k(x^0, \varphi^0)$  - известные функции, периодичные по фазам  $\varphi^0$  с периодом  $2\pi$ .

Аналогично могут быть получены асимптотические разложения для быстрой переменной  $\varphi^0$ , которые будут иметь вид

$$\frac{\partial v_1}{\partial \varphi^0} \omega(x^0) = \Phi(x^0, \varphi^0) - B_1(x^0),$$

..... (4.11)

$$\frac{\partial v_k}{\partial \varphi^0} \omega(x^0) = E_k(x^0, \varphi^0) - B_k(x^0) ,$$

где  $E_k(x^0, \varphi^0)$  - известные периодические функции фаз  $\varphi^0$ .

Замечание.

В левой части дифференциальных уравнений (4.10-4.11) стоят выражения  $\frac{\partial u_k}{\partial \varphi^0} \omega(x^0)$  и  $\frac{\partial v_k}{\partial \varphi^0} \omega(x^0)$ , которые в многомерном случае следует понимать как скалярные произведения соответствующих векторных функций, например,

$$\frac{\partial u_k}{\partial \varphi^0} \omega(x^0) = \frac{\partial u_k}{\partial \varphi_1^0} \omega_1(x^0) + \dots + \frac{\partial u_k}{\partial \varphi_m^0} \omega_m(x^0) .$$

Дифференциальные уравнения (4.10-4.11) представляют собой линейные уравнения с периодической правой частью. Поэтому для решения этих уравнений воспользуемся методом Фурье / 5 /.

Так как все полученные уравнения (4.10-4.11) решаются одинаково, рассмотрим, например, первое уравнение системы (4.10). Будем искать его решение в виде ряда Фурье (см. Приложение I)

$$u_1(x^0, \varphi^0) = \sum_{s_1, \dots, s_m} a_{s_1, \dots, s_m}(x^0) \exp [i(s_1 \varphi_1 + \dots + s_m \varphi_m)], \quad (4.12)$$

где  $a_{s_1, \dots, s_m}(x^0)$  - коэффициенты Фурье,  $s_1, \dots, s_m$  - целые числа (индексы ряда),  $\sum_{s_1, \dots, s_m}$  -  $m$ -кратные суммы.

Причем из условия равенства нулю среднего функции  $u_1$  по переменным  $\varphi_1^0, \dots, \varphi_m^0$  следует  $a_{0, \dots, 0} = 0$ . В соответствии с методом Фурье разложим правую часть уравнения для  $u_1$  также в ряд Фурье, тогда

$$X(x^0, \varphi^0) = \sum_{s_1, \dots, s_m} b_{s_1, \dots, s_m}(x^0) \exp [i(s_1 \varphi_1 + \dots + s_m \varphi_m)]. \quad (4.13)$$

Подставляя ряды (4.12-4.13) в уравнение для  $u_1$  и приравнявая члены при одинаковых гармониках, нетрудно получить

$$a_{s_1, \dots, s_m}(x^0) = \frac{b_{s_1, \dots, s_m}(x^0)}{i(s_1 \omega_1(x^0) + \dots + s_m \omega_m(x^0))}. \quad (4.14)$$

Для обеспечения равенства среднего функции  $u_1$  нулю неизвестную функцию  $A_1(x^0)$  необходимо выбрать из условия

$$A_1(x^0) = b_{0, \dots, 0}(x^0),$$

то есть функция  $A_1(x^0)$  определяется как среднее от функции  $X(x^0, \varphi^0)$  по переменным  $\varphi_1^0, \dots, \varphi_m^0$ , а именно

$$A_1(x^0) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} X(x^0, \varphi_1^0, \dots, \varphi_m^0) d\varphi_1^0 \dots d\varphi_m^0,$$

что соответствует принципу усреднения.

Аналогично могут быть решены все дифференциальные уравнения, входящие в системы (4.10-4.11). При этом

$$A_k(x^0) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} D_k(x^0, \varphi_1^0, \dots, \varphi_m^0) d\varphi_1^0 \dots d\varphi_m^0,$$

$$B_k(x^0) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} E_k(x^0, \varphi_1^0, \dots, \varphi_m^0) d\varphi_1^0 \dots d\varphi_m^0.$$

Таким образом, если возмущающие функции  $X(x^0, \varphi^0)$  и  $\Phi(x^0, \varphi^0)$  представлены рядами Фурье вида (4.13), то неизвестные функции асимптотических разложений (4.6-4.7) определяются последовательным решением уравнений (4.10-4.11) методом Фурье, при этом функции  $A_k, B_k$  находятся усреднением известных функций  $D_k, E_k$  по быстрым фазам  $\varphi_1^0, \dots, \varphi_m^0$ .

Найденными асимптотическими разложениями можно пользоваться при

$$\varepsilon_1 \omega_1(x^0) + \dots + \varepsilon_m \omega_m(x^0) \neq 0,$$

в противном случае функции  $u_k, v_k$  становятся неограниченными и ими пользоваться для аппроксимации искомых решений нельзя.

Однако даже в этом случае разложения (4.6) не являются бесполезными, так как их анализ позволяет определить резонансы, возникающие в исследуемой системе уравнений (4.1). Резонансные явления в системе (4.1) возникают, когда знаменатели в выражениях (4.14) обращаются в ноль. В этом случае функции  $u_k, v_k$  терпят разрыв и неограниченно возрастают. Для выявления наиболее

существенных резонансов обычно бывает достаточно проанализировать так называемое "улучшенное" первое приближение метода усреднения / 9 /

$$\begin{aligned}x &= x^0 + \varepsilon u_1(x^0, \varphi^0) \\ \varphi &= \varphi^0 + \varepsilon v_1(x^0, \varphi^0)\end{aligned}$$

где переменные  $x^0$  и  $\varphi^0$  определяются усредненными уравнениями

$$\frac{dx^0}{dt} = \varepsilon A_1(x^0) \quad , \quad \frac{d\varphi^0}{dt} = \omega(x^0) + \varepsilon B_1(x^0)$$

Резонанс  $\varepsilon_1 \omega_1 + \dots + \varepsilon_m \omega_m = 0$  в системе (4.1) возникает, если выполнены два условия:

1. Соответствующие коэффициенты ряда Фурье (4.13) отличны от нуля:  $b_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m} \neq 0$ ;

2. Обращаются в ноль или близки к нулю знаменатели в выражении (4.14):

$$\varepsilon_1 \omega_1(x^0) + \dots + \varepsilon_m \omega_m(x^0) = 0$$

Резонансные случаи движения системы (4.1) требуют соответствующей модификации процедуры усреднения и будут рассмотрены ниже.

#### Пример 4.2.

В качестве примера определим резонансы, возникающие в колебательной системе, движение которой описывается уравнением Матье / 15 /

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = \varepsilon a y \cos pt \quad , \quad (4.15)$$

где  $p > 0$  - частота параметрического периодического возмущения,  $a > 0$  - некоторый параметр,  $\omega > 0$  - частота колебаний невозмущенной системы,  $\varepsilon$  - малый параметр.

Уравнение Матье является классическим примером воздействия

периодического параметрического возмущения на систему, характеризуемого тем, что в положении равновесия  $y=0$  параметрические колебания отсутствуют.

Невозмущенная система ( $\varepsilon=0$ ), соответствующая уравнению (4.15), имеет вид

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \quad (4.16)$$

и имеет известное решение

$$y = K \cos \varphi, \quad z = \frac{dy}{dt} = -K\omega \sin \varphi, \quad (4.17)$$

где  $K$  - амплитуда,  $\varphi = \omega t + \varphi_0$  - фаза,  $\varphi_0$  - начальная фаза.

Приведем уравнение (4.15) к стандартной форме (4.1). Для этого запишем его в виде трех уравнений первого порядка:

$$\frac{dy}{dt} = z, \quad \frac{dz}{dt} = -\omega^2 y + \varepsilon a y \cos \varphi, \quad \frac{d\varphi}{dt} = p. \quad (4.18)$$

Сделаем в системе (4.18) замену переменных  $y, z$  на переменные  $K, \varphi$ . Тогда, подставляя выражения (4.17) в систему (4.18) и проводя дифференцирование, получим

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} \cos \varphi - K \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi &= -K\omega \sin \varphi, \\ -\frac{dK}{dt} \sin \varphi - K \frac{d\varphi}{dt} \cos \varphi &= -K\omega \cos \varphi + \frac{\varepsilon}{\omega} a K \cos \varphi \cos \varphi, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= p. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Определяя из уравнений (4.19) производные  $dK/dt$  и  $d\varphi/dt$ , получим дифференциальные уравнения для новых переменных:

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{\omega} a K \cos \varphi \cos \varphi \sin \varphi, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega - \frac{\varepsilon}{\omega} a \cos^2 \varphi \cos \varphi, \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = p$$

Система (4.20) представляет собой систему с двумя быстрыми фазами  $(\varphi, \psi)$  и имеет стандартный вид (4.1). Тогда, проводя в выражениях (4.20) необходимые тригонометрические преобразования, получим

$$-\frac{\varepsilon}{\omega} a K \cos \varphi \cos \psi \sin \varphi = -\frac{\varepsilon K a}{4\omega} [\sin(2\varphi - \psi) + \sin(2\varphi + \psi)] \quad , \quad (4.21)$$

$$-\frac{\varepsilon}{\omega} a \cos^2 \varphi \cos \psi = -\frac{\varepsilon a}{\omega} \cos \psi - \frac{\varepsilon a}{4\omega} [\cos(2\varphi - \psi) + \cos(2\varphi + \psi)]$$

Представленные в такой форме правые части дифференциальных уравнений (4.20) фактически представляют собой ряды Фурье соответствующих функций. Так, например, наличие в правых частях уравнений (4.20) гармоники  $\sin(2\varphi - \psi)$  приводит к отличию от нуля коэффициентов ряда Фурье (4.13) вида  $b_{2,-1}, b_{-2,1}$  (переход от тригонометрической формы ряда Фурье к комплексной форме осуществляется при помощи формул Эйлера, см. Приложение I). Анализируя таким образом выражения (4.21), нетрудно установить, что в правых частях системы (4.20) отличны от нуля следующие коэффициенты ряда Фурье:  $b_{0,1}, b_{0,-1}, b_{2,-1}, b_{-2,1}, b_{2,1}, b_{-2,-1}$ , которые порождают в асимптотических рядах (4.6) в соответствии с формулами (4.14) знаменатели вида  $p, 2\omega - p, 2\omega + p$ . Ясно, что если  $\omega > 0$  и  $p > 0$ , то обращаться в ноль при соответствующем значении частоты периодического возмущения  $p$  может только знаменатель  $2\omega - p$ , порождая при этом резонанс порядка  $|N|=3$  в системе (4.20).

В нерезонансном случае, когда величина  $2\omega - p \neq 0$  и не является малой, движение системы (4.20) описывается уравнениями первого приближения метода усреднения, которые в соответствии с

представлением (4.21) будут иметь вид

$$\frac{dK^0}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi^0}{dt} = \omega \quad (4.22)$$

В резонансном случае уравнения (4.22) уже не описывают движение системы (4.20) с достаточной точностью и требуют модификации метода усреднения (см. раздел 4.2).

#### 4.2. Метод усреднения при исследовании резонансного движения системы

Рассмотренный в предыдущем разделе метод построения асимптотических решений соответствует нерезонансному случаю движения системы (4.1), когда

$$\varepsilon_1 \omega_1(x) + \dots + \varepsilon_m \omega_m(x) \neq 0 \quad (4.23)$$

где  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$  - малые целые числа.

При изучении резонансного случая движения системы (4.1), когда одна из целочисленных комбинаций частот (4.23) обращается в ноль или является малой в каком-либо смысле, процедура усреднения системы (4.1) видоизменяется.

Замечание.

Обычно резонансная область системы (4.1) характеризуется тем, что комбинация частот  $\varepsilon_1 \omega_1(x) + \dots + \varepsilon_m \omega_m(x)$  есть величина порядка  $\varepsilon^{1/2}$ , что обозначается символом  $O(\varepsilon^{1/2})$  (см. Приложение 2). Ниже будет показано, что в резонансной области роль малого параметра играет  $\varepsilon^{1/2}$ . Отсюда

$$\varepsilon_1 \omega_1(x) + \dots + \varepsilon_m \omega_m(x) = O(\varepsilon^{1/2}) \quad (4.24)$$

В настоящем разделе рассматривается получение так называемой частично усредненной системы, то есть усреднение системы (4.1) проводится с учетом возникающего отдельного резонанса (4.24), где

$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$  - конкретные малые числа.

Введем в рассмотрение резонансную фазу

$$\theta = \varepsilon_1 \varphi_1 + \dots + \varepsilon_m \varphi_m \quad (4.25)$$

и резонансную расстройку частот

$$h = \varepsilon_1 \omega_1 + \dots + \varepsilon_m \omega_m \quad (4.26)$$

Сделаем в системе (4.1) замену переменных

$(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m) \rightarrow (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{m-1}, \theta)$ , то есть заменим одну из фаз системы резонансной фазой

$$\varphi_m = (\theta - \varepsilon_1 \varphi_1 - \dots - \varepsilon_{m-1} \varphi_{m-1}) / \varepsilon_m \quad (\varepsilon_m \neq 0).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \varepsilon X(x, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{m-1}, \theta), \\ \frac{d\theta}{dt} &= h(x) + \varepsilon \Lambda(x, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{m-1}, \theta), \\ \frac{d\varphi_k}{dt} &= \omega_k(x) + \varepsilon \Phi_k(x, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{m-1}, \theta), \quad (k=1, \dots, m-1) \end{aligned} \quad (4.27)$$

где  $\Lambda = \varepsilon_1 \Phi_1 + \dots + \varepsilon_m \Phi_m$ . Причем в резонансной области переменная  $\theta$  становится медленной, так как  $h(x) = O(\varepsilon^{1/2})$ .

Частично усредненная система получается из системы (4.27) формальным усреднением первых двух уравнений по быстро-вращающимся фазам  $\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}$

$$\begin{aligned} \frac{dx^0}{dt} &= \varepsilon A_1(x^0, \theta^0), \\ \frac{d\theta^0}{dt} &= h(x^0) + \varepsilon B_1(x^0, \theta^0), \end{aligned} \quad (4.28)$$

где  $x^0$  и  $\theta^0$  - усредненные значения медленных переменных  $x$  и  $\theta$ ,

$$A_1(x^0, \theta^0) = \frac{1}{(2\pi)^{m-1}} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} X(x^0, \varphi_1^0, \dots, \varphi_{m-1}^0, \theta^0) d\varphi_1^0 \dots d\varphi_{m-1}^0,$$

$$V_1(x^0, \vartheta^0) = \frac{1}{(2\pi)^{m-1}} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \Lambda(x^0, \varphi_1^0, \dots, \varphi_{m-1}^0, \vartheta^0) d\varphi_1^0 \dots d\varphi_{m-1}^0 .$$

Следовательно, при усреднении системы (4.1) с учетом возникающего в ней резонанса (4.24) количество медленных переменных усредненной системы увеличивается на единицу, что в общем случае усложняет дальнейшее исследование усредненной системы.

Замечание.

