МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КУЙБЫШЕВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ имени С. П. КОРОЛЕВА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

КУЙБЫШЕВ 1979

УДК 518

Настоящие «Методические указания» являются 1 частью контрольных заданий и предназначаются для слушателей заочных подготовительных курсов. Они имеют цель всесторонне подготовить их к конкурсным экзаменам в Куйбышевский авиационный институт имени С. П. Королева.

Методическая разработка составлена в соответствии с новой программой вступительных экзаменов и способствует приобщению молодежи к специфическим вузовским формам учебной работы.

Слушатели-заочники, полностью выполнившие учебный график контрольных заданий, приглашаются в июле месяце на «сессию», в ходе которой читаются лекции, проводятся упражнения по всем разделам программы вступительных экзаменов.

Составители: *Ф. А. Матвеева, И. А. Сапожникова*

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Абитуриенты заочных подготовительных курсов должны изучить основные разделы элементарной математики в соответствии с программой вступительных экзаменов для поступающих в вузы.

Работа состоит из изучения теоретического материала по рекомендованным учебникам и решения задач. Изучение каждой темы заканчивается контрольной работой, которую абитуриент выполняет самостоятельно и посылает в институт на рецензию.

Так как теоретический материал для выполнения контрольных работ очень велик, рекомендуем изучать геометрию с самого начала, а тригонометрию — после выполнения контрольной работы № 3. В указаниях к контрольным работам мы остановились на отдельных вопросах, которые представляют наибольшие трудности для абитуриентов.

ЧТЕНИЕ УЧЕБНИКА

1. Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего, проделывая на бумаге все вычисления и воспроизводя имеющиеся в учебнике чертежи.

2. Особое внимание следует обращать на определение основных понятий курса. Нужно подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно.

3. Необходимо помнить, что каждая теорема состоит из условия и заключения. Все условия теоремы должны обязательно использоваться в доказательстве. Нужно добиваться точного представления о том, в каком месте доказательства использовано каждое условие теоремы.

4. При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в который рекомендуется выписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т. п. На полях конспекта следует отмечать вопросы, которые требуют письменной или устной консультации преподавателя.

5. Выводы, полученные в виде формул, рекомендуется в конспекте выделять (обводить рамкой или подчеркивать). Полезно составить лист, содержащий важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы курса. Такой лист не только помогает запомнить формулы, но может служить постоянным справочником для абитуриента.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

1. Чтение учебника должно сопровождаться решением задач, для чего рекомендуем завести специальную тетрадь.

2. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения. Если абитуриент видит несколько путей решения задач, то, сравнив их, он должен выбрать из них самый рациональный.

3. Решения задач и примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, выделяя основные вычисления. Чертежи можно выполнять от руки. Если чертеж требует особо тщательного выполнения, например, при графической проверке решения, полученного путем вычислений, следует пользоваться линейкой, транспортиром и другими чертежными инструментами, указать масштаб.

4. Решение каждой задачи должно доводиться до ответа, требуемого условием, и, по возможности, в общем виде с выводом формулы. Затем в полученную формулу подставляют числовые значения (если они даны). В промежуточных вычислениях не следует вводить приближенные значения корней, числа и т. п.

5. Полученный ответ следует проверять способами, вытекающими из существа данной задачи. Если, например, решалась задача с конкретным физическим и геометрическим содержанием, то полезно прежде всего проверить размерность полученного ответа. Полезно также, если это возможно, решить задачу несколькими способами и сравнить полученные результаты.

6. Решение задач определенного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

САМОПРОВЕРКА

1. После изучения определенной темы по учебнику и решения достаточного количества задач, рекомендуется воспроизвести по памяти определения, выводы формул, формулировки и доказательства теорем, проверяя себя каждый раз по учебнику. Воп-

росы для самопроверки, приведенные в настоящем пособии, имеют целью помочь абитуриенту в таком повторении.

2. Иногда недостаточность усвоения того или иного материала выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный раздел.

3. Важным критерием усвоения теории является умение решать задачи на пройденный материал. Однако здесь следует опасаться весьма распространенной ошибки, заключающейся в том, что благополучное решение задач воспринимается как признак усвоения теории. Часто правильное решение задачи получается в результате применения механически заученных формул, без понимания существа дела. Можно сказать, что умение решать задачи является необходимым, но недостаточным условием хорошего знания теории.

КОНСУЛЬТАЦИИ

1. Если у абитуриента при изучении теоретического материала или при решении задач возникнут вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается, он может обратиться к преподавателю для получения от него письменной или устной консультаций.

2. В своих запросах абитуриент должен точно указать, в чем он испытывает затруднение. Если он не разобрался в теоретических объяснениях или в доказательстве теоремы, или в выводе формулы по учебнику, то нужно указать, какой это учебник, год его издания и страницу, где расположен непонятный материал, что именно его затрудняет. Если абитуриент испытывает затруднение при решении задачи, то следует указать характер этого затруднения, привести предполагаемый план решения.

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

1. В процессе изучения курса математики абитуриент должен выполнять ряд (10) контрольных работ, главная цель которых — оказать помощь абитуриенту в его работе. Рецензии на эти работы позволяют абитуриенту судить о степени усвоения им соответствующего раздела курса, указывают на имеющиеся у него пробелы, на желательное направление дальнейшей работы.

2. Не следует приступать к выполнению контрольного задания, не решив достаточного количества задач по материалу, соответствующему этому заданию.

3. Контрольные работы должны выполняться самостоятельно. В противном случае абитуриент не приобретает необходимых знаний и может оказаться неподготовленным к экзамену.

4. Не рекомендуется присылать в институт одновременно работы по нескольким заданиям — это не дает возможности рецензенту своевременно указать абитуриенту на допускаемые им ошибки и удлиняет срок рецензирования контрольных работ.

5. Сроки выполнения контрольных работ в учебном году определяются графиком учебной работы, высылаемым абитуриенту.

В разработке приведен список учебников, на которые дана ссылка с индексом, стоящим в списке перед названием учебника.

Например: [А 9] — Алгебра и начала анализа. Учебное пособие для 9 класса средней школы. Под ред. А. Н. Колмогорова. М., Просвещение, 1975. Будем ссылаться: [А 9]; § 2.

Кроме списка учебников, приведен список некоторых пособий и сборников задач для поступающих в вузы, которые можно использовать при подготовке, учитывая, однако, что они ориентированы на старую школьную программу.

ЛИТЕРАТУРА

Основная:

[М 5] Математика. Учебное пособие для 5 класса. Под ред. А. И. Маркушевича. М., Просвещение, 1972.

[А 6] Алгебра. Учебное пособие для 6 класса средней школы. Под ред. А. И. Маркушевича. М., Просвещение, 1976.

[А 7] Алгебра. Учебное пособие для 7 класса средней школы, любой год издания. Под ред. А. И. Маркушевича. М., Просвещение, 1973.

[А 8] Алгебра. Учебное пособие для 8 класса средней школы, любой год издания. Под ред. А. И. Маркушевича. М., Просвещение, 1976.