Процедура получения частично усредненной системы (4.27) в общем случае требует более детального обоснования, так как в правых частях системы (4.27) присутствуют члены различных порядков малости ( $O(\varepsilon)$  и  $O(\varepsilon^{1/2})$ ). Данная особенность системы (4.27) будет учтена ниже (раздел 4.6, см. также / 13 /). Однако это не приводит к изменению вида частично усредненной системы.

При изучении резонансного движения системы (4.1) обычно выделяют два случая:

1. Частоты постоянны  $\omega_k = const$  ( $k=1, \dots, m$ ) и не зависят от медленных переменных  $x$ .

2. Частоты являются функциями медленных переменных  $x$  и изменяются в процессе движения системы (4.1).

В первом случае заранее можно подсчитать расстройку частот и определить, с каким типом движения системы (4.1) (нерезонансным или резонансным) мы имеем дело в процессе всего времени движения системы. В зависимости от этого производится усреднение системы с последующим переходом к исследованию усредненной системы. Значительно более сложным является второй случай: переменных частот  $\omega_k(x)$ . В процессе движения системы (4.1) ее траектория может пересекать резонансные области движения, причем возможно

пересечение нескольких резонансов. В этом случае для каждого участка движения (нерезонансного или резонансного) строится своя усредненная система и каждый участок движения системы (3.16) требует отдельного исследования. Особенно сложным и мало-изученным является вопрос "застревания" траектории в окрестности резонансов (вопросы устойчивости резонансов с учетом переменности частот системы), методы изучения которых в настоящее время еще не достаточно разработаны. Некоторые аспекты исследования устойчивости резонансов будут рассмотрены в разделе 4.6.

Пример 4.3.

Рассмотрим получение частично усредненных уравнений для уравнения Матье (4.15). В примере 4.2 посредством "улучшенного" первого приближения метода усреднения уравнения (4.15) было установлено, что в рассматриваемой колебательной системе возможно возникновение резонанса с резонансной расстройкой  $2\omega - p$  ( $\omega > 0, p > 0$ ). Поэтому, когда  $2\omega - p = 0$ , необходимо для исследования резонансного движения уравнения (4.15) строить частично усредненную систему. Тогда в соответствии с изложенным выше методом построения частично усредненной системы введем в рассмотрение резонансную фазу  $\theta = 2\varphi - \psi$ . Сделаем в системе (4.20) замену переменных  $(\varphi, \psi) \rightarrow (\theta, \psi)$ , где  $\varphi = (\theta + \psi)/2$ .

Тогда

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega} aK \sin[(\theta + \psi)/2] \cos[(\theta + \psi)/2] \cos\psi$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\omega - p - \frac{2\varepsilon}{\omega} a \cos^2[(\theta + \psi)/2] \cos\psi \quad (4.29)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = p$$

Усредняя первые два уравнения системы (4.29) по быстрой фазе

$\psi$ , получим

$$\frac{dK}{dt} = - \frac{\varepsilon a K}{4\omega} \sin\theta \quad , \quad (4.30)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\omega - p - \frac{\varepsilon a}{2\omega} \cos\theta \quad ,$$

где индексы (о) над переменными  $K$  и  $\theta$  для простоты опущены.

Нетрудно заметить, что усреднение выражений (4.29) по быстрой фазе  $\psi$  после замены  $\varphi = (\psi + \theta)/2$  формально означает сохранение в правых частях (4.21) лишь членов, непосредственно зависящих от резонансной фазы  $\theta = 2\varphi - \psi$  и членов, входящих в усредненную систему первого приближения для нерезонансного случая. Остальные гармоники относятся к нерезонансным и в частично усредненной системе не учитываются.

Покажем, что в окрестности резонанса  $2\omega - p = 0$  движение системы (4.30) неустойчиво. Для этого в частично усредненной системе (4.30) произведем замену переменных / 15 /

$$A = K \cos(\theta/2) \quad , \quad B = -K \sin(\theta/2) \quad . \quad (4.31)$$

Дифференцируя соотношения (4.31) и определяя производные  $dK/dt$  и  $d\theta/dt$  из системы (4.30), нетрудно получить

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} B \left( h + \frac{\varepsilon a}{2\omega} \right) \quad , \quad \frac{dB}{dt} = - \frac{1}{2} A \left( h - \frac{\varepsilon a}{2\omega} \right) \quad , \quad (4.32)$$

где  $h = 2\omega - p$  - расстройка частот.

Система (4.32) представляет собой линейную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, имеющую характеристическое уравнение вида

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \left( h + \frac{\varepsilon a}{2\omega} \right) \\ -\frac{1}{2} \left( h - \frac{\varepsilon a}{2\omega} \right) & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

откуда

$$\lambda^2 = -\frac{1}{4} \left( h^2 - \frac{\varepsilon^2 a^2}{4\omega^2} \right) \quad (4.33)$$

При достаточно малых  $h$

$$|h| < \varepsilon a / 2\omega \quad (a > 0) \quad (4.34)$$

корни характеристического уравнения (4.33) вещественные и разных знаков, что ведет к неустойчивости движения, так как амплитуда колебаний  $K = (A^2 + B^2)^{1/2}$  неограниченно увеличивается с ростом  $t$ .

Неравенство (4.34) позволяет определить область неустойчивости движения системы (4.30). Так, вводя отношение частот  $\mu = \omega/p$  и решая неравенство (4.34) относительно  $\mu$ , получим

$$\frac{2\omega^2}{4\omega^2 + \varepsilon a} < \mu < \frac{2\omega^2}{4\omega^2 - \varepsilon a} \quad (4.35)$$

Область неустойчивости уравнения Матье показана на рис.4.1. В общем случае для уравнения Матье существуют также области неустойчивости в окрестности значений  $\mu = 1, 3/2, \dots / 15 /$ , однако для их определения необходимо определять высшие приближения метода усреднения.

#### 4.3. Пример исследования параметрических колебаний в системе с двумя степенями свободы

Рассмотрим механическую систему с двумя степенями свободы (рис.1.5), движение которой исследовалось в разделах 1.5, 1.8, 2.5. Предположим теперь, что на эту систему наряду с потенциальными силами действует периодическое параметрическое возмущение вида

$$c_1 = c_1^0 + \varepsilon \cos \rho t \quad (4.36)$$

где  $c_1$  - жесткость первой пружины,  $c_1^0$  - невозмущенное значение жесткости,  $\varepsilon$  - малый параметр,  $\rho$  - частота параметрического

# Область неустойчивости уравнения Матье

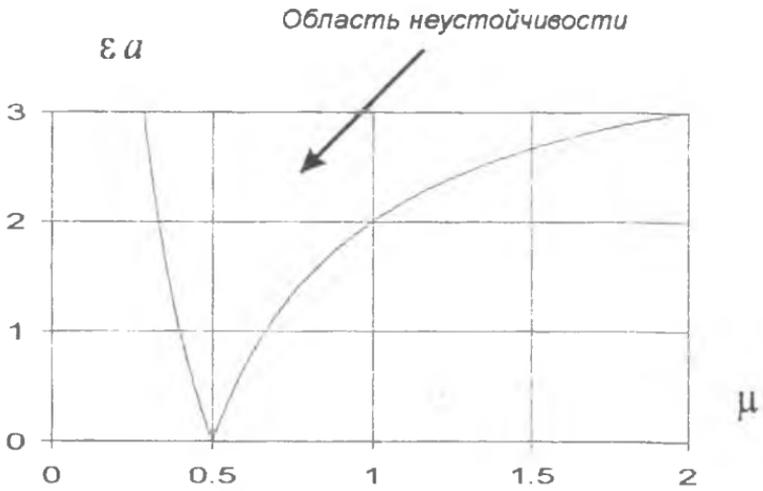


Рис.4.1



Рис.4.2

возмущения. Таким образом, предполагается, что жесткость первой пружины изменяется по гармоническому закону (4.36).

Рассмотрим движение системы в окрестности устойчивого положения равновесия, определенного при ее свободных колебаниях ( $\theta = \gamma = 0$ ). Кинетическая и потенциальная энергии системы в этом случае будут иметь формально тот же вид (I.66) и (I.74), что и в разделе I.5, где изучались свободные колебания данной системы. Поэтому подставляя выражения (I.66), (I.74) в уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial T}{\partial \theta} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} \quad ; \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}} \right] - \frac{\partial T}{\partial \gamma} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma}$$

и проводя те же преобразования, получим

$$\begin{aligned} a_{11} \ddot{\theta} + a_{12} \ddot{\gamma} + c_{11}^0 \theta + c_{12} \gamma &= -\varepsilon l^2 \theta \cos \omega t = \varepsilon Q_1, \\ a_{21} \ddot{\theta} + a_{22} \ddot{\gamma} + c_{21} \theta + c_{22} \gamma &= 0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

где  $c_{11}^0 = l^2(c_1^0 + c_2 + c_3)$  - невозмущенное значение коэффициента  $c_{11}$ ,  $\varepsilon Q_1$  - параметрическая возмущающая сила.

Преобразуем систему (4.37) к переменным амплитуды - фазы по формулам (2.59)

$$\begin{aligned} \theta &= K_1 \cos \varphi_1 + K_2 \cos \varphi_2, \\ \gamma &= K_1 \chi_1 \cos \varphi_1 + K_2 \chi_2 \cos \varphi_2, \\ \dot{\theta} &= -K_1 \omega_1 \sin \varphi_1 - K_2 \omega_2 \sin \varphi_2, \\ \dot{\gamma} &= -K_1 \omega_1 \chi_1 \sin \varphi_1 - K_2 \omega_2 \chi_2 \sin \varphi_2, \end{aligned} \quad (4.38)$$

где  $\varphi_1 = \omega_1 t + \varphi^{(1)}$ ,  $\varphi_2 = \omega_2 t + \varphi^{(2)}$ .

Тогда, повторяя преобразования раздела 2.4, найдем

$$\frac{dK_1}{dt} = \frac{\varepsilon Q_1 D_4 \sin \varphi_1}{\omega_1 (\chi_2 - \chi_1) (a_{11} a_{22} - a_{12}^2)}$$

$$\begin{aligned} \frac{dK_2}{dt} &= \frac{\varepsilon Q_1 D_3 \sin \varphi_2}{\omega_2 (\chi_2 - \chi_1) (a_{11} a_{22} - a_{12}^2)} \\ \frac{d\varphi_1}{dt} &= \omega_1 - \frac{\varepsilon Q_1 D_4 \cos \varphi_1}{K_1 \omega_1 (\chi_2 - \chi_1) (a_{11} a_{22} - a_{12}^2)} \\ \frac{d\varphi_2}{dt} &= \omega_2 + \frac{\varepsilon Q_1 D_3 \cos \varphi_2}{K_2 \omega_2 (\chi_2 - \chi_1) (a_{11} a_{22} - a_{12}^2)} \\ \frac{d\psi}{dt} &= p \end{aligned} \quad (4.39)$$

где  $D_3 = a_{12} + a_{22} \chi_1$ ,  $D_4 = a_{12} + a_{22} \chi_2$ , а коэффициенты распределения  $\chi_1, \chi_2$  и собственные частоты  $\omega_1, \omega_2$  определены в разделе I.5 ( $\chi_1 = -0.61$ ,  $\chi_2 = -3.10$ ,  $\omega_1 = 41.80 \text{с}^{-1}$ ,  $\omega_2 = 72.48 \text{с}^{-1}$ ).

Система (4.39) представляет собой систему с тремя быстрыми фазами  $\varphi_1, \varphi_2$  и  $\psi$ , и ее правые части вследствие проведенной замены (4.38) есть функции, периодичные по фазам  $\varphi_1, \varphi_2$  и  $\psi$  с периодом  $2\pi$ .

Определим резонансы, возможные в системе (4.39). Для этого разложим правые части системы (4.39) в ряды Фурье по фазам  $\varphi_1, \varphi_2$  и  $\psi$ . Выпишем только члены, зависящие от фаз, тогда

$$\begin{aligned} \varepsilon Q_1 \sin \varphi_1 &= -\varepsilon l^2 (K_1 \cos \varphi_1 + K_2 \cos \varphi_2) \cos \psi \sin \varphi_1, \\ \varepsilon Q_1 \sin \varphi_2 &= -\varepsilon l^2 (K_1 \cos \varphi_1 + K_2 \cos \varphi_2) \cos \psi \sin \varphi_2, \\ \varepsilon Q_1 \cos \varphi_1 &= -\varepsilon l^2 (K_1 \cos \varphi_1 + K_2 \cos \varphi_2) \cos \psi \cos \varphi_1, \\ \varepsilon Q_1 \cos \varphi_2 &= -\varepsilon l^2 (K_1 \cos \varphi_1 + K_2 \cos \varphi_2) \cos \psi \cos \varphi_2. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Переходя в выражениях (4.40) от произведений тригонометрических функций к тригонометрическим функциям суммы соответствующих фаз, получим

$$\begin{aligned} \varepsilon Q_1 \sin \varphi_1 &= -\frac{1}{4} \varepsilon l^2 K_1 [\sin(2\varphi_1 - \psi) + \sin(2\varphi_1 + \psi)] - \\ &- \frac{1}{4} \varepsilon l^2 K_2 [\sin(\varphi_1 - \varphi_2 - \psi) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2 - \psi) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \psi) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \psi)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon Q_1 \sin \varphi_2 &= -\frac{1}{4} \varepsilon l^2 K_2 [\sin(2\varphi_2 - \psi) + \sin(2\varphi_2 + \psi)] - \\
 &- \frac{1}{4} \varepsilon l^2 K_1 [\sin(\varphi_2 - \varphi_1 - \psi) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2 - \psi) + \sin(\varphi_2 - \varphi_1 + \psi) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \psi)], \\
 \varepsilon Q_1 \cos \varphi_1 &= -\frac{1}{4} \varepsilon l^2 K_1 [\cos(2\varphi_1 - \psi) + \cos(2\varphi_1 + \psi)] - \quad (4.41) \\
 &- \frac{1}{4} \varepsilon l^2 K_2 [\cos(\varphi_1 - \varphi_2 - \psi) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2 + \psi) + \cos(\varphi_1 + \varphi_2 - \psi) + \cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \psi)] - \\
 &- \frac{1}{2} \varepsilon l^2 K_1 \cos \varphi, \\
 \varepsilon Q_1 \cos \varphi_2 &= -\frac{1}{4} \varepsilon l^2 K_2 [\cos(2\varphi_2 - \psi) + \cos(2\varphi_2 + \psi)] - \\
 &- \frac{1}{4} \varepsilon l^2 K_1 [\cos(\varphi_2 - \varphi_1 - \psi) + \cos(\varphi_2 - \varphi_1 + \psi) + \cos(\varphi_1 + \varphi_2 - \psi) + \cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \psi)] - \\
 &- \frac{1}{2} \varepsilon l^2 K_2 \cos \varphi.
 \end{aligned}$$

Анализ выражений (4.41) позволяет определить те коэффициенты ряда Фурье (4.13), которые отличны от нуля для рассматриваемой системы (4.39):  $b_{2,0,-1}$ ,  $b_{2,0,1}$ ,  $b_{1,-1,-1}$ ,  $b_{1,1,-1}$ ,  $b_{1,-1,1}$ ,  $b_{1,1,1}$ ,  $b_{0,2,-1}$ ,  $b_{0,2,1}$ ,  $b_{-1,1,-1}$ ,  $b_{-1,1,1}$ ,  $b_{-2,0,1}$ ,  $b_{-2,0,-1}$ ,  $b_{-1,-1,1}$ ,  $b_{-1,-1,-1}$ ,  $b_{0,-2,1}$ ,  $b_{0,-2,-1}$ ,  $b_{0,0,1}$ ,  $b_{0,0,-1}$ . Данные коэффициенты Фурье порождают в асимптотических рядах знаменатели (4.14) вида  $2\omega_1 - p$ ,  $2\omega_1 + p$ ,  $\omega_1 - \omega_2 - p$ ,  $\omega_1 + \omega_2 - p$ ,  $\omega_1 - \omega_2 + p$ ,  $\omega_1 + \omega_2 + p$ ,  $2\omega_2 - p$ ,  $2\omega_2 + p$ . Выбирая из этих знаменателей только те, которые могут обращаться в ноль при  $p > 0$ ,  $\omega_2 > \omega_1 > 0$ , нетрудно определить резонансы, возможные в данной системе:  $2\omega_1 - p = 0$ ,  $\omega_1 + \omega_2 - p = 0$ ,  $2\omega_2 - p = 0$ ,  $\omega_1 - \omega_2 + p = 0$ .

Исследуем один из этих резонансов с помощью частично усредненной системы. Рассмотрим, например, резонанс  $2\omega_1 - p = 0$ . Тогда, вводя резонансную фазу  $\theta = 2\varphi_1 - \psi$  и сохраняя в выражениях

(4.39), (4.41) только члены, соответствующие рассматриваемому резонансу, получим

$$\begin{aligned} \frac{dK_1}{dt} &= - \frac{\varepsilon a K_1}{4\omega_1} \sin\theta, \\ \frac{dK_2}{dt} &= 0, \\ \frac{d\theta}{dt} &= 2\omega_1 - p - \frac{\varepsilon a}{2\omega_1} \cos\theta, \end{aligned} \quad (4.42)$$

где

$$\varepsilon a = - \frac{\varepsilon l^2 D_4}{(\chi_2 - \chi_1)(a_{11} a_{22} - a_{12}^2)}$$

Частично усредненная система (4.42) отличается от частично усредненной системы (4.30), полученной для уравнения Матье, лишь обозначениями переменных. Поэтому для системы (4.42) также может быть построена область неустойчивости движения, как это было сделано для уравнения Матье. Повторяя преобразования примера 4.3 (раздел 4.2), получим

$$\frac{2\omega_1^2}{4\omega_1^2 \pm \varepsilon a} < \mu < \frac{2\omega_1^2}{4\omega_1^2 \mp \varepsilon a}, \quad (4.43)$$

где  $\mu = \omega_1/p$ , верхние знаки соответствуют случаю  $\varepsilon a > 0$ , а нижние —  $\varepsilon a < 0$ .

Следовательно, область неустойчивости (4.43) имеет такой же вид, как у уравнения Матье (рис.4.1). Аналогично могут быть исследованы другие резонансы системы (4.39).

#### 4.4. Оценка возмущений при прохождении системы через резонанс

Предположим, что в некоторый момент времени траектория системы (4.1) вследствие изменения частот  $\omega_1(x), \dots, \omega_m(x)$  проходит через резонанс

$$\varepsilon_1 \omega_1(x) + \dots + \varepsilon_m \omega_m(x) = 0 \quad (4.44)$$

При этом уравнение (4.44) задает в некоторой области переменных  $x$  поверхность, которую называют резонансной поверхностью. При пересечении траектории поверхности (4.44) возможно два варианта ее поведения (рис.4.2): 1) траектория пересекает резонансную поверхность, не задерживаясь на ней; 2) траектория, попав в окрестность резонансной поверхности, остается вблизи нее, приблизительно сохраняя возникшую соизмеримость частот. Второй случай движения часто называют захватом в резонанс.

Поэтому исследование возникающих в системе резонансов обычно разбивают на две задачи: 1) оценка возмущений параметров движения системы при быстром проходе через резонанс (первый случай движения); 2) определение возможности существования длительного устойчивого резонансного движения системы (второй случай движения). В данном разделе рассматривается первая задача.

Для реализации первого варианта поведения системы при переходе через резонансную поверхность необходимо, чтобы выполнялось условие незастревания траектории в окрестности резонанса, которое имеет вид / II /

$$|d\mathcal{H}/dt| > C > 0 \quad (4.45)$$

где  $C$  - некоторая конечная константа,  $d\mathcal{H}/dt$  - производная резонансной расстройки системы  $\mathcal{H}(x) = \varepsilon_1 \omega_1(x) + \dots + \varepsilon_m \omega_m(x)$ , вычисленная в силу возмущенной системы (4.1).

При выполнении условия (4.45) траектория системы (4.1) не может застрять в окрестности резонансной поверхности в течение конечного промежутка времени, так как  $\Delta h > C\Delta t = O(1)$ , где  $C = O(1)$  и  $\Delta t = O(1)$ . Конечно, заранее, не решив систему (3.16), сказать нельзя, выполнится ли условие (3.75) при переходе через резонанс или нет. Однако в некоторых частных случаях это вполне можно сделать (см. раздел 4.5).

Таким образом, ставится задача об оценке возмущений медленных переменных  $x$  системы (4.1) при быстром прохождении траектории через резонанс (4.44). При этом в качестве невозмущенной системы будем использовать усредненную систему первого приближения

$$\frac{dx^0}{dt} = \varepsilon A_i(x^0), \quad \frac{d\varphi^0}{dt} = \omega(x^0) + \varepsilon B_i(x^0) = \Phi^{(1)}(x^0),$$

где

$$A_i(x^0) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} X(x^0, \varphi_1^0, \dots, \varphi_m^0) d\varphi_1^0 \dots d\varphi_m^0$$

$$B_i(x^0) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \Phi(x^0, \varphi_1^0, \dots, \varphi_m^0) d\varphi_1^0 \dots d\varphi_m^0$$

Для оценки возмущений систему (4.1) представим в виде

$$\frac{dx}{d\tau} = \varepsilon A_i(x) + \mu \Delta X(x, \varphi),$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \lambda [\Phi^{(1)}(x) + \mu \varepsilon \Delta \Phi(x, \varphi)],$$

где  $\tau = \varepsilon t$  - медленное время,  $A_i(x)$  и  $\Phi^{(1)}(x)$  - функции, определяющие нулевые члены рядов Фурье, в которые раскладываются правые части системы (4.1) (усредненная система);  $\lambda = 1/\varepsilon$  - большой параметр,  $\mu \Delta X$  и  $\mu \Delta \Phi$  - возмущающие функции, характеризующие действие остальных членов рядов Фурье (за исключением нулевого);

$\mu$  - параметр, определяющий величину возмущающих функций.

Асимптотические решения системы (4.46) ищутся по малому параметру  $\mu$  в форме

$$\begin{aligned} x(\tau) &= x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \mu^2 \dots, \\ \varphi(\tau) &= \varphi_0(\tau) + \mu \varphi_1(\tau) + \mu^2 \dots, \end{aligned} \quad (4.47)$$

где  $x_0(\tau)$  и  $\varphi_0(\tau)$  - решения усредненной системы.

Подставив разложения (4.47) в уравнения (4.46), получим

$$\begin{aligned} \frac{dx_0}{d\tau} + \mu \frac{dx_1}{d\tau} + \mu^2 \dots &= A_1(x_0 + \mu x_1 + \dots) + \mu \Delta X(x_0 + \mu x_1 + \dots, \varphi_0 + \mu \varphi_1 + \dots), \\ \frac{d\varphi_0}{d\tau} + \mu \frac{d\varphi_1}{d\tau} + \mu^2 \dots &= \lambda[\Phi^{(1)}(x_0 + \mu x_1 + \dots) + \\ &+ \mu \varepsilon \Delta \Phi(x_0 + \mu x_1 + \dots, \varphi_0 + \mu \varphi_1 + \dots)] . \end{aligned} \quad (4.48)$$

Раскладывая функции  $A_1, \Delta X, \Phi^{(1)}, \Delta \Phi$  в ряды Маклорена по параметру  $\mu$

$$\begin{aligned} A_1(x_0 + \mu x_1 + \dots) &= A_1(x_0) + \frac{\partial A_1}{\partial \mu} \mu + \mu^2 \dots, \\ \Phi^{(1)}(x_0 + \mu x_1 + \dots) &= \Phi^{(1)}(x_0) + \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \mu} \mu + \mu^2 \dots, \\ \Delta X(x_0 + \mu x_1 + \dots, \varphi_0 + \mu \varphi_1 + \dots) &= \Delta X(x_0, \varphi_0) + \mu \dots, \\ \Delta \Phi(x_0 + \mu x_1 + \dots, \varphi_0 + \mu \varphi_1 + \dots) &= \Delta \Phi(x_0, \varphi_0) + \mu \dots \end{aligned}$$

где

$$\frac{\partial A_1}{\partial \mu} = \frac{\partial A_1}{\partial x} x_1, \quad \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \mu} = \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x} x_1,$$

и приравнявая в выражениях (4.48) члены при одинаковых степенях  $\mu$ , найдем

$$\frac{dx_0}{d\tau} = A_1(x_0), \quad \frac{d\varphi_0}{d\tau} = \lambda \Phi^{(1)}(x_0), \quad (4.49)$$

$$\frac{dx_1}{d\tau} = \frac{\partial A_1}{\partial x} x_1 + \Delta X(x_0, \varphi_0), \quad (4.50)$$

$$\frac{d \varphi_i}{d \tau} = \lambda \left[ \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x} x_i + \varepsilon \Delta \Phi(x_0, \varphi_0) \right], \quad (4.51)$$

где матрицы частных производных  $\frac{\partial A_i}{\partial x}$  и  $\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x}$  определяют-  
ся при  $x = x_0$  и  $\varphi = \varphi_0$ .

Уравнения (4.49) описывают усредненное движение, а линейные уравнения (4.50-4.51) определяют в первом приближении возмущенное движение. Основным интерес при прохождении системы через резонанс представляют возмущения медленных переменных. Из теории дифференциальных линейных уравнений с переменными коэффициентами известно / 3 /, что общее решение системы (4.50) в общем случае определяется квадратурой:

$$x_i(\tau) = H(\tau, \tau_0) x_i(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} H(\tau, \eta) \Delta X(\eta) d\eta, \quad (4.52)$$

где  $H(\tau, \eta)$  - матрицант, соответствующий линейной однородной системе;  $x_i(\tau_0)$  - начальная величина возмущения;  $\tau_0$  - начальное время. Не нарушая общности, можно положить  $x_0(\tau_0) = x(\tau_0)$ , тогда  $x_i(\tau_0) = 0$  и первый член в решении можно не учитывать.

Возмущающая функция  $\Delta X(\eta)$ , стоящая под знаком интеграла (4.52), исходя из представления правых частей уравнений (4.46), раскладывается в ряд Фурье по фазам  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  без свободного члена:

$$\Delta X(\eta) = \sum_{k_1, \dots, k_m} b_{k_1, \dots, k_m}(\eta) \exp \left\{ i \left[ k_1 \varphi_1(\eta) + \dots + k_m \varphi_m(\eta) \right] \right\}, \quad (4.53)$$

где фазы  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  определяются из решения усредненных уравнений (4.49).

Предположим теперь, что резонансы, возникающие в системе

(4.1), изолированы друг от друга. Определим это понятие более конкретно. Введем в рассмотрение порядок резонанса

$|N_r| = |s_1^{(r)}| + \dots + |s_m^{(r)}|$ . Обозначим через  $S(r_0)$  множество целочисленных векторов  $N_r = (s_1^{(r)}, \dots, s_m^{(r)})$  таких, что

$$s_1^{(r)}\omega_1(x) + \dots + s_m^{(r)}\omega_m(x) = 0, \quad (4.54)$$

где  $|N_r| < r_0$  ( $\omega_1(x) \neq 0, \dots, \omega_m(x) \neq 0$ ),  $r_0$  - некоторое конечное число.

Следовательно, рассмотрим только те резонансы, порядок которых не превосходит  $r_0$ .

Определение 4.1.

Резонанс в точке  $x$  называется  $r_0$ -изолированным, если существует такое положительное число  $\rho$ , что для любого  $N_r$ , удовлетворяющего условию (4.54), найдется  $\Omega > 0$  такое, что если  $\|x^{(1)} - x\| > \rho$ , то  $|s_1^{(r)}\omega_1(x^{(1)}) + \dots + s_m^{(r)}\omega_m(x^{(1)})| > \Omega$ , где  $x^{(1)} \in X$ .

Резонансная поверхность (4.44) будет изолирована, если она изолирована в каждой точке, ей принадлежащей.

Замечание.

Во многих работах по теории резонансов / II /, / I3 / показано, что условие изолированности резонанса может быть выполнено только для двухчастотных систем. В многочастотном же случае это условие не может быть выполнено в общем случае вследствие плотного расположения резонансных поверхностей в  $n$ -мерном пространстве.

Предполагая теперь, что исследуемый резонанс системы (4.1) изолирован от других резонансов, и учитывая, что для линейной системы (4.50) справедлив принцип суперпозиции решений, рассмотрим оценку возмущений  $x_i(\tau)$  для какой-либо отдельной фазы

$$\vartheta(\eta) = \vartheta_1\varphi_1(\eta) + \dots + \vartheta_m\varphi_m(\eta), \quad (4.55)$$

где  $\vartheta_1, \dots, \vartheta_m$  конкретные целые числа, характеризующие возникающий резонанс.

Так как отдельному резонансу в разложении (4.53) может соответствовать несколько фаз вида  $k\theta(\eta)$ , где  $k=1,2,\dots$ , то суммарное возмущение определится оценкой

$$\|x_1(\eta)\| \leq \sum_k \|x_{1k}(\eta)\|_k, \quad (4.56)$$

где  $\|x_{1k}(\eta)\|_k$  — норма возмущения (например, евклидова), соответствующая фазе  $k\theta(\eta)$ .