[А 9] Алгебра и начала анализа. Учебное пособие для 9 класса средней школы. Под ред. А. Н. Колмогорова. М., Просвещение, 1973.

[А 10] Алгебра и начала анализа. Учебное пособие для 10 класса средней школы. Под ред. А. Н. Колмогорова. М., Просвещение, 1976.

[Г 6] Геометрия. Учебное пособие для 6 класса средней школы. Под ред. А. Н. Колмогорова. М., Просвещение, 1978.

[Г 7] Геометрия. Учебное пособие для 7 класса средней школы. Под ред. А. Н. Колмогорова. М., Просвещение, 1976.

[Г 8] Геометрия. Учебное пособие для 8 класса средней школы. Под ред. А. Н. Колмогорова. М., Просвещение, 1976.

[Г 9] В. М. Клопский и др. Геометрия. Учебное пособие для 9 класса средней школы. Под ред. З. А. Скопеца. М., Просвещение, 1975.

[Г 10] В. М. Клопский и др. Геометрия. Учебное пособие для 10 класса средней школы. Под ред. З. А. Скопеца. М., Просвещение, 1976.

Можно пользоваться и другими изданиями тех же учебных пособий.

Дополнительная:

1. Антонов Н. Н. и др. Сборник задач по элементарной математике. М., Наука, любой год издания.

2. Кущенко В. С. Сборник задач по математике. Судпромгиз, любой год издания.

3. Шахно К. У. Сборник задач по элементарной математике повышенной трудности. Минск, Высшая школа, любой год издания.

4. Егоров В. К. и др. Сборник задач по математике для конкурсных экзаменов во втузы. Под ред. М. И. Сканави. М., Высшая школа.

5. Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х. Пособие по математике для поступающих в вузы. М., Наука, 1967, 1971, 1972.

6. Башмаков М. И. Уравнения и неравенства. М., Наука, 1971.

Тема 1. МНОЖЕСТВА. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА. МОДУЛЬ ЧИСЛА. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ И ДЕЙСТВИЯ НАД МНОГОЧЛЕНАМИ. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. РАВНОСИЛЬНОСТЬ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

1. МНОЖЕСТВА. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ И ОБЪЕДИНЕНИЕ МНОЖЕСТВ. РАЗНОСТЬ МНОЖЕСТВ

См. [М 5] гл. 1, § 1; [Г 6] п. 11, 12

Определение 1: Множество A называется подмножеством множества B, если все элементы множества A принадлежат множеству B. Обозначают это так: $A \subset B$.
Если $A \subset B$, а $B \subset A$, то $A=B$.

Определение 2: Объединением двух множеств A и B называется множество C, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B. Обозначают это так: $C=A \cup B$.
Объединение 3-х и более множеств определяется аналогично.

Пример 1. Если множество A — левый круг, а множество B — правый круг (см. рис. 1), то $C=A \cup B$ есть заштрихованная область.

Пример 2. Если $A=[-1; 2]$; $B=[0; 3]$, то $C=A \cup B = [-1; 3]$ (см. рис. 2).
Если $A \subset B$, то $A \cup B=B$ (A подмножество B). Действительно это хорошо видно из геометрической иллюстрации (см. рис. 3). $A \cup B=B$ (заштрихованная область).

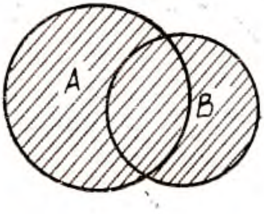

Рис. 1

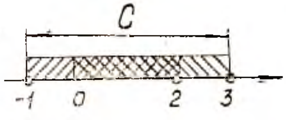

Рис. 2

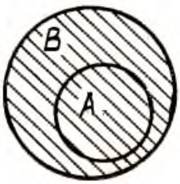

Рис. 3

Определение 3: Пересечением двух множеств A и B называется множество C, состоящее из элементов, принадлежащих одновременно множеству A и B.

Обозначают это так: $C = A \cap B$.

Пересечение 3-х и более множеств определяется аналогично.

Пример 3. $A \cap B = C$ — заштрихованная область (см. рис. 4).

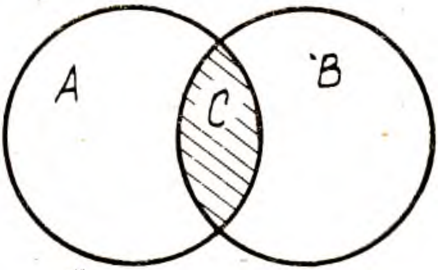

Рис. 4

Как видим, термин «пересечение» по существу геометрического происхождения.

Если $A \subset B$ (A подмножество B), то $A \cap B = A$ (проиллюстрируйте это геометрически).

Пример 4. Если $A = [-2;\ 3]$, $B =]-1;\ 4[$, то $C = A \cap B =]-1;\ 3]$ (см. рис. 5).

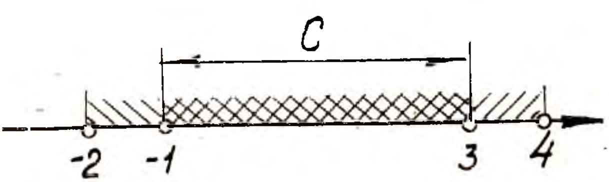

Рис. 5

Определение 4: Разностью двух множеств A и B называется множество C, состоящее из всех элементов A, не входящих в B. Обозначают это так: $C = A \setminus B$.

Пример 5. Если A — левый круг, B — правый круг, то $A \setminus B$ заштрихованная область (см. рис. 6, а). На рис. 6, б $A \setminus B = A$.

Таким образом, чтобы получить разность $A \setminus B$, достаточно удалить из множества A общие элементы множеств A и B, т. е. все элементы множества $A \cap B$ на рис. 6а $A \cap B = C$, на рис. 6б $A \cap B = \varnothing$ — пустое множество. Примерами множеств являются числовые множества:

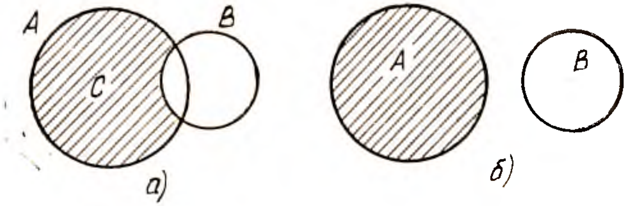

Рис. 6

N — множество всех натуральных чисел;
Z — множество всех целых чисел;
Z_0 — множество всех неотрицательных целых чисел;
Q — множество всех рациональных чисел;
R — множество всех действительных чисел;
$R \setminus Q$ — множество всех иррациональных чисел;
R_+ — множество всех положительных действительных чисел.

Между этими множествами можно записать следующие соотношения:

1) $N \subset Z_0 \subset Z \subset Q \subset R$.

2) $N \cup \{0\} = Z_0$.