Итак, рассмотрим решение (4.52), соответствующее фазе (4.55), которое представим в виде

$$x_1(\tau, \lambda) = \int_{\tau_0}^{\tau} H(\tau, \eta) b_{\alpha_1 \dots \alpha_m}(\eta) \exp[i\lambda \tilde{\theta}(\eta)] d\eta, \quad (4.57)$$

где  $\tilde{\theta}(\eta) = \theta(\eta)/\lambda$  — медленная фаза, удовлетворяющая усредненному уравнению

$$\frac{d\tilde{\theta}}{d\tau} = \alpha_1 \Phi_1^{(1)} + \dots + \alpha_m \Phi_m^{(1)}$$

Решение (4.57), записанное для отдельной компоненты вектора  $x_1$  и для выбранного резонанса (4.44), представляет собой интеграл Фурье, для которого существует довольно развитая теория асимптотических оценок / 16 /. Произведем оценку этого интеграла при быстром прохождении системы через выбранный изолированный резонанс. Для простоты оценку получим для случая одной медленной переменной ( $n=1$ ). Многомерный случай рассмотрен в работе / 17 /. При  $n=1$  имеем

$$H(\tau, \eta) = \exp \left[ \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\partial A_1}{\partial x}(\tau_1) d\tau_1 \right]$$

Поэтому

$$x_1(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} b_{\alpha_1 \dots \alpha_m}(\eta) \exp \left[ \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\partial A_1}{\partial x}(\tau_1) d\tau_1 \right] \exp[i\lambda \tilde{\theta}(\eta)] d\eta. \quad (4.58)$$

В интегралах Фурье вида (4.58) функция, стоящая под знаком интеграла, является быстро осциллирующей функцией (при больших  $\lambda$ ) со средним значением, равным нулю. Поэтому, если функция  $\tilde{\theta}(\eta)$  не имеет на отрезке  $[\tau_0, \tau]$  стационарных точек  $d\tilde{\theta}/d\tau \neq 0$ , то значение интеграла (4.58) асимптотически мало и оценивается величиной порядка  $O(1/\lambda) / 16$ . Чем больше параметр  $\lambda$ , тем меньше значение этого интеграла. Этот случай не представляет интереса и соответствует нерезонансным участкам движения системы (4.1). С другой стороны, в силу введенных обозначений наличие стационарных точек функции  $d\tilde{\theta}/d\tau = 0$  соответствует прохождению системы (4.1) через резонанс (4.44). В окрестности стационарных точек вращение фазы  $\tilde{\theta}(\eta)$  замедляется и основной вклад в значение интеграла (4.58) вносят уже окрестности этих точек / 16 /. Для оценки вклада отдельной стационарной точки в величину интеграла (4.58) воспользуемся методом стационарной фазы, тогда при  $\lambda \rightarrow \infty$  имеем

$$x_1(\tau) = \int_{\tau_* - \delta}^{\tau_* + \delta} b_{\beta_1 \dots \beta_m}(\eta) \exp \left[ \int_{\eta}^{\tau} \frac{\partial A_1}{\partial x}(\tau_1) d\tau_1 \right] \exp[i\lambda \tilde{\theta}(\eta)] d\eta, \quad (4.59)$$

где  $d\tilde{\theta}/d\tau(\tau_*) = 0$ ,  $\tau_*$  - стационарная точка интеграла (момент прохода через резонанс (4.44)),  $[\tau_* - \delta, \tau_* + \delta]$  - конечный отрезок, содержащий стационарную точку ( $\delta > 0$ ). В соответствии с методом стационарной фазы аппроксимируем функции  $b_{\beta_1 \dots \beta_m}(\eta)$ ,  $\partial A_1 / \partial x(\tau_1)$ ,  $\tilde{\theta}(\eta)$  рядами Тейлора в точке  $\tau_*$ , тогда

$$\begin{aligned} b_{\beta_1 \dots \beta_m}(\eta) &\approx b_{\beta_1 \dots \beta_m}(\tau_*) \\ \frac{\partial A_1}{\partial x}(\tau_1) &\approx \frac{\partial A_1}{\partial x}(\tau_*) = -\alpha \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\tilde{\theta}(\eta) \approx \tilde{\theta}(\tau_*) + \frac{d^2 \tilde{\theta}}{d\eta^2}(\tau_*) (\eta - \tau_*)^2 / 2.$$

Подставляя соотношения (4.60) в выражение (4.59), получим

$$x_1(\tau, \lambda) \approx b_{g_1 \dots g_m}(\tau_*) \exp[i\lambda \tilde{\theta}(\tau_*)] \int_{\tau_* - \delta}^{\tau_* + \delta} \exp[-\alpha(\tau - \eta) \exp\left\{i \frac{\lambda \tilde{\theta}(\eta - \tau_*)^2}{2}\right\}] d\eta,$$

где  $\tilde{\theta} = \frac{d^2 \tilde{\theta}}{d\eta^2}(\tau_*)$ .

Сделаем в последнем интеграле замену переменных

$$u = \alpha(\eta - \tau_*), \quad \bar{u} = \alpha(\tau - \tau_*), \quad (4.61)$$

где  $\alpha = \left[ \frac{\lambda}{\pi} \left| \frac{d^2 \tilde{\theta}}{d\eta^2}(\tau_*) \right| \right]^{1/2}$ .

Тогда

$$x_1(\bar{u}, \lambda) \approx \frac{b_{g_1 \dots g_m}(\tau_*)}{\alpha} \exp[i\lambda \tilde{\theta}(\tau_*)] I(\bar{u}, \bar{\alpha}), \quad (4.62)$$

где  $I(\bar{u}, \bar{\alpha}) = \int_{-\delta_1}^{\bar{u}} \exp[-\bar{\alpha}(\bar{u} - u)] \exp(i\pi u^2/2) du$ ,

$$p = \text{sign} \left[ \frac{d^2 \tilde{\theta}}{d\eta^2}(\tau_*) \right], \quad \bar{\alpha} = \alpha / \alpha, \quad \delta_1 = \alpha \delta.$$

Из выражения (4.62), учитывая, что  $|\exp[i\lambda \tilde{\theta}(\tau_*)]| = 1$ , и используя известные свойства модулей, получим

$$|x_1(\bar{u}, \lambda)| \approx \frac{|b_{g_1 \dots g_m}(\tau_*)|}{\alpha} |I(\bar{u}, \bar{\alpha})|. \quad (4.63)$$

Оценка (4.63) зависит от двух параметров  $\alpha$  и  $\bar{\alpha}$ . Причем параметр  $\alpha$  характеризует скорость прохода траектории через стационарную точку  $\tau_*$  (через резонанс), так как производная  $d^2 \tilde{\theta} / d\eta^2$  определяет скорость ухода траектории от резонансной поверхности  $d\tilde{\theta} / d\eta = 0$ . А параметр  $\bar{\alpha}$  характеризует влияние демпфирующих характеристик системы на величину возмущения  $x_1$ . Интеграл  $|I(\bar{u}, \bar{\alpha})|$  при фиксированном значении параметра  $\bar{\alpha}$  имеет

известную зависимость, которая может быть вычислена, например, численно. В качестве примера на рис.4.3 приведена зависимость интеграла  $|I(\bar{u}, \bar{\alpha})|$  ( $\alpha=0$ ) от  $\bar{u}$  (при  $\alpha=0$  получается известный интеграл Френеля / 18 /). Из рис.4.3 видно, что функция  $|I(\bar{u}, \bar{\alpha})|$  имеет характерный всплеск после прохода траектории через резонанс  $\bar{u}=0$  ( $\tau=\tau_*$ ). Такая зависимость сохраняется и при увеличении демпфирования (параметра  $\alpha>0$ ), только максимумы функции  $|I(\bar{u}, \bar{\alpha})|$  становятся более пологими. Если величину возмущения  $x$ , при проходе через резонанс оценивать по первому максимуму интеграла  $|I(\bar{u}, \bar{\alpha})|$ , то получим следующую оценку

$$|x_1(\bar{u}, \lambda)| \leq \frac{|b_{g1 \dots gm}(\tau_*)|}{\bar{x}} \max_{\bar{u}} |I(\bar{u}, \bar{\alpha})|, \quad (4.64)$$

причем величина  $\max_{\bar{u}} |I(\bar{u}, \bar{\alpha})|$  определяется значением лишь одного параметра:  $\bar{\alpha}$ . Эта зависимость может быть заранее вычислена и заатабулирована (рис.4.4). Таким образом, зная величину коэффициента ряда Фурье  $|b_{g1 \dots gm}(\tau_*)|$  при проходе через резонанс, а также значения параметров  $\bar{x}$  и  $\bar{\alpha}$  по формуле (4.64) с использованием графика, приведенного на рис.4.4, нетрудно определить величину возмущения медленной переменной  $x$ . Общая оценка для полного возмущения  $x$ , определяется из неравенства (4.54).

Анализ оценки показывает, что чем выше скорость прохода и чем больше демпфирование (параметр  $\alpha$ ), тем меньше величина возмущения  $x$ , и наоборот. С другой стороны оценками (4.63) и (4.64) можно пользоваться, когда скорость прохода траектории через резонанс достаточно велика: должно быть выполнено условие незастревания траектории (4.45).

Зависимость интеграла  $|I(\bar{u}, \bar{\alpha})|$   
от переменной  $\bar{u}$  при  $\bar{\alpha} = 0$

$|I(\bar{u}, \bar{\alpha})|$

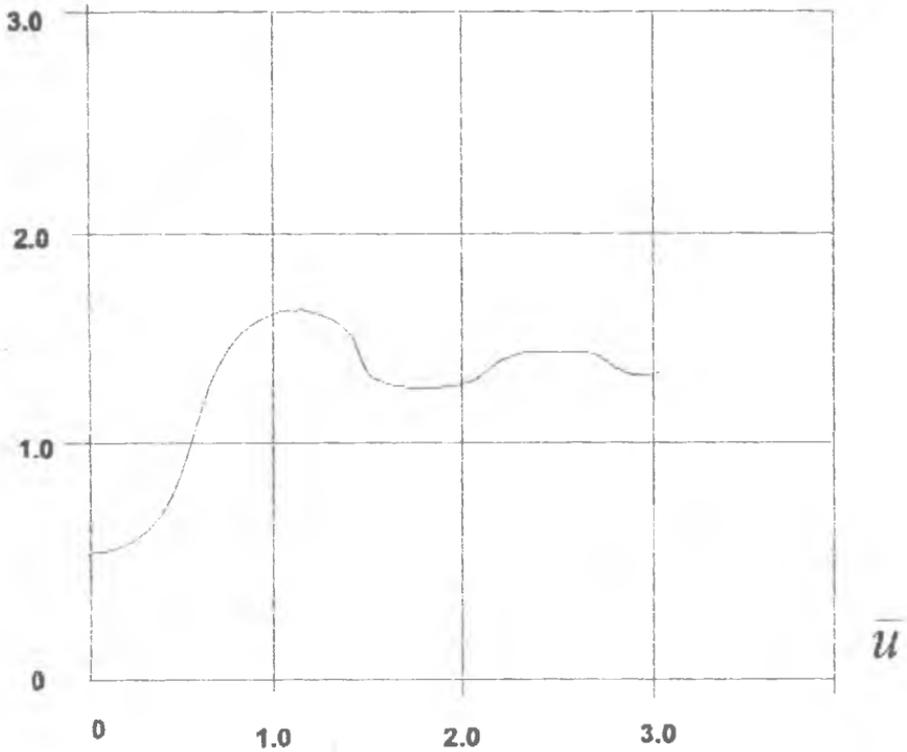


Рис. 4.3

Зависимость  $\max|I(\bar{u}, \bar{\alpha})|$  от параметра  $\bar{\alpha}$

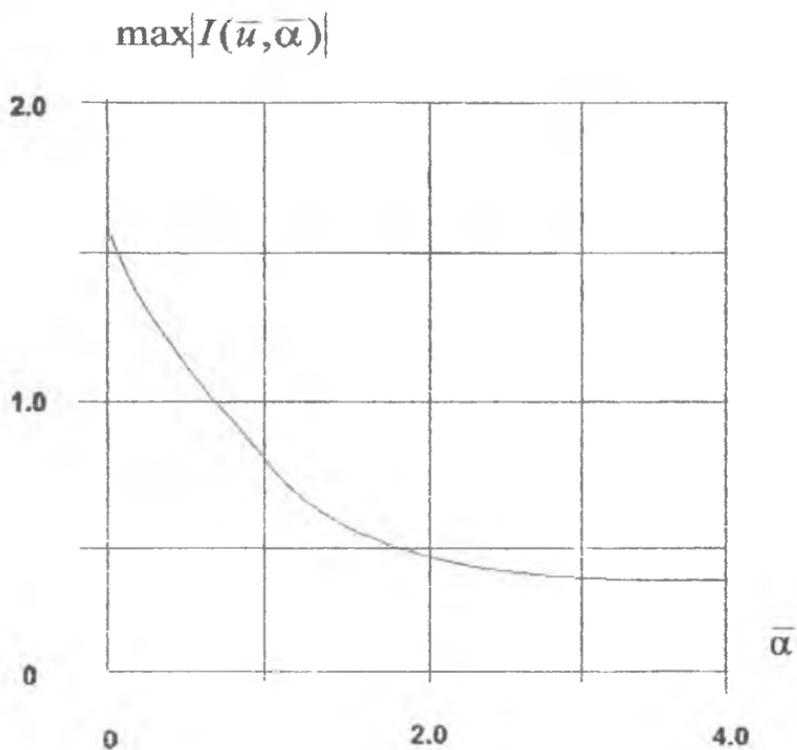


Рис. 4.4

Замечание.

Оценка (4.64) позволяет определить порядок величины  $|x_1|$  по малому параметру  $\varepsilon$ . Так, например, полагая, что  $|b_{g1} \dots b_{gn}(\tau_*)| = O(1)$ ,  $\max |I(\bar{u}, \bar{a})| = O(1)$  и  $d^2 \bar{\theta} / d\tau^2(\tau_*) = O(1)$ , получим следующую оценку

$$|x_1| = O(\lambda^{-1/2}) = O(\varepsilon^{1/2}). \quad (4.65)$$

Таким образом, величина возмущения  $|x_1|$  есть величина порядка  $\varepsilon^{1/2}$ . Это соответствует тому обстоятельству, что в окрестности резонанса роль малого параметра играет  $\varepsilon^{1/2} / \Pi$ .

#### 4.5. Пример оценки возмущений при прохождении через резонанс системы с двумя степенями свободы

Рассмотрим движение системы с двумя степенями свободы, показанной на рис. I.5, колебания которой для различных типов возмущающих сил исследовались в разделах I.5, I.8, 2.5, 4.3. Предположим, что к первому стержню системы приложен периодический внешний момент  $M = \varepsilon f \sin pt$ , где  $f$  и  $p$  - амплитуда и частота периодического возмущения,  $\varepsilon$  - малый параметр. Случай постоянной частоты  $p$  - это случай вынужденных колебаний системы подробно рассмотрен в разделе I.8. Положим теперь, что частота  $p$  медленно изменяется со временем по закону

$$p = a + bt, \quad (4.66)$$

где  $a$  и  $b$  - постоянные заданные параметры.

Уравнения движения данной системы будут по форме такими же, как для случая вынужденных колебаний (I.108):

$$\begin{aligned} a_{11} \ddot{\theta} + a_{12} \ddot{\gamma} + c_{11} \dot{\theta} + c_{12} \dot{\gamma} &= \varepsilon f \sin pt, \\ a_{21} \ddot{\theta} + a_{22} \ddot{\gamma} + c_{21} \dot{\theta} + c_{22} \dot{\gamma} &= 0, \end{aligned} \quad (4.67)$$

где коэффициенты  $a_{11}, a_{12}, \dots$  вычислены в разделе I.5.