3) Если $I = R \setminus Q$ — множество всех иррациональных чисел, то

$$Q \cup I = R, \quad Q \cap I = \varnothing.$$

Пример 6. Найти объединение, пересечение, разность множества четных и нечетных чисел.

Решение. Пусть A — множество четных чисел, B — множество нечетных чисел.

Это можно записать так:

$$A = \{n/n = 2k, \ k \in Z\}$$

$$B = \{n/n = 2k + 1, \ k \in Z\},$$

тогда
объединением $A \cup B = Z$;
пересечением $A \cup B = \varnothing$;
разностью $A \setminus B = A$;
разностью $B \setminus A = B$.

Пример 7. Найти объединение и пересечение множеств целых чисел, не делящихся на 13, с множеством целых чисел, делящихся на 26.

Решение. Пусть A — множество целых чисел, делящихся на 26, B — множество целых чисел, не делящихся на 13. Это можно записать так:

$$A=\{n/n = 26k = 13 \cdot 2k \ k \in Z\}$$
$$B=\{n/n \neq 13\,k,\ k \in Z\},$$

тогда объединением $C = A \cup B = \{n/n \neq 13k,\ k=2m+1, m \in Z\}$, пересечением $D = A \cap B = \varnothing$, разностью $A \setminus B = A$, $B \setminus A = B$.

Язык теории множеств позволяет взглянуть с более общих позиций на такие важные разделы школьного курса математики, как решение уравнений, неравенств, систем уравнений и неравенств (см. [А 6], пп. 53—62; [А 8], пп. 1—5).

Пример 8. Решить уравнение: $x^3+3x^2=0$.

Решение.

$$[x^3+3x^2=0] <=> [x^2(x+3)=0] <=> \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ x+3=0 \end{array}\right. <=>$$

$$<=> \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-3 \end{array}\right. <=> \{x=0\} \cup \{x=-3\} = \{0;\ -3\}.$$

Как видим, данное уравнение равносильно совокупности 2-х уравнений (понятие равносильности смотрите ниже).

[— символ совокупности.

Решением совокупности 2-х уравнений является объединение множеств их решений.

Нужно обязательно запомнить: совокупность и объединение множеств — два соответствующих друг другу понятия.

Пример 9. Решить уравнение.

$$\frac{x^2-x}{x}=0 <=> \left\{\begin{array}{l} x^2-x=0 \\ x \neq 0 \end{array}\right. <=>$$

$$<=> \left\{\begin{array}{l} x(x-1)=0 \\ x \neq 0 \end{array}\right. <=> \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x-1=0 \end{array}\right. \\ x \neq 0 \end{array}\right. <=> \{0;\ 1\} \cap R \setminus \{0\} = \{1\}.$$

Как видим, данное уравнение равносильно системе уравнения и неравенства. Решение системы уравнений или неравенств есть пересечение множеств решений всех уравнений или неравенств, входящих в систему.

Итак, нужно запомнить:
Система и пересечение множеств — два соответствующих друг другу понятия. Повторим еще раз: когда ищут пересечение — говорят «система»; когда ищут объединение — говорят «совокупность».

Пример 10. Постройте множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют следующим соотношениям.

$$а) \begin{cases} x > 2 \\ y \leq 3 \end{cases}$$

Решение (см. рис. 7).

Решением является пересечение множеств A — точек, лежащих правее прямой $x=2$. B — множество точек, расположенных ниже прямой $y=3$ и лежащих на этой прямой.
$C=A \cap B$ (на рис. 7 двойная штриховка).

$$б) \begin{cases} x+y < 3 \\ x-y \leq 1 \end{cases}$$

Решение (см. рис. 8). Пусть A — множество точек плоскости, удовлетворяющих неравенству $x+y<3$, т. е. множество точек, лежащих ниже прямой $x+y=3$, B — множество точек плоскости, удовлетворяющих неравенству $x-y\leq 1$, т. е. множество точек, лежащих выше прямой и на прямой $x-y=1$.

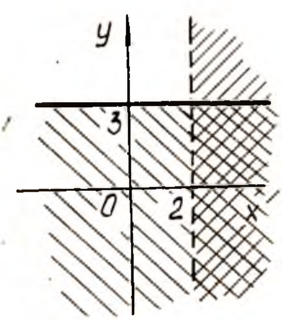

Рис. 7

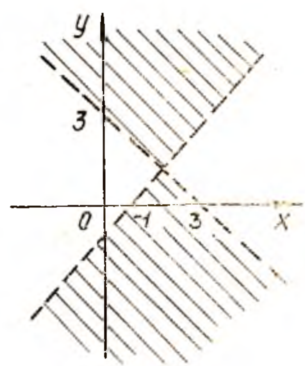

Рис. 8

Решение системы есть множество $C=A \cap B$.
Интересно сравнить решение этого примера со следующим:
в) $(x+y-3)(x-y-1)>0$. Решить неравенство графически.
Решение. Это неравенство равносильно

$$(x+y-3)\cdot(x+y-1)>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y-3>0 \\ x-y-1>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y-3<0 \\ x-y-1<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y>3 \\ x-y>1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y<3 \\ x-y<1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решением этого неравенства, как видим, является объединение множества решения двух указанных систем. В результате чего получаем множество точек двух вертикальных углов (см. рис. 9), не включая стороны этих углов

$$\text{г)}\ \begin{cases} y-x\geqslant 1 \\ x^2+y^2<9. \end{cases}$$

Решение. Множество решений этой системы есть пересечение множеств решений входящих в него неравенств (см. рис. 10).

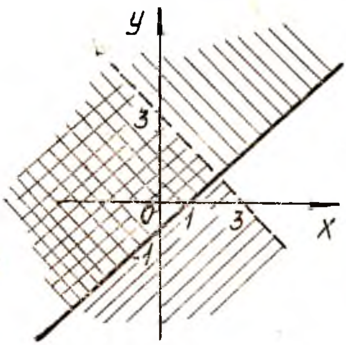

Рис. 9

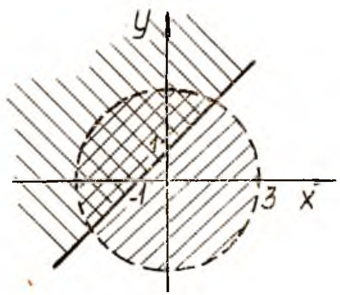

Рис. 10

A — множество точек плоскости, удовлетворяющих неравенству

$$y-x\geqslant 1.$$

Для того, чтобы найти это множество, нужно построить прямую $y-x-1=0$ и взять любую точку на плоскости, например O $(0;\ 0)$, и подставить координаты этой точки в неравенство $y-x\geqslant 1$. Получим $0-0\geqslant 1$ — неравенство ложное, следовательно, точка O $(0,\ 0)\notin A$, значит множество A есть множество точек, лежащих над прямой $y-x-1=0$, B — множество точек, удовлетворяющих неравенству $x^2+y^2\leqslant 9$, т. е. множество внутренних точек круга. Решением является множество $C=A\cap B$ (двойная штриховка).

Определение 5: [М 5], п. 8.

Модулем числа называется расстояние от начала отсчета до точки, которой соответствует это число.

Из определения следует, что модуль любого неотрицательного числа равен самому числу, модуль любого отрицательного числа равен числу, ему противоположному, т. е.

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geq 0 \\ -x, \text{ если } x < 0 \end{cases} \geq 0.$$

Запомните $|x| \geqslant 0$ для любого $x \in R$.

Из определения следуют такие свойства абсолютных величин:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ |x| = |-x|; \\ 2)\ x \leqslant |x|; \\ \quad -x \leqslant |x| \end{array}\right\}$$

докажите самостоятельно.

3) $|x_1 - x_2|$ — есть расстояние между двумя точками x_1 и x_2.

$$|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|;$$

4) $|x_1 + x_2| \leqslant |x_1| + |x_2|$;

5) $|x_1 - x_2| \geqslant |x_1| - |x_2|$;

6) $|x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2|$;

$$7)\ \left|\frac{x_1}{x_2}\right| = \frac{|x_1|}{|x_2|}.$$

Из определения же очевидны решения следующих неравенств.

Пример 1. $|x-3| > -1$.

Ответ: $x \in R$, так как модуль любого числа есть число неотрицательное.

Пример 2. $|x-5| < -5$.

Ответ: $x \in \varnothing$ по тем же причинам.

Обычный прием решения уравнений, неравенств, построения графиков функций, содержащих переменную под знаком модуля, — «раскрытие» модуля — состоит в следующем: исходя из определения модуля, множество допустимых значений переменной разбивают на непересекающиеся подмножества, на каждом из которых все функции, содержащиеся под знаком модуля, сохраняют знак. После этого решение исходной задачи сводится к решению совокупности систем уравнений и неравенств. Рассмотрим примеры:

Пример 3. Решить уравнение

$$|x+5|+|3x-4|-2x-4=0.$$

Решение. Разобьем числовую ось на непересекающиеся промежутки

$$]-\infty;\ -5[,\ [-5;\ \tfrac{4}{3}[;\ [\tfrac{4}{3};\ +\infty[$$

На каждом из этих промежутков выражения $x+5$ и $3x-4$ сохраняют знак. «Раскрывая» модули, приходим к следующей совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x<-5 \\ -(x+5)-(3x-4)-2x-4=0\end{cases}\\ \begin{cases} -5\leqslant x<\frac{4}{3} \\ x+5-(3x-4)-2x-4=0\end{cases}\\ \begin{cases} x\geqslant\frac{4}{3} \\ x+5+3x-4-2x-4=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x<-5 \\ -6x-5=0\end{cases}\\ \begin{cases} -5\leqslant x<\frac{4}{3} \\ -4x+5=0\end{cases}\\ \begin{cases} x\geqslant\frac{4}{3} \\ 2x=3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x<-5 \\ x=-\frac{5}{6}\end{cases}\\ \begin{cases} -5\leq x<\frac{4}{3} \\ x=\frac{5}{4}\end{cases}\\ \begin{cases} x\geqslant\frac{4}{3} \\ 2x=3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in\varnothing \\ x=\frac{5}{4} \\ x=\frac{3}{2}\end{array}\right.$$

Ответ: $x\in\left\{\frac{5}{4};\ \frac{3}{2}\right\}$.

Аналогично можно решать и неравенства. Но, как видно из приведенного примера, этот метод довольно-таки громоздкий, а для неравенств он еще усложняется. Поэтому при решении неравенств удобно пользоваться теоремой, которая легко доказывается.

Теорема.

$$1)\quad |f(x)|\leqslant g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\leqslant g(x) \\ f(x)\geqslant -g(x)\end{cases}$$

$$2)\ |f(x)| \geqslant g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \geqslant g(x) \\ f(x) \leqslant -g(x). \end{array}\right.$$

Пример 4.

$$|x-2| < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 < 3 \\ x-2 > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 5.$$

Ответ: $-1 < x < 5$.

Геометрическую иллюстрацию ответа см. на рис. 11.

Пример 5.

$$|x+3| \geqslant 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+3 \geqslant 1 \\ x+3 \leqslant -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geqslant -2 \\ x \leqslant -4. \end{array}\right.$$

Заметим, что совокупность неравенств нельзя записать в виде двойного неравенства.

Ответ: $]-\infty; -4] \cup [-2; +\infty[$.

Геометрическую иллюстрацию ответа см. на рис. 12.

Рис. 11

Рис. 12

Пример 6.

$$|2x+2| \leqslant x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2 \leqslant x-4 \\ 2x+2 \geqslant -(x-4) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant -6 \\ 3x \geqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant -6 \\ x \geqslant \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing.$$

Ответ: $x \in \varnothing$.

Пример 7.

$$|3x+4| > x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x+4 > x-1 \\ 3x+4 < -(x-1) \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x > -5 \\ 4x < -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > -\frac{5}{2} \\ x < -\frac{3}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in R.$$

Ответ:

$]-\infty;\ -\frac{3}{4}[\cup]-\frac{5}{2};\ +\infty[=R.$

Геометрическую иллюстрацию см. на рис. 13.

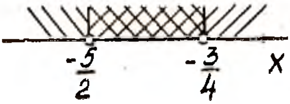

Рис. 13

III. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ И ДЕЙСТВИЯ НАД МНОГОЧЛЕНАМИ

Об алгебраических выражениях можно прочитать [А 6], п. 2, с. 5. Понятие многочлена — [А 6], п. 44, с. 151. Обычно вызывает затруднения деление многочленов.

Пусть даны два многочлена:

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0 \text{ и}$$

$$Q_m(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\dots+b_1x+b_0 \text{ и пусть } n\geqslant m.$$

Частным от деления этих многочленов называется многочлен $S(x)$ такой, что

$$P_n(x)=Q_m(x)\cdot S(x). \qquad (1)$$

При этом пишут $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=S(x)$. Нетрудно видеть, что $S(x)$ — многочлен степени $n-m$. Например $\frac{x^3+1}{x+1}=x^2-x+1$. Действительно $x^3+1=(x+1)\ (x^2-x+1)$. Если многочлен $P_n(x)$ делится на $Q_m(x)$ с остатком $R(x)$, то $P_n(x)=Q_m(x)\cdot S(x)+$ $+R(x)$ (2),
причем, степень $S(x)$ равна $n-m$, а степень многочлена $R(x)$ меньше m.

Тогда $S(x)$ называют целой частью частного $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$.

Из (2) $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=S(x)+\frac{R(x)}{Q_m(x)}$. (3)

Практически деление многочленов выполняется по схеме, которую мы разберем на примерах.

Пример 1. Многочлен $x^4-2x^3+2x^2-2x+1$ разделить на двучлен $x-1$.