Перейдем в системе (4.67) к переменным амплитуды фазы  $(K_1, K_2, \varphi_1, \varphi_2)$ , полагая  $\varepsilon Q_j = \varepsilon f \sin p t$ . Формулы замены переменных будут иметь вид (4.38). Тогда, повторяя преобразования разделов 2.5 и 4.3, придем к системе (4.39), где

$$\begin{aligned} \varepsilon Q_1 \sin \varphi_1 &= \varepsilon f \sin \psi \sin \varphi_1 = \varepsilon f [\cos(\varphi_1 - \psi) - \cos(\varphi_1 + \psi)]/2, \\ \varepsilon Q_1 \sin \varphi_2 &= \varepsilon f \sin \psi \sin \varphi_2 = \varepsilon f [\cos(\varphi_2 - \psi) - \cos(\varphi_2 + \psi)]/2, \\ \varepsilon Q_1 \cos \varphi_1 &= \varepsilon f \sin \psi \cos \varphi_1 = \varepsilon f [\sin(\varphi_1 - \psi) - \sin(\varphi_1 + \psi)]/2, \\ \varepsilon Q_1 \cos \varphi_2 &= \varepsilon f \sin \psi \cos \varphi_2 = \varepsilon f [\sin(\varphi_2 - \psi) - \sin(\varphi_2 + \psi)]/2. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Анализ выражений (4.66) показывает, что в системе (4.67) при  $p > 0$ ,  $\omega_2 > \omega_1 > 0$  возможно два резонанса вида  $\omega_1 - p = 0$  и  $\omega_2 - p = 0$ . Если  $b > 0$  и  $0 < a < \omega_1$ , то система последовательно проходит сначала через первый  $\omega_1 - p = 0$ , а потом через второй  $\omega_2 - p = 0$  резонанс. Условие незастревания траектории в окрестности резонансов (4.45) при  $b > 0$  безусловно, выполняется, так как

$$\left| \frac{d}{dt} (\omega_1 - p) \right| = \left| \frac{d}{dt} (\omega_2 - p) \right| = b > 0.$$

Рассмотрим сначала прохождение системы (4.67) через резонанс  $\omega_1 - p = 0$ . Для оценки возмущений воспользуемся частично усредненной системой, вводя резонансную фазу  $\theta = \varphi_1 - \psi$ . Тогда, сохраняя в выражениях (4.68) только члены, соответствующие данному резонансу, и подставляя их в систему (4.39), получим

$$\begin{aligned} \frac{dK_1}{dt} &= - \frac{\varepsilon D_4 f \cos \theta}{2\omega_1 (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) (\chi_2 - \chi_1)}, \\ \frac{dK_2}{dt} &= 0, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega_1 - p - \frac{\varepsilon D_4 f \sin \theta}{2K_1 \omega_1 (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) (\chi_2 - \chi_1)}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

где  $D_4 = a_{12} + a_{11}\chi_2$ .

Задача состоит в оценке возмущения амплитуды  $K_1$  при прохождении через резонанс  $\omega_1 - p = 0$ . Представим правую часть первого уравнения системы (4.69) в виде комплексного ряда Фурье (см. Приложение I). Для этого воспользуемся формулой Эйлера  $\cos \theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2$  и перепишем уравнение для амплитуды  $K_1$  в виде

$$\frac{dK_1}{d\tau} = b_1 e^{i\theta} + b_{-1} e^{-i\theta},$$

где  $\tau = \varepsilon t$ ,  $b_{\pm 1} = - \frac{D_4 f}{4\omega_1(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(\chi_2 - \chi_1)}$  - коэффициенты Фурье.

Вычисляя параметры  $\alpha$  и  $\bar{\alpha}$  с учетом того, что для системы (4.69)  $A_1(K_1) = 0$ , получим

$$\alpha = \left[ \frac{b}{\pi \varepsilon} \right]^{1/2}, \quad \bar{\alpha} = 0. \quad (4.70)$$

Подставляя значения (4.70) и коэффициенты  $b_1$  и  $b_{-1}$  ряда Фурье в оценку (4.64), найдем

$$|K_1|_k \leq \varepsilon^{1/2} |b_k| \left[ \frac{\pi}{b} \right]^{1/2} \max |I(u, \alpha)|, \quad (4.71)$$

где  $k=1, -1$ ;  $\max |I(u, \alpha)| \approx 1.6$  (рис. 4.4).

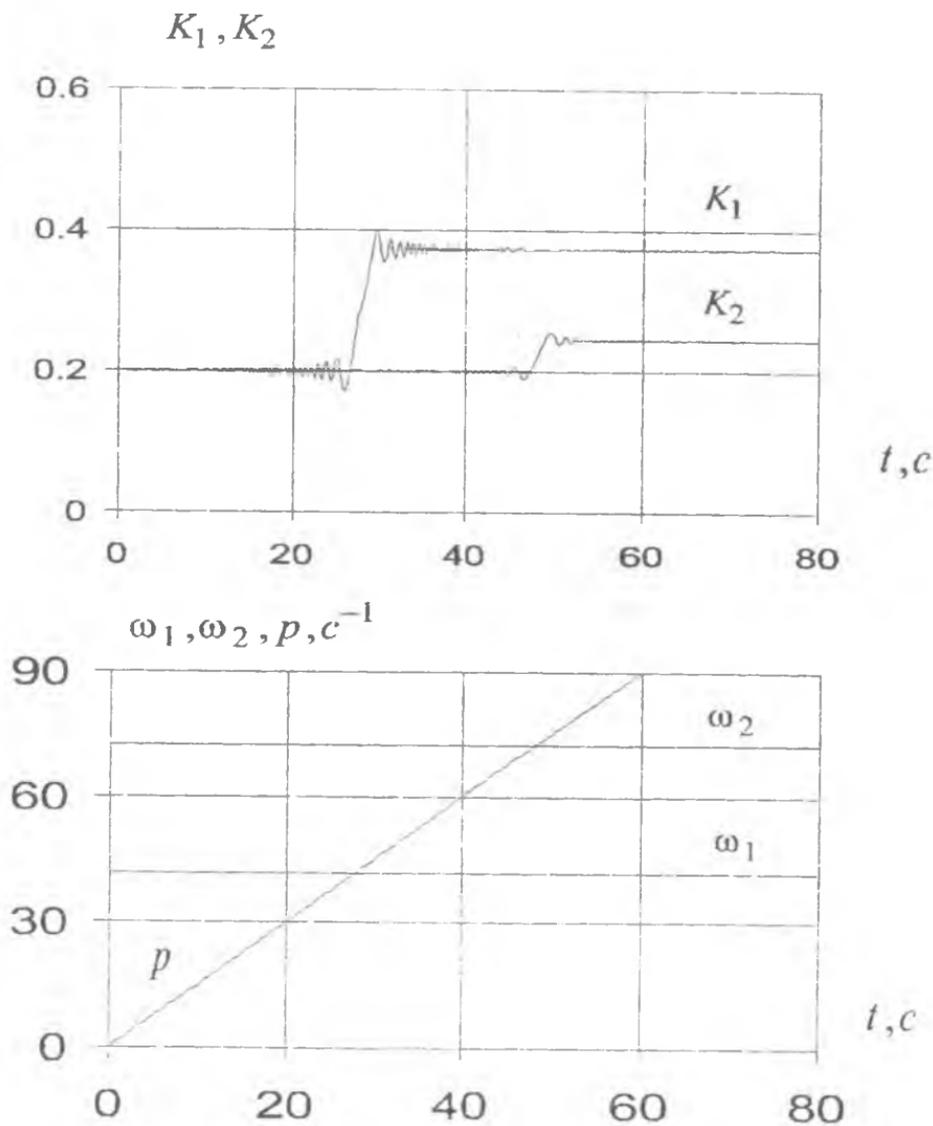
Общая оценка для  $|K_1|$  получается суммированием неравенств (4.71) по формуле (4.56):

$$|K_1| \leq \sum_k |K_1|_k = \left| \frac{0.8 D_4 f \varepsilon^{1/2}}{\omega_1(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(\chi_2 - \chi_1)} \right| \left[ \frac{\pi}{b} \right]^{1/2}. \quad (4.72)$$

Так, например, при  $f=200 \text{ мВ}$ ,  $b=15c^{-2}$ ,  $\varepsilon=0.1$  получим  $|K_1| \leq 0.196$ .

Рис. 4.5 иллюстрирует процесс прохождения системы (4.67) через резонанс  $\omega - p = 0$ . Графики, приведенные на этом рисунке, получены численным интегрированием на ЭВМ исходной системы (4.67)

*Проход через резонансы механической системы*



*Рис. 4.5*

в переменных  $K$  и  $\varphi$  (4.39) при следующих исходных данных  $a=0.1c^{-1}$ ,  $b=15c^{-2}$ ,  $f=200\text{мм}$ ,  $\omega_1=41.80c^{-1}$ ,  $\omega_2=72.48c^{-1}$  и начальных условиях движения ( $t=0$ )  $K_1(0)=0.2$ ,  $K_2(0)=0.2$ ,  $\varphi_1(0)=\pi$ ,  $\varphi_2(0)=5\pi/4$ ,  $\psi(0)=0$ . Из рис.4.5 видно, что при прохождении системы через резонансы наблюдается характерное скачкообразное изменение амплитуд  $K_1(t), K_2(t)$ , которое соответствует скачкообразному изменению интеграла  $|I(u, a)|$ .

Так как оценки (4.71) и (4.72) получены для модуля решения  $|x_j|$ , то они определяют максимально возможное отклонение решения исходной системы от решения усредненной системы при проходе через резонанс. В каждом конкретном же случае прохода через резонанс величина отклонения зависит также от значения фазы  $\psi$  в момент  $t=t_*$ . Поэтому, чтобы определить максимальное отклонение при переходе через резонанс при помощи численных расчетов, необходимо провести серию расчетов, изменяя начальную фазу  $\psi(0)$  в интервале  $[0, 2\pi]$ . Поэтому полученные оценки характеризуют не какое-либо отдельное решение исходной системы, а целую совокупность траекторий, возможных для исследуемой системы. Это соответствует тому объективному обстоятельству, что, как правило, для реальных систем невозможно предсказать фазу, с которой система подходит к резонансной области.

#### 4.6. Исследование устойчивости резонансного движения колебательных систем

Предположим теперь, что условие незастревания траектории в окрестности какого-либо изолированного резонанса (4.44) не выполняется. В этом случае в зависимости от действующих на систему возмущений ее траектория может вести себя по-разному, в

частности, возможны случаи длительного сохранения возникшей соизмеримости частот (захвата в резонанс). Для того, чтобы получить условия застревания траектории в резонансной области, необходимо в системе (4.1) перейти к другим переменным, характеризующим отклонения решения от поверхности резонанса (4.45). Для этого сначала, как и при получении частично усредненной системы, введем в рассмотрение резонансную фазу:  $\theta = \varepsilon_1 \varphi_1 + \dots + \varepsilon_m \varphi_m$ . Уравнения (4.1) при этом примут вид (4.27). Сделаем в системе (4.27) замену переменных  $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, h)$ , где  $x_i = \sigma_i, \dots, x_{n-1} = \sigma_{n-1}, h = \varepsilon_1 \omega_1(x) + \dots + \varepsilon_m \omega_m(x)$ , то есть в качестве одной из новых переменных выбрана резонансная расстройка  $h$ . Тогда система (4.27) преобразуется к виду

$$\frac{d\sigma}{dt} = \varepsilon E(\sigma, h, \theta, \varphi), \quad \frac{dh}{dt} = \varepsilon H(\sigma, h, \theta, \varphi), \quad (4.73)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = h + \varepsilon \Lambda(\sigma, h, \theta, \varphi), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \Omega(\sigma, h) + \varepsilon \Psi(\sigma, h, \theta, \varphi),$$

где  $E = (X_1, \dots, X_{n-1}), \quad \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}),$

$\Psi = (\Phi_1, \dots, \Phi_{m-1}), \quad \Omega = (\omega_1, \dots, \omega_{m-1}),$

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} X_i = \frac{\partial h}{\partial x} X.$$

Теперь введем изменение масштаба переменной  $h = \varepsilon^{1/2} \rho$ , тогда

$$\frac{d\sigma}{dt} = \mu^2 E(\sigma, \mu\rho, \theta, \varphi), \quad \frac{d\rho}{dt} = \mu H(\sigma, \mu\rho, \theta, \varphi),$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \mu\rho + \mu^2 \Lambda(\sigma, \mu\rho, \theta, \varphi), \quad (4.74)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Omega(\sigma, \mu\rho) + \mu^2 \Psi(\sigma, \mu\rho, \theta, \varphi),$$

где  $\mu = \varepsilon^{1/2}$  - новый малый параметр.

Применим к системе (4.74) метод усреднения, как к системе с несколькими вращающимися фазами  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_{m-1})$ . Усредненная система первого приближения метода будет иметь вид

$$\frac{d\rho^0}{dt} = \mu \langle N \rangle, \quad \frac{d\theta^0}{dt} = \mu \rho^0, \quad \frac{d\sigma^0}{dt} = 0, \quad (4.75)$$

где  $\langle N \rangle$  - усредненная по фазам  $\psi$  функция  $N$ ,  $\rho^0, \theta^0, \sigma^0$  - усредненные значения переменных  $\rho, \theta, \sigma$ .

При определении первого приближения метода усреднения (4.75) в системе (4.74) члены порядка  $O(\mu^2)$  не учитываются, поэтому уравнения (4.75) не содержат информации об изменении медленных переменных  $\sigma$ , что делает их бесполезными при исследовании устойчивости исследуемого резонанса. Поэтому в этом случае необходимо определять второе приближение метода усреднения системы (4.74). Для этого воспользуемся общей схемой построения асимптотических решений, изложенной в разделе 4.1.

Будем искать решение системы (4.74) в виде асимптотических рядов:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma^0 + \mu \sigma_1(\sigma^0, \rho^0, \theta^0, \psi^0) + \mu^2 \dots, \\ \rho &= \rho^0 + \mu \rho_1(\sigma^0, \rho^0, \theta^0, \psi^0) + \mu^2 \dots, \\ \theta &= \theta^0 + \mu \theta_1(\sigma^0, \rho^0, \theta^0, \psi^0) + \mu^2 \dots, \\ \psi &= \psi^0 + \mu \psi_1(\sigma^0, \rho^0, \theta^0, \psi^0) + \mu^2 \dots, \end{aligned} \quad (4.76)$$

где новые переменные  $\sigma^0, \rho^0, \theta^0, \psi^0$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям, не содержащим  $\psi^0$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}^0 &= \mu A_1(\sigma^0, \rho^0, \theta^0) + \mu^2 A_2(\sigma^0, \rho^0, \theta^0) + \mu^3 \dots, \\ \dot{\rho}^0 &= \mu B_1(\sigma^0, \rho^0, \theta^0) + \mu^2 B_2(\sigma^0, \rho^0, \theta^0) + \mu^3 \dots, \\ \dot{\theta}^0 &= \mu C_1(\sigma^0, \rho^0, \theta^0) + \mu^2 C_2(\sigma^0, \rho^0, \theta^0) + \mu^3 \dots, \\ \dot{\psi}^0 &= \Omega(\sigma, \rho) + \mu D_1(\sigma^0, \rho^0, \theta^0) + \mu^2 \dots \end{aligned} \quad (4.77)$$

Неизвестные функции  $\sigma_1, \rho_1, \theta_1, \psi_1, A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1$  определяются по методике, изложенной в разделе 4.1. Для того,

чтобы найти второе приближение метода усреднения в уравнениях (4.77) для медленных переменных  $\sigma^0, \rho^0, \theta^0$ , необходимо найти члены до второго порядка малости  $O(\mu^2)$  включительно. Для их определения подставим соотношения (4.76-4.77) в исходную систему (4.74) и приравняем члены при одинаковых степенях  $\mu$ . Получим следующие уравнения для функций  $\sigma_1, \rho_1, \theta_1, \psi_1$  (см. соотношения (4.10-4.11)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \psi^0} \Omega(\sigma^0, 0) &= -A_1(\sigma^0, \rho^0, \theta^0) \quad , \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial \psi^0} \Omega(\sigma^0, 0) &= H(\sigma^0, 0, \theta^0, \psi^0) - B_1(\sigma^0, \rho^0, \theta^0) \quad , \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial \psi^0} \Omega(\sigma^0, 0) &= \rho^0 - C_1(\sigma^0, \rho^0, \theta^0) \quad , \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial \psi^0} \Omega(\sigma^0, 0) &= -D_1(\sigma^0, \rho^0, \theta^0) \quad . \end{aligned} \tag{4.78}$$

Так как функции  $\sigma_1, \rho_1, \theta_1, \psi_1$  в соответствии с методом усреднения есть периодические функции фаз  $\psi^0$  с нулевым средним, то из уравнений (4.78) сразу следует, что

$$\begin{aligned} \sigma_1 = 0 \quad , \quad \theta_1 = 0 \quad , \quad \psi_1 = 0 \quad , \quad \rho_1 \neq 0 \quad , \\ A_1 = 0 \quad , \quad C_1 = \rho^0 \quad , \quad D_1 = 0 \quad , \quad B_1 = \langle H(\sigma^0, 0, \theta^0, \psi^0) \rangle \quad , \end{aligned} \tag{4.79}$$

причем  $\rho_1 = \rho_1(\sigma^0, \theta^0)$  и не зависит от  $\rho^0$ .