Решение. Расположенные в порядке убывания степеней многочлены надо записать так, как это делается при делении чисел «уголком». Далее, старший член делимого x^4 делим на старший член делителя x, в результате чего получаем старший член частного x^3, который записываем под чертой. Умножая затем этот старший член x^3 почленно на делитель, записываем результаг $x^4 - x^3$ под делимым, причем члены одинаковой степени нужно записывать друг под другом. Вычитая из делимого полученное выражение, получаем новый многочлен: $-x^3+2x^2-2x+1$, с которым повторяем описанную операцию. Деление производить до тех пор, пока в результате очередного вычитания не получим нуль (как в нашем примере) или многочлен степени, меньшей, чем степень делителя. (Такой пример будет рассмотрен ниже).

$$
\begin{array}{r|l}
-\; x^4-2x^3+2x^2-2x+1 & x-1 \\
x^4-\;\; x^3 \qquad\qquad\qquad & \overline{x^3-x^2+x-1} \\
\hline
-\; -x^3+2x^2-2x+1 & \\
-x^3+\;\; x^2 \qquad\quad & \\
\hline
-\; x^2-2x+1 & \\
x^2-\;\; x \quad\; & \\
\hline
-\; -x+1 & \\
-x+1 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Пример 2. $3x^5 - 7x^4 + 2x^2 - x$ разделить на $x^3 + 2x - 3$. В результате деления получим целую часть $3x^2 - 7x - 6$ и остаток $25x^2-10x-18$, степень которого меньше степени делителя $x^3 + 2x - 3$.

Пример 2.

$$
\begin{array}{r|l}
-\; 3x^5-7x^4 \qquad\quad +2x^2-\;\; x & x^3+2x-3 \\
3x^5 \qquad\quad +6x^3-9x^2 \qquad\quad & \overline{3x^2-7x-6} \\
\hline
-\; -7x^4-6x^3+11x^2-\;\; x & \\
-7x^4 \qquad\quad -14x^2+21x & \\
\hline
-\; -6x^3+25x^2-22x & \\
-6x^3 \qquad\quad -12x+18 & \\
\hline
25x^2-10x-18. &
\end{array}
$$

Согласно формуле (3) можем записать результат деления в виде:

$$\frac{3x^5 - 7x^4 + 2x^2 - x}{x^3 + 2x - 3} = 3x^2 - 7x - 6 + \frac{25x^2 - 10x - 18}{x^3 + 2x - 3}.$$

IV. ТОЖДЕСТВЕННО РАВНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ НА МНОЖЕСТВЕ. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

См. [А 5] п. 42, [А 8] п. 31

Определение. *Два выражения называются тождественно равными на множестве, если на этом множестве они имеют смысл и все их соответственные значения равны.*

Определение. Пусть n — натуральное число. Тогда корнем n степени из числа a называется число, n степень которого равна a. Из определения следует, что если n — нечетное, то $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ на множестве: $\{a | a \in R\}$.

Для корней четной степени вводится понятие арифметического корня n степени из числа a.

Определение. *Арифметическим корнем n степени (n — четное) из числа a называется неотрицательное число, n степень которого равна a.*

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ на множестве $\{a/a \in R,\ a \geqslant 0\}$, $a \geqslant 0$, так как четная степень любого действительного числа есть число неотрицательное.

Заметим, $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$.

ЗАПОМНИТЕ:

n — нечетное	n — четное
$\sqrt[n]{a} = b$, где	$\sqrt[n]{a} = b$, где
$a \in R$ и $b \in R$	$a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$.

Введенное определение корня нечетной степени несколько отличается от школьного. В школе, например, $\sqrt[3]{-8}$ не определяется, так как $-8 < 0$. По введенному нами определению $\sqrt[3]{-8} = -2$, что позволяет значительно упростить решение уравнений, содержащих радикалы. Разберем несколько простейших примеров:

$$\sqrt[5]{x^5} = x; \qquad \sqrt[4]{x^4} = |x|;$$

$$\sqrt[3]{x^3y^4} = xy\sqrt[3]{y}; \qquad \sqrt{x^2y^3} = y|x|\sqrt{y}.$$

Из-под корня y выносим без знака модуля, т. к. корень четной степени определен только для неотрицательных чисел, поэтому

$$x^2y^3 \geqslant 0 => y^3 \geqslant 0 => y \geqslant 0 => |y| = y.$$

Пример 1. Упростить выражение

$$A = \frac{x-1}{x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}} + 1} x^{\frac{1}{4}} + 1 \text{ при } x > 0.$$

Решение. Разложим на множители выражение:

$$x-1=(x^{\frac{1}{2}}-1)(x^{\frac{1}{2}}+1);$$

$$x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{4}}+1);\quad x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}=x^{\frac{1}{4}}(x^{\frac{1}{4}}+1).$$

Тогда выражение A примет вид:

$$A=\frac{(x^{\frac{1}{2}}-1)(x^{\frac{1}{2}}+1)\cdot x^{\frac{1}{4}}(x^{\frac{1}{4}}+1)}{x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{4}}+1)(x^{\frac{1}{2}}+1)}\cdot x^{\frac{1}{4}}+1=x^{\frac{1}{2}}-1+1=$$

$$=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}.$$

Ответ: $A=\sqrt{x}$.

Пример 2. Упростить выражение

$$B=\frac{\sqrt{a+\sqrt{x}}+\sqrt{a-\sqrt{x}}}{\sqrt{a+\sqrt{x}}-\sqrt{a-\sqrt{x}}},\text{ если } x=4(a-1),\ (a>1).$$

Решение. При $x=4(a-1)$, $(a>1)$ выражение имеет смысл. Освободимся от иррациональности в знаменателе и приведем подобные члены.

$$B=\frac{\sqrt{a+\sqrt{x}}+\sqrt{a-\sqrt{x}}}{\sqrt{a+\sqrt{x}}-\sqrt{a-\sqrt{x}}}=\frac{\left(\sqrt{a+\sqrt{x}}+\sqrt{a-\sqrt{x}}\right)^2}{\left(\sqrt{a+\sqrt{x}}\right)^2-\left(\sqrt{a-\sqrt{x}}\right)^2}=$$

$$=\frac{a+\sqrt{x}+2\sqrt{a+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{a-\sqrt{x}}+a-\sqrt{x}}{a+\sqrt{x}-a+\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{2\left(a+\sqrt{a^2-x}\right)}{2\sqrt{x}}=\frac{a+\sqrt{a^2-x}}{\sqrt{x}}.$$

Подставим заданное значение $x=4(a-1)$ в $\sqrt{a^2-x}$

$$\sqrt{a^2-x}=\sqrt{a^2-4(a-1)}=\sqrt{a^2-4a+4}=\sqrt{(a-2)^2}=$$

$$=|a-2|=\begin{cases}a-2, & a\geqslant 2\\ 2-a, & 1<a<2.\end{cases}$$

Следовательно, данное выражение запишется:

$$B=\left.\frac{a+\sqrt{a^2-x}}{\sqrt{x}}\right|_{x=4(a-1)}=\begin{cases}\dfrac{a+a-2}{2\sqrt{a-1}}, & a\geqslant 2\\[2ex] \dfrac{a+2-a}{2\sqrt{a-1}}, & 1<a<2\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2(a-1)}{2\sqrt{a-1}}, & a\geqslant 2\\ \dfrac{2}{2\sqrt{a-1}}, & 1<a<2\end{cases}=\begin{cases}\sqrt{a-1}, & a\geqslant 2\\ \dfrac{1}{\sqrt{a-1}}, & 1<a<2.\end{cases}$$

Ответ:

$$B=\begin{cases}\sqrt{a-1}, & a\geqslant 2\\ \dfrac{1}{\sqrt{a-1}}, & 1<a<2\,.\end{cases}$$

Пример 3. Упростить выражение

$$A=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\,.$$

Решение. Положим $\sqrt{x-1}=y$. Очевидно, что $y\geqslant 0$ (значение арифметического корня) $x-1=y^2 <=> x=y^2+1$. Подставим $x=y^2+1$ в A:

$$A=\sqrt{y^2+1+2y}+\sqrt{y^2+1-2y}=\sqrt{(y+1)^2}+\sqrt{(y-1)^2}=$$

$$=|y+1|+|y-1|=\begin{cases}y+1+y-1, & y\geqslant 1\\ y+1+1-y, & 0\leqslant y<1\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}2y, & y\geqslant 1\\ 2, & 0\leqslant y<1.\end{cases}$$

Учтем, что если $y=\sqrt{x-1}\geqslant 1$, то $x\geqslant 2$, а при $0\leqslant y<1$

$$0\leqslant\sqrt{x-1}<1\ (1) <=> 0\leqslant x-1<1 \quad 1\leqslant x<2$$

(возвели в квадрат неравенство (1), см. ниже теор. 4, п. 5). Тогда

$$A=\begin{cases}2\sqrt{x-1}, & x\geqslant 2\\ 2, & 1\leqslant x<2.\end{cases}$$

Ответ:

$$A=\begin{cases}2\sqrt{x-1}, & x\geqslant 2\\ 2, & 1\leqslant x<2.\end{cases}$$

V. ПОНЯТИЕ ЛОГИЧЕСКОГО СЛЕДОВАНИЯ. РАВНОСИЛЬНОСТЬ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

(См. [А 7], пп. 20, 21)

Определение 1. Говорят, что из предложения $P(x)$ следует предложение $Q(x)$, если при всяком значении переменной, обращающем $P(x)$ в истинное высказывание, $Q(x)$ обращается также в истинное высказывание. В таком случае записывают: $P(x) => Q(x)$.

Вспомним, что решением уравнения (или неравенства) называется значение переменной, обращающее уравнение (или неравенство) в истинное высказывание.

Тогда, если из уравнения $P(x)=0 => Q(x)=0$, то любое решение $P(x)=0$ является решением $Q(x)=0$, а $Q(x)=0$ может иметь решения, не являющиеся решениями $P(x)=0$. Пусть M_P — множество решений $P(x)=0$, а M_Q — множество решений $Q(x)=0$. Ясно, что $P(x)=0 => Q(x)=0$, тогда, и только тогда, когда $M_P \subset M_Q$. (Множество решений $P(x)=0$ есть подмножество решений $Q(x)=0$). Поэтому при замене уравнения и неравенства на следствие можно получить «посторонние» решения.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{x^2-3}=-1$.
О. Д. З. $x^2-3 \geq 0$, $|x| \geq \sqrt{3}$, $x \geq \sqrt{3}$ или $x \leq -\sqrt{3}$, т.е. $]-\infty; -\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3}; +\infty[$.

$$\sqrt{x^2-3}=-1 \ (P(x)=0) => x^2-3=1 \ (Q(x)=0).$$

Уравнение $Q(x)=0$ имеет два решения: $x=2$ или $x=-2$, которые принадлежат О.Д.З. уравнения $\sqrt{x^2-3}=-1$. Уравнение же $P(x)=0$: $\sqrt{x^2-3}=-1$ не имеет ни одного решения в О. Д. З., т. к. $\sqrt{x^2-3}=-1$ ложно при всех допустимых значениях x (арифметический корень не может быть отрицательным числом). Корни $x=2$, $x=-2$ — посторонние корни. Уравнение $P(x)=0$ решений не имеет.

Определение 2. Если из первого предложения следует второе, а из второго следует первое, то эти предложения называются равносильными. Уравнение $P(x)=0$ равносильно $Q(x)=0$. Записывают так:

$$P(x)=0 <=> Q(x)=0.$$

Из определений следует, что если $P(x)=0$ и $Q(x)=0$ — уравнения и M_P и M_Q — множества их решений, то $P(x)=0 <=> Q(x)=0$ тогда и только тогда, когда $M_P \subset M_Q$ и $M_Q \subset M_P$, т. е. $M_P=M_Q$. (Аналогично для неравенств).

Иначе говоря, равносильны те и только те уравнения или неравенства, множества решений которых совпадают.

При решении уравнений применяются следующие теоремы равносильности уравнений.

Теорема 1. *Если к обеим частям уравнения прибавить или из обеих частей уравнения вычесть число или выражение, имеющее смысл в О.Д.З. данного уравнения, то получим уравнение, равносильное данному.*

Теорема 2. *Если обе части уравнения умножить или разделить на число $\neq 0$ или выражение, отличное от 0 в О.Д.З. данного уравнения, то получим уравнение, равносильное данному.*
Теорема 3. Если $f(x) \geqslant 0$ и $\varphi(x) \geqslant 0$, то уравнения $f(x) = \varphi(x)$ и $f^2(x) = \varphi^2(x)$ равносильны.

Теорема 4. Уравнения $f(x) = \varphi(x)$ и $f^{2k+1}(x) = \varphi^{2k+1}(x)$ равносильны.

Решая уравнения, мы обычно совершаем над ним различные преобразования, при которых не всегда приходим к уравнению, равносильному данному. Это чаще всего происходит при нарушении условий теоремы 2 или 3.

Так, в уже рассмотренном выше уравнении $\sqrt{x^2 - 3} = -1$ мы возвели обе части уравнения в квадрат, получив как следствие уравнение $x^2 - 3 = 1$ не равносильное данному. Это произошло потому, что правая часть уравнения — отрицательное число, т. е. не выполняется условие теоремы 3.

Пример 2. Уравнения

$$x + 4 = 0 \qquad (1)$$

$$\text{и } (x^2 + 1)(x + 4) = 0 \qquad (2)$$

равносильны, т. к. второе уравнение получилось из (1) умножением обеих частей уравнения на выражение $x^2 + 1 \neq 0$ в О.Д.З. уравнения (1), т. е. $x + 4 = 0 <=> (x^2 + 1)(x + 4) = 0$.

Пример 3. Уравнения $x + 4 = 0$ (1) и $(x - 1) \cdot (x + 4) = 0$ (2) не равносильны, т. к. О.Д.З. уравнения (1) — все действительные числа, а при $x = 1$ выражение $x - 1 = 0$.

Уравнение (1) имеет одно решение $x = -4$. Уравнение (2) имеет два решения $x = -4$ и $x = 1$. Это произошло потому, что нарушено условие теоремы 2.