Соотношения (4.10-4.11) для определения функций  $A_2, B_2, C_2$  медленных переменных  $\sigma^0, \rho^0, \theta^0$  имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_2}{\partial \psi^0} \Omega(\sigma^0, 0) &= E(\sigma^0, 0, \theta^0, \psi^0) - A_2(\sigma^0, 0, \theta^0) \quad , \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial \psi^0} \Omega(\sigma^0, 0) &= \frac{\partial H}{\partial h} \rho^0 - \frac{\partial \rho_1}{\partial \theta^0} \rho^0 - B_2(\sigma^0, \rho^0, \theta^0) \quad , \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial \psi^0} \Omega(\sigma^0, 0) &= \rho_1 + \Lambda(\sigma^0, 0, \theta^0, \psi^0) - C_2(\sigma^0, 0, \theta^0) \quad . \end{aligned} \tag{4.80}$$

Уравнения второго приближения (4.80) отличаются от уравнений

(4.10), полученных в разделе 4.1, лишь тем, что в них добавлены функции второго порядка малости  $\mu^2 E$  и  $\mu^2 \Lambda$  и опущены все члены, которые равны нулю, вследствие выполнения (4.79). Так как функция  $\rho$ , периодична по фазам  $\psi^0$  с нулевым средним, то из уравнений (4.80) получаем

$$\begin{aligned} A_2(\sigma^0, 0, \vartheta^0) &= \langle E(\sigma^0, 0, \vartheta^0, \psi^0) \rangle, \\ B_2 &= \langle \partial H / \partial h \rho^0 \rangle, \\ C_2(\sigma^0, 0, \vartheta^0) &= \langle \Psi(\sigma^0, 0, \vartheta^0, \psi^0) \rangle, \end{aligned} \quad (4.81)$$

где  $\langle \cdot \rangle$  оператор усреднения соответствующих функций по фазам  $\psi^0$ .

Следовательно, уравнения второго приближения метода усреднения для системы (4.74) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^0}{dt} &= \mu^2 A_2(\sigma^0, 0, \vartheta^0), \\ \frac{d\rho^0}{dt} &= \mu B_1(\sigma^0, 0, \vartheta^0) + \mu^2 B_2(\sigma^0, \rho^0, \vartheta^0), \\ \frac{d\vartheta^0}{dt} &= \mu \rho^0 + \mu^2 C_2(\sigma^0, 0, \vartheta^0), \end{aligned} \quad (4.82)$$

причем  $\rho = \rho^0 + \mu \rho_1(\sigma^0, \vartheta^0)$ .

Переходя в системе (4.83) к медленному времени  $\tau = \mu t$ , получим

$$\frac{d\sigma^0}{d\tau} = \mu A_2(\sigma^0, 0, \vartheta^0), \quad (4.83)$$

$$\text{где } \frac{d\rho^0}{d\tau} = P(\sigma^0, \mu\rho^0, \vartheta^0), \quad \frac{d\vartheta^0}{d\tau} = \rho^0 + \mu C_2(\sigma^0, 0, \vartheta^0),$$

$$P(\sigma^0, \mu\rho^0, \vartheta^0) = \langle H(\sigma^0, 0, \vartheta^0, \psi^0) + \mu \partial H / \partial h \rho^0 \rangle.$$

В дальнейшем для простоты индексы у переменных  $\sigma^0, \vartheta^0, \rho^0$  и у функций  $A_2, C_2$  будут опущены.

Замечание.

Анализ полученной системы второго приближения (4.82)

показывает, что система (4.82) просто совпадает с прямым усреднением системы (4.74) по быстрым фазам  $\phi$ . Это облегчает построение асимптотических решений конкретных систем.

Рассмотрим возможность существования устойчивого резонансного движения системы (4.82). Прежде всего проанализируем систему первого приближения (4.75), которая после перехода к медленному времени  $\tau$  принимает вид

$$\frac{d\rho}{d\tau} = P(\sigma, 0, \theta) \quad , \quad \frac{d\theta}{d\tau} = \rho \quad , \quad (4.84)$$

где  $\sigma = \text{const}$ .

Сводя систему (4.84) к одному уравнению второго порядка, получим

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} = P(\sigma, 0, \theta) \quad , \quad (4.85)$$

которое представляет собой уравнение нелинейного "маятника", имеющего интеграл

$$I = \rho^2/2 + \Pi(\sigma, \theta) = \text{const} \quad , \quad (4.86)$$

аналогичный интегралу энергии, где  $\Pi(\sigma, \theta) = -\int P(\sigma, 0, \theta) d\theta$  - аналог потенциальной энергии.

Фазовый портрет уравнения первого приближения (4.85) зависит от вида функции  $P(\sigma, 0, \theta)$  ( $\sigma = \text{const}$ ), которая является периодической по фазе  $\theta$  с периодом  $2\pi$ . Представим эту функцию в виде

$$P(\sigma, 0, \theta) = p(\sigma) + \Delta P(\sigma, \theta) \quad , \quad (4.87)$$

где  $p(\sigma)$  - нулевой член ряда Фурье функции  $P(\sigma, 0, \theta)$  по фазе  $\theta$ ,  $\Delta P(\sigma, \theta)$  - остальные гармоники.

Тогда потенциальная энергия системы (4.85) примет вид

$$\Pi(\sigma, \theta) = -p(\sigma)\theta - \int \Delta P(\sigma, \theta) d\theta \quad . \quad (4.88)$$

Как известно (см. раздел 3.1), фазовый портрет уравнения

(4.85) определяется видом функции  $\Pi(\sigma, \theta)$  (4.88). При этом минимум потенциальной энергии соответствует особой точке типа центра, а максимум - особой точке типа седла (раздел.3.1). Фазовые портреты зависят от величины и знака параметра  $p(\sigma)$ . Возможны несколько характерных случаев:

1. Абсолютное значение коэффициента  $|p(\sigma)|$  достаточно велико и выполняется неравенство

$$|p(\sigma)| > \max_{\theta} |\Delta P(\sigma, \theta)| \quad . \quad (4.89)$$

В этом случае уравнение (4.85) не имеет особых точек, так как  $P(\sigma, 0, \theta) \neq 0$  и соответственно потенциальная энергия не имеет экстремальных точек  $\partial \Pi / \partial \theta \neq 0$ . Фазовый портрет такой системы при  $p(\sigma) > 0$  изображен на рис.4.6. Траектория не может задержаться в окрестности резонанса и уходит от резонансной поверхности (этот случай подробно рассмотрен в разделе 4.4).

2. Абсолютное значение коэффициента  $|p(\sigma)|$  такое, что выполняется неравенство

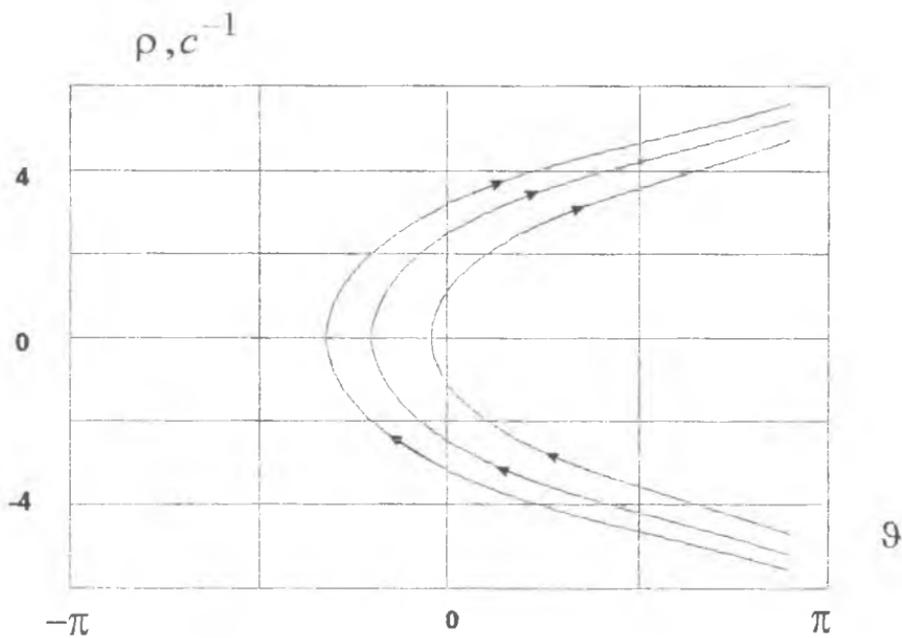
$$|p(\sigma)| \leq \max_{\theta} |\Delta P(\sigma, \theta)| \quad . \quad (4.90)$$

При этом, если  $p(\sigma) \neq 0$ , то, исключая случай равенства в условии (4.90), получаем (вследствие периодичности функции  $\Delta P(\sigma, \theta)$  по фазе  $\theta$ ) чередование точек максимумов и минимумов потенциальной энергии и фазовый портрет системы будет содержать колебательные области, ограниченные сепаратрисами (рис.3.2). В этом случае возможно колебательное движение в окрестности резонанса, соответствующее движению вблизи особой точки типа центра.

3. Коэффициент  $p(\sigma) = 0$ . Следовательно, значения максимумов (минимумов) функции  $\Pi(\sigma, \theta)$  одинаковы и сепаратрисы соединяют седла (рис.3.1). В этом случае также на фазовом портрете имеются колебательные области.

Хотя анализ уравнений первого приближения и позволяет

*Фазовый портрет системы при отсутствии  
областей колебаний*



*Рис. 4.6*

установить наличие колебательных областей на фазовом портрете системы, этот анализ не дает ответа на вопрос: может ли траектория переходить из областей вращательных движений в области колебаний и наоборот, так как на фазовых портретах, изображенных на рис.3.1,3.2, траектории не пересекают сепаратрису. Поэтому условие (4.90) трактуется обычно как необходимое условие существования длительных устойчивых резонансных движений системы. Для того, чтобы определить достаточные условия, необходимо анализировать уравнения второго приближения (4.83) метода усреднения.

Для получения условий пересечения сепаратрисы введем в рассмотрение энергию "маятника", отсчитываемую от сепаратрисы:

$$I_c = \rho^2/2 + \Pi(\sigma, \theta) - \Pi(\sigma, \theta_0^{**}) \quad , \quad (4.91)$$

где  $\Pi(\sigma, \theta_0^{**})$  - потенциальная энергия "маятника", определенная на сепаратрисе,  $\theta_0^{**}$  - особая точка типа седла на фазовом портрете системы (4.85).

Для простоты предположим, что потенциальная энергия  $\Pi(\sigma, \theta)$  системы (4.85) имеет на интервале  $[-\pi, \pi]$  только две особые точки: центр  $(\partial \Pi / \partial \theta(\theta_0^*) = 0, \partial^2 \Pi / \partial \theta^2(\theta_0^*) > 0)$  и седло  $(\partial \Pi / \partial \theta(\theta_0^{**}) = 0, \partial^2 \Pi / \partial \theta^2(\theta_0^{**}) < 0)$ . Причем координаты этих особых точек определяются в момент пересечения резонанса  $\rho=0$ . В силу определения  $I_c$ , если  $I_c > 0$ , то траектория находится вне колебательной области, если  $I_c < 0$ , то - внутри. При  $I_c = 0$  траектория выходит на сепаратрису. Поэтому для попадания траектории в область, ограниченную сепаратрисой, достаточно, чтобы производная энергии  $\dot{I}_c$ , вычисленная в силу уравнений второго приближения (4.83), была отрицательной и достаточно большой по абсолютной величине. Найдем эту производную, тогда

$$\frac{dI_0}{d\tau} = \rho \frac{d\rho}{d\tau} + \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{d\tau} + \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} \frac{d\theta}{d\tau} - \frac{\partial \Pi_{**}}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{d\tau} - \frac{\partial \Pi_{**}}{\partial \theta} \frac{d\theta}{d\tau}, \quad (4.92)$$

где  $\Pi_{**} = \Pi(\sigma, \theta_{0}^{**})$ .

Подставляя значения производных из системы (4.83) в выражение (4.92) и учитывая, что  $\partial \Pi_{**} / \partial \theta_{0}^{**} = -P(\sigma, \theta_{0}^{**}) = 0$ , получим

$$\frac{dI_0}{d\tau} = \mu \frac{\partial P}{\partial \rho} \rho^2 + \mu \frac{\partial (\Pi - \Pi_{**})}{\partial \sigma} A(\sigma, \theta, \vartheta) - \mu P(\sigma, \theta, \vartheta) C(\sigma, \theta, \vartheta). \quad (4.93)$$

Таким образом, величина и знак производной (4.93) определяется свойствами возмущающих функций  $A$  и  $C$ . Если

$$dI_0/d\tau < -C_1, \quad (4.94)$$

где  $C_1 > 0$  - некоторая подходящим образом выбранная константа, то траектория системы (4.83) попадает в колебательную область. Хотя значение константы  $C_1$  для исследуемой системы указать трудно, условие (4.94) позволяет выделить в каждом конкретном случае параметры, наиболее сильно влияющие на величину и знак производной  $dI_0/d\tau$  и тем самым определить те траектории (если это возможно), которые попадают в колебательную область. Значение производной (4.92) можно, например, находить при пересечении траектории резонанса ( $\rho=0$ ).

После попадания траектории в колебательную область необходимо определить, останется ли траектория в этой области или нет. Для этого нужно провести исследование устойчивости движения в области, ограниченной сепаратрисой. Для проведения такого исследования сделаем в системе (4.83) замену переменных  $\vartheta = \vartheta_0^* + \Delta\vartheta$ ,  $\rho = \Delta\rho$ , где  $\vartheta_0^*$  - особая точка типа центра,  $\Delta\vartheta$  и  $\Delta\rho$  - значения фазовых координат, отсчитываемых от положения равновесия "маятника"  $\vartheta = \vartheta_0^*$ ,  $\rho = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\tau} &= \mu A(\sigma, 0, \theta_0^* + \Delta\theta) \\ \frac{d\Delta\rho}{d\tau} &= P(\sigma, \mu\Delta\rho, \theta_0^* + \Delta\theta) \\ \frac{d\Delta\theta}{d\tau} &= \Delta\rho + \mu G(\sigma, 0, \Delta\theta) \end{aligned} \quad (4.95)$$

где  $G(\sigma, 0, \Delta\theta) = O(\sigma, 0, \theta_0^* + \Delta\theta) - \mu^{-1} \frac{d\theta_0^*}{d\tau}$ .