Аналогичные теоремы равносильности можно сформулировать и для неравенств.

Теорема 1'. *Если к обеим частям неравенства прибавить или вычесть одно и то же число или выражение, имеющее смысл в О.Д.З. данного неравенства, то получим неравенство, равносильное данному.*

Теорема 2'. *Если $f(x) \geqslant \varphi(x)$ и выражение A имеет смысл в О.Д.З. данного неравенства, то*

$$f(x) \geqslant \varphi(x) <=> Af(x) \geqslant A\varphi(x), \text{ если } A > 0 \text{ и}$$

$$f(x) \geqslant \varphi(x) <=> Af(x) \leqslant A\varphi(x), \text{ если } A < 0.$$

Теорема 3'. *Неравенства*

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x) <=>$$

$$(f(x))^{2n} \leqslant (\varphi(x))^{2n}.$$

Теорема 4'. *Неравенства*

$$f(x) \leqslant \varphi(x) \Leftrightarrow$$
$$(f(x))^{2n+1} \leqslant (\varphi(x))^{2n+1}.$$

Пример 4. Решить неравенство

$$\left|\frac{x+3}{x-2}\right| < 1.$$

Решение

$$\left|\frac{x+3}{x-2}\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{|x+3|}{|x-2|} < 1 \Leftrightarrow |x+3| < |x-2|$$

(т. к. $|x-2|>0$ и выполняется условие теоремы. Возведем обе части неравенства в квадрат. Мы имеем право это сделать, т. к. $|x+3|\geqslant 0$ и $|x-2|>0$, т. е. выполняется условие теоремы 3. Таким образом,

$$|x+3| < |x-2| \Leftrightarrow x^2+6x+9 < x^2-4x+4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10x < -5 \Leftrightarrow x < -0{,}5.$$

Ответ: $]-\infty; -0{,}5[$.

Пример 5. Решить неравенство

$$|2x-3| < x.$$

Решение. О.Д.З. данного неравенства $\{x|x \in R\}$. Если возведем обе части неравенства в квадрат, получим неравенство, не равносильное данному, т. к. $|2x-3|\geqslant 0$ в О.Д.З., а x в О.Д.З. может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Поэтому способ решения, примененный в примере № 4, не подходит.

Используем определение модуля.

1) Пусть $2x-3\geqslant 0$, т. е. $x\geqslant {}^3/_2$, тогда $|2x-3|=2x-3$ и получим систему неравенств:

$$\begin{cases} 2x-3 < x \\ x \geqslant \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x \geqslant \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Значит, решением будет промежуток $[{}^3/_2; 3[$ (см. рис. 14);

2) Пусть $2x-3<0$, т. е. $x<{}^3/_2$, тогда $|2x-3|=3-2x$ и получим систему неравенств

$$\begin{cases} 3-2x < x \\ x < \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Решением будет промежуток $]1; {}^3/_2[$ (см. рис. 15).

Объединим оба решения: $]1; 3/2[\cup [3/2; 3[=]1; 3[$ (см. рис. 16).

Рис. 14

Рис. 15

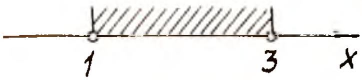

Рис. 16

Ответ: $]1; 3[$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Перечислите основные числовые множества. Дайте их определения.

2. Дайте определение пересечения, объединения и разности множеств. Дайте геометрическую интерпретацию этих операций.

3. Найдите объединение и пересечение множества всех рациональных чисел и множества всех конечных десятичных дробей.

4. Найдите объединение, пересечение и разность множества чисел вида $4k$ и множества чисел вида $6k$.

5. Пусть A — множество делителей 30, B — множество делителей 60. Истинны ли высказывания:

а) $A \subset B$; в) $A \cup B = B$;

б) $B \subset A$; г) $A \cap B = A$.

6. Покажите штриховкой на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств:

а) $\begin{cases} y \geq 2x+6 \\ y \leq -2x+6 \end{cases}$; б) $\begin{cases} y+x > 2 \\ y > x+2 \\ y < 5 \end{cases}$; в) $\begin{cases} y \geq x^2 \\ y-4 < 0; \end{cases}$

г) $(y-x^2)(y-4) > 0$; д) $(x^2+y^2-4)(x^2+y^2-9) > 0$.

7. Выполнить деление многочленов:

а) $(x^4+2x^3-x^2+3x+10) : (x+2)$;

б) $(2x^5+x^2-4x+1):(x^3-2x^2+4x-3)$.

8. Дайте определение корня нечетной степени и арифметического корня четной степени.

9. Упростить:

$$\text{а) } \sqrt[4]{x^4y^5}; \quad \text{б) } \sqrt[3]{a^3b^6};; \quad \text{в) } \sqrt{x^6y^3}; \quad \text{г) } \sqrt{x^4y^9}.$$

10. Упростить:

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4a^{-1}}-\frac{2^{-2}}{a}\right)\cdot\left[(a-1)\sqrt[3]{(a+1)^{-3}}-\frac{(a+1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(a^2-1)(a-1)}}\right].$$

11. Решить уравнение:

$$\text{а) } \frac{7x+4}{5}=x+\frac{|3x-5|}{2};$$

$$\text{б) } |x-5|+|2x-3|+4x-1=0.$$

12. Решить неравенства:

а) $(x-2)>-2$ в) $(2x+3)<4$

б) $(x+1)>2$ г) $(x+3)<2x$ д) $(2x-5)>x$.

13. Будут ли равносильны следующие пары уравнений.

а) $x^3+2x^2=0$ и $x^3+2x^2+\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x+2}$;

б) $x^2+2x=3$ и $x^2+2x+\lg(x+1)=3+\lg(x+1)$;

в) $x^2-4x=0$ и $x^2-4x+\lg(5-x)=\lg(5-x)$;

г) $f(x)=g(x)$ и $\lg f(x)=\lg g(x)$;

д) $\lg x^2=4$ и $2\lg x=4$;

е) $\lg x^2=1$ и $x^2=10$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

1. Найти объединение, пересечение и разность множества целых чисел, не делящихся на 26, с множеством целых чисел, делящихся на 13.

2. Покажите штриховкой на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств.

а) $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 25; \\ y\geqslant x^2 \end{cases}$ б) $(x^2+y^2-25)(y-x^2)<0$.

3. Вычислить:

$$\frac{\left(0{,}425+\frac{3}{5}-0{,}005\right):0{,}1}{30{,}5+\frac{1}{6}+3\frac{1}{3}}+\frac{6\frac{3}{4}+5\frac{1}{2}}{26:3\frac{5}{7}}-0{,}05.$$

4. Упростить:

$$\left(2\sqrt{x^4-a^2x^2}-\frac{2a^2}{\sqrt{1-a^2x^{-2}}}\right)\cdot\frac{(x^2a^2-4+4a^2x^{-2})^{-\frac{1}{2}}}{2ax\,(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}.$$

5. Выполнить деление многочленов:

а) x^4+x^3-x-1 на x^2-1;

б) $3x^5-4x^4+2x^2+x+1$ на x^3+x+2.