При этом производная  $d\theta_0^*/d\tau$  может быть найдена дифференцированием функции  $P(\sigma, 0, \theta_0^*)=0$  из выражения

$$\frac{d\theta_0^*}{d\tau} = -\mu \frac{\partial P}{\partial \sigma} A \left[ \frac{\partial P}{\partial \theta}(\theta_0^*) \right]^{-1} = O(\mu)$$

Далее вводится в рассмотрение функция Ляпунова как энергия "маятника", отсчитываемая от точки равновесия  $\Delta\rho=0, \Delta\theta=0$ :

$$V = (\Delta\rho)^2/2 + \Pi(\sigma, \theta_0^* + \Delta\theta) - \Pi(\sigma, \theta_0^*) \quad (4.96)$$

Для устойчивости резонансного движения системы (4.1) достаточно, чтобы функция (4.96) удовлетворяла условиям теоремы об устойчивости при постоянно действующих возмущениях /19/. Не формулируя полностью данную теорему, приведем ряд ключевых условий, накладываемых на функцию (4.96). Функция (4.96) является положительно определенной по переменным  $\Delta\rho, \Delta\theta$  функцией Ляпунова невозмущенной системы (уравнений первого приближения)

$$\frac{d\Delta\rho}{d\tau} = P(\sigma, 0, \theta_0^* + \Delta\theta), \quad \frac{d\Delta\theta}{d\tau} = \Delta\rho,$$

допускающая по переменным  $\Delta\rho, \Delta\theta$  бесконечно малый высший предел (в окрестности точки  $\Delta\rho=0, \Delta\theta=0$  представляется в виде положительно определенной квадратичной формы по  $\Delta\rho, \Delta\theta$ ). Причем она положительно определена во всей колебательной области, ограниченной сепаратрисой. Поэтому для устойчивости резонансного движения достаточно, чтобы в некоторой области, ограниченной

сепаратрисой, выполнялось условие / 19 /

$$\langle dV/dt \rangle < -C_2 \quad (4.97)$$

где производная  $dV/dt$  определяется в силу системы второго приближения (4.83),  $\langle dV/dt \rangle$  - ее усредненное значение,  $C_2 > 0$  - некоторая константа. При этом в общем случае условие (4.98) может быть выполнено не во всей области, ограниченной сепаратрисой, а в области, ограниченной сепаратрисой и некоторой целой траекторией, лежащей внутри сепаратрисы. В этом случае траектория возмущенной системы будет стремиться к предельному циклу, находящемуся внутри сепаратрисы.

Дифференцируя функцию (4.96) в силу системы (4.83), нетрудно получить выражение для производной  $dV/dt$  (она находится аналогично производной  $dI_c/dt$ ). Отсюда

$$\frac{dV}{dt} = \mu \frac{\partial P}{\partial h} \Delta \rho^2 + \mu \frac{\partial (\Pi - \Pi_*)}{\partial \sigma} A - \mu PG = \mu D(\sigma, \Delta \rho, \Delta \theta), \quad (4.98)$$

где  $\Pi_* = \Pi(\sigma, \theta_0^*)$ .

Усредненное значение для производной энергии  $dV/dt$  (4.98) может быть найдено по схеме В.М.Волосова / 5 /. Усредняя правую часть дифференциального уравнения (4.98) по времени в колебательной области, получаем

$$\langle \frac{dV}{dt} \rangle = \frac{\mu}{T} \int_0^T D(\sigma, \Delta \rho, \Delta \theta) dt \quad (4.99)$$

где  $T$  - период колебаний.

Перейдем в интеграле (4.99) к новой независимой переменной - углу  $\Delta \theta$ , используя связь между переменными  $\Delta \theta$  и  $t$ , заданную выражением (4.96), где  $\Delta \rho = d\Delta \theta/dt$ , в силу уравнений первого приближения. Тогда

$$\frac{d\Delta\theta}{dt} = \pm [2(V-\Pi+\Pi_*)]^{1/2} \quad (4.100)$$

Подставляя соотношение (4.100) в интеграл (4.99), получим

$$\left\langle \frac{dV}{d\tau} \right\rangle = \frac{\mu}{T} \int_{\min\Delta\theta}^{\max\Delta\theta} \frac{D(\sigma, \Delta\rho^+, \Delta\theta)}{[2(V-\Pi+\Pi_*)]^{1/2}} d\Delta\theta + \frac{\mu}{T} \int_{\min\Delta\theta}^{\max\Delta\theta} \frac{D(\sigma, \Delta\rho^-, \Delta\theta)}{[2(V-\Pi+\Pi_*)]^{1/2}} d\Delta\theta, \quad (4.101)$$

где  $\Delta\rho^+ = [2(V-\Pi+\Pi_*)]^{1/2}$ ,  $\Delta\rho^- = -[2(V-\Pi+\Pi_*)]^{1/2}$ ,

$\max\Delta\theta$  и  $\min\Delta\theta$  - максимальное и минимальное значения угла  $\Delta\theta$ , определяемые как корни уравнений  $\Pi(\sigma, \max\Delta\theta) - \Pi_* = \Pi(\sigma, \min\Delta\theta) - \Pi_* = 0$  ( $\Delta\rho=0$ );

$$T = 2 \int_{\min\Delta\theta}^{\max\Delta\theta} \frac{d\Delta\theta}{[2(V-\Pi+\Pi_*)]^{1/2}}$$

При определении  $\langle dV/d\tau \rangle$  и периода колебаний  $T$  учитывается, что невозмущенные траектории на фазовой плоскости  $(\Delta\rho, \Delta\theta)$  в окрестности особой точки типа центра представляют собой замкнутые кривые, симметричные относительно оси  $\Delta\rho=0$ , и интегралы (4.101) берутся сначала по верхней ветви траектории ( $\Delta\rho^+$ ), а потом - по нижней ( $\Delta\rho^-$ ).

Так как под знаком радикала в выражении (4.101) стоит функция  $\Pi$ , в общем случае представляющая собой линейную комбинацию линейной и тригонометрических функций (см.(4.87)), то интегралы усредненных уравнений не берутся аналитически и приходится вычислять их лишь численно. Это затрудняет анализ достаточного условия устойчивости (4.97).

Таким образом, для реализации процесса захвата в длительный резонанс должны быть выполнены следующие условия: 1) необходимое условие (4.90) существования особых точек уравнения (4.87) (в общем случае колебательных областей в окрестности резонанса  $\Delta\rho=0$  может быть несколько); 2) условие попадания траектории в

колебательную область, ограниченную сепаратрисой (4.94); 3) условие устойчивости (4.97) в некоторой области, ограниченной сепаратрисой.

Замечание.

При исследовании реальных систем начальные условия движения системы (4.74), как правило, точно неизвестны. Обычно считают, что начальные условия для медленных переменных известны с точностью  $O(\varepsilon)$ , а начальные условия для быстрых переменных — с точностью  $O(1)$ . В этом случае возникает довольно сложная задача о вычислении вероятности попадания траектории в колебательную область, ограниченную сепаратрисой / 20 /, которая здесь не рассматривается.

Пример 4.4.

Пусть возмущенное движение системы описывается двухчастотными уравнениями вида

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \varepsilon (1 + a \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - bx \sin^2 \varphi_1) \\ \frac{d\varphi_1}{dt} &= x + 1, \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = 1 \end{aligned} \quad (4.102)$$

где  $a < 0$ ,  $b > 0$  — некоторые константы  $-1 < x < 2$ .

В системе (4.102) возможен главный резонанс  $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2$ . В соответствии с этим введем в рассмотрение резонансную фазу  $\theta = \varphi_1 - \varphi_2$ :

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon (1 + a \sin \theta - bx \sin^2 \varphi_1), \quad \frac{d\theta}{dt} = x, \quad \frac{d\varphi_1}{dt} = x + 1. \quad (4.103)$$

Для исследования резонансного движения изменим масштаб медленной переменной  $x = \varepsilon^{1/2} \rho = \mu \rho$ , тогда

$$\frac{d\rho}{dt} = \mu(1 + a \sin \theta) - \mu^2 b \rho \sin^2 \varphi_1, \quad (4.104)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \mu\rho \quad , \quad \frac{d\rho}{dt} = 1 + \mu\rho \quad .$$

Получим систему второго приближения метода усреднения, формально усреднив первые два уравнения системы (4.104) по фазе  $\varphi_1$ , откуда

$$\frac{d\rho}{dt} = \mu(1+a \sin\theta) - \mu^2 b\rho/2 \quad , \quad \frac{d\theta}{dt} = \mu\rho \quad . \quad (4.105)$$

Здесь сохранены те же обозначения, что и в системе (4.104).

Переходя в системе (4.104) к медленному времени  $\tau = \mu t$ , получим

$$\frac{d\rho}{d\tau} = 1+a \sin\theta - \mu b\rho/2 \quad , \quad \frac{d\theta}{d\tau} = \rho \quad . \quad (4.106)$$

В соответствии с формой системы (4.106) функции, входящие в систему второго приближения (4.83), а также потенциальная энергия имеют вид

$$\begin{aligned} P(\mu\rho, \theta) &= 1 + a \sin\theta - \mu b\rho/2 \quad , \\ P(0, \theta) &= 1 + a \sin\theta \quad , \\ \Pi(\theta) &= -\theta + a \cos\theta \quad , \end{aligned} \quad (4.107)$$

а вектор медленных переменных  $\sigma$  отсутствует.

Тогда условие существования корней функции  $P(0, \theta)$  (4.90) принимает вид

$$1 \leq |a| \quad . \quad (4.108)$$

При выполнении условия (4.108) фазовый портрет системы первого приближения выглядит так же, как на рис.3.3 (исключая предельный случай, когда  $|a|=1$ ). При этом координаты особых точек вычисляются из условия  $P(0, \theta)=0$  в виде

$$\theta_0^* = \text{Arcsin}(-1/a) \quad , \quad \theta_0^{**} = \pi - \text{Arcsin}(-1/a) \quad ,$$

где  $\text{Arcsin}(-1/a)$  - главное значение арксинуса ( $-\pi/2 < \theta_0^* < \pi/2$ ).

Если для определенности  $a < -1$ , то особая точка  $\theta = \theta_0^*$  ( $\rho=0$ ) будет центром, а особая точка  $\theta = \theta_0^{**}$  ( $\rho=0$ ) - седлом, так как

$$\partial^2 \Pi / \partial \theta^2 (\theta_0^*) = -a \cos \theta_0^* > 0, \quad \partial^2 \Pi / \partial \theta^2 (\theta_0^{**}) = a \cos \theta_0^{**} < 0.$$

Далее получим условие попадания траектории системы (4.94) в колебательную область и условие устойчивости (4.97) при движении в колебательной области. Для этого, подставляя функции (4.107) в выражения для производных (4.92) и (4.98), найдем

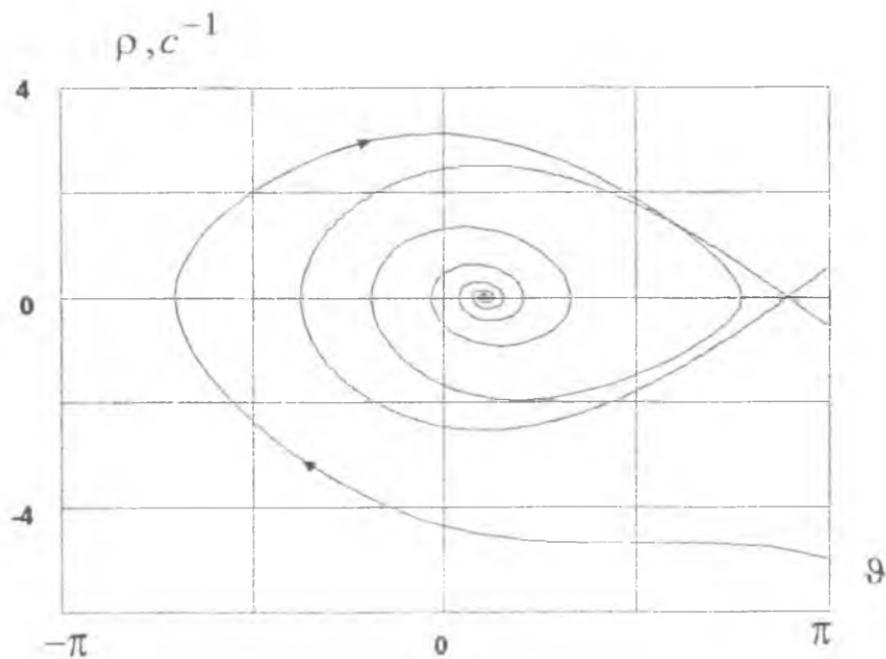
$$\frac{dI_e}{dt} = \frac{dV}{dt} = -\mu b \rho^2 / 2, \quad (4.109)$$

Так как производные  $dI_e/dt$  и  $dV/dt$  в соответствии с выражениями (4.109) всегда отрицательны, то условия (4.94) и (4.97) будут выполнены при достаточно больших и положительных значениях параметра  $b$ . Это соответствует физическому смыслу параметра  $b$ , определяющего трение в уравнениях нелинейного "маятника" (4.106), которые можно записать в виде одного уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = 1 + a \cos \theta - \mu b \frac{d\theta}{dt} / 2. \quad (4.110)$$

Поэтому, например, если "маятник" вращается в обратном направлении, то под действием постоянного крутящего момента, равного единице, он изменит скорость  $d\theta/dt$  на противоположную (условие  $d\theta/dt=0$  определяет пересечение траектории резонанса) и при достаточно большой величине трения (параметра  $b$ ) перейдет из вращения в колебания относительно положения равновесия  $\theta_0^* = \text{Arcsin}(-1/a)$ . На рис.4.7 показана траектория системы (4.106), вычисленная численным интегрированием на ЭЕМ, соответствующая захвату в резонанс при достаточно больших величинах трения (параметра  $b$ ). На том же рисунке показано положение сепаратрисы системы первого приближения ( $b=0$ ), пересечение которой определяет попадание траектории в колебательную область.

*Захват в резонанс механической системы*



*Рис. 4.7*

## Приложение I

### Периодические и почти периодические функции. Ряды Фурье

В теории колебаний особое внимание уделяется процессам, в которых изменение по времени характеризующих их переменных является периодическим.

#### Определение П.1

Функция  $x(t)$  ( $x(t) \neq \text{const}$ ), определенная на всей вещественной оси аргумента  $t$ , называется периодической, если ее значения не изменяются при добавлении к значениям ее аргумента некоторого не равного нулю числа  $T$ , называемого периодом, то есть  $x(t) = x(t+T)$ .

Если периодическая функция непрерывна на каком-либо интервале, то для нее существует наименьший положительный период; тогда любой период этой функции имеет вид  $kT$ , где  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

Сумма, разность, произведение и частное периодических функций с одинаковым периодом являются периодическими функциями с тем же периодом. Производная периодической функции — также периодическая функция с тем же периодом. Первообразная периодической функции является периодической функцией только тогда, когда интеграл от этой функции по отрезку длиной, равной периоду, равен нулю (что следует из определения интеграла); при этом первообразная является периодической функцией с тем же периодом. Для каждой периодической функции существует среднее значение

$$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt \quad (\text{П.1.1})$$

Сумма (разность) периодических функций с разными периодами является периодической функцией только тогда, когда их периоды соизмеримы. Например,  $x(t) = \sin 2t + \sin 3t$  — периодическая функция

с периодом  $2\pi$ , так как первое слагаемое имеет период  $\pi$ , а второе -  $2\pi/3$ ; наименьший общий период этой функции -  $2\pi$ . С другой стороны, если взять функцию  $x(t) = \sin t + \sin \pi t$ , состоящую из периодических функций с несоизмеримыми периодами, то эта функция не является периодической (нельзя подобрать общий период для этих функций). Хотя данная функция ведет себя как функция, близкая к периодической. Это пример так называемой почти периодической функции.

Определение III.2.

Непрерывная функция  $x(t)$ , определенная для всех действительных значений  $t$ , называется почти периодической, если для каждого  $\varepsilon > 0$  можно указать такое  $l(\varepsilon)$ , что в каждом интервале оси  $t$  длины  $l$  найдется хотя бы одно число  $\tau(\varepsilon)$ , для которого выполняется неравенство  $|x(t+\tau) - x(t)| < \varepsilon$ .

Числа  $\tau$  называются почти периодами функции  $x(t)$ .

Для каждой почти периодической функции существует среднее значение (на всей оси  $t$ ):

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt .$$

Почти периодическая функция может быть разложена в сходящийся ряд Фурье

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} A_n \exp(i\lambda_n t) , \quad (III.2)$$

где  $A_n = \langle x(t) \exp(-i\lambda_n t) \rangle$  - коэффициенты ряда Фурье (комплексные числа),  $\lambda_n$  ( $\lambda_0 = 0$ ) - некоторые действительные числа (частотный спектр почти периодической функции),  $i$  - мнимая единица.

Почти периодическая функция может быть аппроксимирована с любой наперед заданной точностью рядом Фурье, то есть для каждого  $\varepsilon > 0$  можно указать такой конечный тригонометрический ряд

$$P_{\varepsilon}(t) = \sum_{n=-N}^{n=N} A_n \exp(i\lambda_n t) ,$$

что для всех значений  $t$  выполняется неравенство  $|x(t) - P_{\varepsilon}(t)| < \varepsilon$ .

Комплексная форма (III.2) ряда Фурье используется довольно часто в теории колебаний для более компактного представления аналитических выражений и сокращения преобразований. Вещественная форма ряда Фурье имеет вид

$$x(t) = a_0/2 + \sum_{k=1}^{k=\infty} (a_k \cos \lambda_k t + b_k \sin \lambda_k t) .$$

Вещественные и комплексные коэффициенты Фурье связаны формулами / 2I /

$$\begin{aligned} a_k &= A_k + A_{-k} , & b_k &= i(A_k - A_{-k}), \\ A_k &= (a_k - ib_k)/2, & A_{-k} &= (a_k + ib_k)/2, \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

где  $k=0, 1, 2, \dots$ ;  $b_0=0$ .

Из выражений (III.3) следует, что коэффициенты  $A_k$  и  $A_{-k}$  являются комплексно сопряженными:  $A_k = \overline{A_{-k}}$ .

Ряд Фурье для периодической функции  $x(t)$  периода  $T$  определяется теми же формулами, однако в этом случае выражение для среднего имеет вид (III.I) и  $\lambda_n = 2\pi n/T$ .

Аналогично определяются ряды Фурье для функций нескольких переменных. Пусть, например, функция  $x(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$  — периодическая функция переменных  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$  периода  $2\pi$ . Тогда она может быть разложена в кратный ряд Фурье

$$x(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_m=-\infty}^{\infty} A_{n_1, \dots, n_m} \exp [i(n_1 \varphi_1 + \dots + n_m \varphi_m)],$$

где

$$A_{n_1, \dots, n_m} = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} x(\varphi_1, \dots, \varphi_m) \exp[-i(n_1 \varphi_1 + \dots + n_m \varphi_m)] d\varphi_1 \dots d\varphi_m.$$

Можно этот ряд представить в тригонометрической форме, однако такое представление будет громоздко.

Кроме периода  $T$  для характеристики колебательного процесса часто используются следующие параметры:

1. Круговая частота  $\omega = 2\pi/T$  - количество колебаний в  $2\pi$  секундах.

2. Частота колебаний  $f = 1/T$  - количество колебаний в одну секунду, измеряемая в герцах (Гц).

3. Амплитуда колебаний  $K = (x_{max} - x_{min})/2$ , где  $x_{max}$  и  $x_{min}$  - максимальное и минимальное значения переменной  $x$  на периоде колебаний.

## Приложение 2

### Калибровочные функции и символы порядка

Любая функция, которая ищется в виде ряда (2.7), является функцией малого параметра  $x(\varepsilon)$ . В теории асимптотических методов обычно изучают поведение функций при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Это поведение характеризуется:

1. Величиной предела  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(\varepsilon)$ , причем в общем случае  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} x(\varepsilon) \neq \lim_{\varepsilon \rightarrow -0} x(\varepsilon)$ , если функция разрывна при  $\varepsilon = 0$ .

2. Скоростью стремления  $x(\varepsilon)$  к заданному пределу.

Если предел  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(\varepsilon)$  существует, то возможны следующие

случаи: а)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(\varepsilon) = 0$ ; б)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(\varepsilon) = A < \infty$  ( $A \neq 0$ ); в)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(\varepsilon) = \infty$ .

Причем случаи (а) и (б) можно свести в один, если ввести функцию  $x(\varepsilon) - A$ .

Чтобы охарактеризовать скорость стремления функции  $x(\varepsilon)$  к нулю (или бесконечности) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ее сравнивают со скоростью стремления к нулю (или бесконечности) некоторых известных элементарных функций, которые называют калибровочными. За калибровочные функции  $\varphi(\varepsilon)$  обычно принимают следующие: 1,  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{1/2}, \varepsilon^{3/2}, \dots, \varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-2}, \dots, \exp(-1/\varepsilon), \ln(1/\varepsilon), \dots$ .

Для сравнения скоростей стремления к нулю (или бесконечности) функций  $x(\varepsilon)$  и  $\varphi(\varepsilon)$  определяют предел их отношения

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)} = B$$

и по его значению судят о поведении функции  $x(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Возможны следующие случаи:

1. Если  $B = 1$ , то пишут  $x(\varepsilon) \sim \varphi(\varepsilon)$  и говорят, что  $x(\varepsilon)$  асимптотически приближается к функции  $\varphi(\varepsilon)$  или  $\varphi(\varepsilon)$  является асимптотическим приближением для  $x(\varepsilon)$ .

2. Если  $B = 0$ , то  $x(\varepsilon) = o(\varphi(\varepsilon))$  и говорят, что порядок  $x(\varepsilon)$  меньше, чем порядок функции  $\varphi(\varepsilon)$ .

3. Если  $0 < |B| < \infty$ , то  $x(\varepsilon) = O(\varphi(\varepsilon))$  и говорят, что  $x(\varepsilon)$  имеет порядок, не превосходящий порядка  $\varphi(\varepsilon)$ , или упрощенно: функция  $x(\varepsilon)$  имеет порядок  $\varphi(\varepsilon)$ .

Символы  $\sim$ ,  $o$  и  $O$  характеризуют порядок функции  $x(\varepsilon)$  и получили название символов порядка.

Очевидно, символы порядка  $\sim$  и  $o$  являются частными случаями по отношению к символу  $O$ , когда  $B = 0$  или  $B = 1$ , то есть они содержат больше информации о порядке функции  $x(\varepsilon)$ , чем символ  $O$ .

Примеры.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} = 1 \quad \text{или} \quad \sin \varepsilon \sim \varepsilon ,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \varepsilon}{\varepsilon^2} = \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad 1 - \cos \varepsilon = O(\varepsilon^2) ,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \varepsilon}{\varepsilon^2/2} = 1 \quad \text{или} \quad 1 - \cos \varepsilon \sim \varepsilon^2/2 ,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\exp(-1/\varepsilon)}{\varepsilon^n} = 0 \quad \text{или} \quad \exp(-1/\varepsilon) = o(\varepsilon^n) ,$$

где  $n \geq 0$  - любое натуральное число.

Первые три предела находятся с помощью разложения функций  $\sin \varepsilon$  и  $\cos \varepsilon$  в ряды Тейлора в точке  $\varepsilon=0$ . Последний предел определяется введением нового параметра  $\lambda=1/\varepsilon$ , после этого полученная неопределенность  $\infty/\infty$  в пределе раскрывается  $n$ -кратным применением правила Лопитала, то есть

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\exp(-1/\varepsilon)}{\varepsilon^n} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda^n}{\exp(\lambda)} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{n!}{\exp(\lambda)} = 0 .$$

Следовательно, функция  $\exp(-1/\varepsilon)$  стремится к нулю быстрее любой степени параметра  $\varepsilon^n$ .

### Приложение 3

#### Сходящиеся и асимптотические ряды

Рассмотрим некоторый ряд  $\sum_n a_n \varepsilon^n$  (при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ), где  $a_n (n=0, 1, \dots)$

- вещественные коэффициенты ( $a_n < \infty$ ), полученный каким-либо способом для функции  $x(\varepsilon)$  и определенный в некоторой ограниченной области, например, при  $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ , где  $\varepsilon_0$  - постоянная.

Определение ПЗ.1.

Ряд  $\sum_n a_n \varepsilon^n$  называется асимптотическим рядом функции  $x(\varepsilon)$

тогда и только тогда, когда

$$x(\varepsilon) = \sum_{n=0}^N a_n \varepsilon^n + o(\varepsilon^N) \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad . \quad (ПЗ.1)$$

Условие (ПЗ.1) эквивалентно условию

$$x(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \varepsilon^n + O(\varepsilon^N) \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad ,$$

так как

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{a_N \varepsilon^N + o(\varepsilon^N)}{\varepsilon^N} = a_N \quad , \quad \text{где} \quad 0 \leq |a_N| < \infty .$$

Таким образом, ошибка, совершаемая при усечении асимптотического ряда по определению имеет порядок первого отброшенного члена ( $N$ ) и, следовательно, стремится к нулю со скоростью порядка  $O(\varepsilon^N)$ . Данное определение асимптотического ряда соответствует определению, данному французским математиком Пуанкаре, поэтому асимптотический ряд иногда называют асимптотическим рядом Пуанкаре.

Как известно, наряду с асимптотическими рядами существуют сходящиеся ряды. Введем в рассмотрение частичную сумму ряда

$$S_N = \sum_{n=0}^N a_n \varepsilon^n .$$

Определение ПЗ.2.

Ряд  $S_N = \sum_{n=0}^N a_n \varepsilon^n$  называется сходящимся, если существует

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S .$$

В этом случае величина  $S$  называется суммой ряда и пишется  $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon^n$ . Если последовательность частичных сумм  $S_N$  не имеет предела, то ряд называется расходящимся. Определение асимптотического ряда никак не связано с определением сходящегося

ряда, поэтому асимптотический ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся, однако в любом случае он может быть полезен при приближенном вычислении функции  $x(\varepsilon)$ , так как ошибка, возникающая при усечении асимптотического ряда, может быть сделана сколь угодно малой надлежным выбором параметра  $\varepsilon$ . Обратно, при заданном значении параметра  $\varepsilon$ , оценка величины ошибки может быть произведена путем оценки величины последнего отброшенного члена асимптотического ряда.

Численные расчеты на ЭВМ приближенных решений алгебраических и дифференциальных уравнений показывают / 13 /, что возникающая погрешность вычислений ( $\delta$ ), соответствующая асимптотическим и сходящимся рядам, ведет себя в зависимости от количества учтенных членов ряда по-разному. Если для сходящихся рядов она монотонно уменьшается с ростом  $N$  ( $\varepsilon = const$ ), то для асимптотических рядов погрешность уменьшается только до определенного номера  $N_{min}$ , а затем начинает увеличиваться. Причем, как правило, этот номер  $N_{min}$  небольшой. Поэтому при использовании асимптотических рядов для приближенного вычисления функций не имеет смысла определять большое число членов ряда. В практических расчетах обычно ограничиваются лишь несколькими первыми членами асимптотического ряда. С другой стороны, сходящиеся ряды обладают, как правило, медленной сходимостью, поэтому для достижения заданной точности вычислений необходимо брать большое количество членов. Обычно при использовании небольшого числа членов ряда асимптотические ряды дают большую точность вычислений по сравнению со сходящимися рядами.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Пановко Я.Г. Введение в теорию колебаний. М.:Наука,1991. 256с.
2. Маркеев А.П. Теоретическая механика. М.: Наука, 1990. 416 с.
3. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985. 232 с.
4. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1979. 496 с.
5. Мойсеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.
6. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Часть 2. М.: Наука, 1972. 332 с.
7. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с.
8. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / Под ред. А.А.Яблонского. М.: Наука, 1982. 230 с.
9. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
10. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию колебаний. М.:Наука, 1976. 384 с.
11. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, Т.3. М.: АН СССР, 1985. С.5-304.
12. Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука, 1973. 512 с.
13. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.
14. Гребеников Е.А., Рябов Ю.А. Конструктивные методы анализа нелинейных колебательных систем. М.:Наука, 1979. 432 с.
15. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.:Наука, 1984. 432 с.
16. Федорюк М.В. Асимптотика,интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.
17. Заболотнов Ю.М. Асимптотический анализ квазилинейных уравнений движения в атмосфере КА с малой асимметрией.2 //

Космические исследования.- 1994.- Т.32.- Вып.2.- С.22-33.

18. Справочник по специальным функциям / Под. ред. М.Абрамовица и А.Стегана. М.: Наука, 1979. 831 с.

19. Хапаев М.М. Усреднение в теории устойчивости. М.: Наука, 1986. 191 с.

20. Нейштадт А.И. Прохождение через сепаратрису в резонансной задаче с медленно изменяющимся параметром // ПММ.- 1975.- Т.39.- Вып.4.- С.621-632.

21. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1973. 832 с.

Учебное издание  
Заболотнов Юрий Михайлович  
Теория колебаний  
Конспект лекций

Редактор Т.К.Кретьнина  
Техн. редактор Г.А.Качева  
Корректор Т.К.Кретьнина

Лицензия № 020301 от 30.12.1996 г.

Подписано в печать 27. 12. 99г.      Формат 60×84 1/16  
Бумага газетная. Печать офсетная.  
Усл.печ.л. 9,76 . Усл.кр.-отт. 9,88 . Уч.-изд.л. 10,5 .  
Тираж 100 экз. Арт.С-3/99. Заказ 3

Самарский государственный аэрокосмический университет  
им. академика С.П.Королева.  
443086 Самара, Московское шоссе,34.

ИПО Самарского государственного аэрокосмического университета.  
443001 Самара, ул.Молодогвардейская, 151.