6. Решить уравнение

а) $\frac{3x-7}{5}=2x-\frac{|2x+5|}{2}$.

б) $|2x+4|+|3x-4|-6x-7=0$.

7. Решить неравенства

а) $|2x+1|<2$; в) $3|x-1|\leqslant x+3$;

б) $|3x-1|>2$; г) $3|x+1|\geqslant x+5$.

8. Равносильны ли уравнения или неравенства

а) $x+2=0$; $x^3(x+2)=0$;

б) $\frac{x+3}{x}<3$ $x+3<3x$;

в) $\left|\frac{x+3}{x}\right|\geqslant 3$; $|x+3|\geqslant 3|x|$.

Тема 2. ФУНКЦИЯ

1. Определение функции.
2. График функции.
3. Обратная функция и ее график. Свойства обратной функции.
4. Четные и нечетные функции.
5. Периодические функции.
6. Монотонные функции.

См. [А 6], п. 17; [А 10] материал для повторения.

Пример 1. Найти область определения функции:

$$\text{а)}\ y=\frac{\sqrt{9-x^2}}{x-1}.$$

Решение

$$D(y)=\left\{x \Big/ \begin{cases}9-x^2\geqslant 0\\ x-1\neq 0\end{cases}\right\}$$

Решим систему неравенств

$$\begin{cases}9-x^2\geqslant 0\\ x-1\neq 0\end{cases} => \begin{cases}x^2\leqslant 9\\ x\neq 1\end{cases} <=> \begin{cases}|x|\leqslant 3\\ x\neq 1\end{cases} <=>$$

$$<=> \begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 3\\ x\neq 1\end{cases} => D(y);\quad [-3;\ 1[\cup]1;\ 3]$$

$$\text{б)}\ y=\arcsin\frac{x+1}{x}+\frac{1}{\lg(x+3)}.$$

Решение

$$D(y)=\left\{x \Big/ \begin{matrix}\left|\frac{x+1}{x}\right|\leqslant 1\\ x+3>0\\ \lg(x+3)\neq 0\end{matrix}\right\}.$$

Решим систему неравенств

$$\begin{cases}\left|\frac{x+1}{x}\right|\leqslant 1\\ x+3>0\\ \lg(x+3)\neq 0\end{cases} <=> \begin{cases}|x+1|\leqslant|x|\\ x+3>0\\ x+3\neq 1\end{cases} <=>$$

$$<=> \begin{cases}(x+1)^2\leqslant x^2\\ x>-3\\ x\neq -2\end{cases} <=> \begin{cases}x^2+2x+1-x^2\leqslant 0\\ x>-3\\ x\neq -2\end{cases} <=>$$

$$<=> \begin{cases}2x+1\leqslant 0\\ x>-3\\ x\neq -2\end{cases} <=> \begin{cases}x\leqslant -\frac{1}{2}\\ x>-3\\ x\neq -2\end{cases} <=> \begin{cases}-3<x\leqslant -\frac{1}{2}\\ x\neq -2\end{cases}$$

$$D(y):\ ]-3;\ -2[\cup]-2;\ -\frac{1}{2}].$$

Пример 2. Какие из приведенных ниже функций являются четными и какие нечетными?

$$\text{а)}\ \sin^3 2x \cdot \cos 3x.$$

Решение. Функция $\sin x$, как известно, нечетная функция, следовательно $\sin 2x$ тоже нечетная; $\sin^3 2x$ тоже нечетная, так как при возведении в нечетную степень нечетной функции получается нечетная функция. Cos x — функция четная, следовательно, $\cos 3x$ тоже четная функция.
Запомните:

$$\text{ч} \cdot \text{ч} = \text{ч}$$

$$\text{н/ч} \cdot \text{н/ч} = \text{ч}$$

$$\text{н/ч} \cdot \text{ч} = \text{н/ч},$$

где «ч» — четная функция, а) «н/ч» — нечетная функция. Поэтому $\sin^3 2x \cdot \cos 3x$ — нечетная функция.

$$\text{б)}\ f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$$

$$f(-x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1} = -\ln \frac{1-x}{1+x}.$$

Значит $f(x) = -f(-x)$. Следовательно, данная функция нечетная.

в) $f(x) = x^2 + 2|x| - 3$

$$f(-x) = (-x)^2 + 2|-x| - 3 = x^2 + 2|x| - 3.$$

Значит $f(x) = f(-x)$, т. е. данная функция четная.

г) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

$$f(-x) = (-x^2) + 2(-x) - 3 = x^2 - 2x - 3.$$

При сравнении с $f(x)$ видим, что $f(x) \neq f(-x)$.

$f(x) \neq -f(-x)$, т. е. данная функция не является ни четной, ни нечетной. Такую функцию будем называть функцией общего вида.

Пример 3. Найти функцию, обратную данной.

а) $y = 3x^2\ (x \geqslant 0)$.

Решение. Так как $y = 3x^2$ при $x \geqslant 0$ является непрерывной, монотонно возрастающей функцией, то по теореме существования обратной функции (см. [А 10] п. 84), эта функция имеет обратную. Найдем ее.

$$x^2 = \frac{y}{3} => x = \sqrt{\frac{y}{3}}.$$

(Берем только положительный корень, т. к. $x \geqslant 0$).
Заменим x на y, а y на x.

$y = \sqrt{\frac{x}{3}}$ — функция, обратная данной

$$D(y) = \{x / x \geqslant 0\}$$

Ответ: $y = \sqrt{\frac{x}{3}}$

б) $y = \frac{2x+1}{x-3}$ $\qquad D(y) = \{x / x \neq 3\}$.

Это дробно-линейная функция, график ее есть гипербола с вертикальной асимптотой $x=3$, следовательно, эта функция непрерывна и монотонна в интервалах $]-\infty; 3[$ и $]3; +\infty[$. Поэтому в каждом из этих интервалов существует функция, обратная данной. Найдем ее.

$$yx - 3y = 2x + 1 \Longleftrightarrow (\text{в} D(y))$$

$$\Updownarrow$$

$$\Longleftrightarrow yx - 2x = 1 + 3y \Longleftrightarrow$$

$$\Updownarrow$$

$$\Longleftrightarrow x(y-2) = 1 + 3y \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{1+3y}{y-2}.$$

Заменим x на y, а y на x.

$$y = \frac{1+3x}{x-2} \qquad D(y) = \{x / x \neq 2\}.$$

Ответ:

$$y = \frac{1+3x}{x-2} \qquad D(y) = \{x / x \neq 2\}.$$

Пример 4. Найти период функций.

а) $f(x) = \cos\frac{x}{2}$.

Решение.

$\cos x$ имеет период $T = 2\pi$

$\cos\frac{x}{2}$ имеет период $T_1 = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

б) $f(x) = \sin 3x + \cos 5x$.

Решение. Периодом суммы 2-х периодических функций является наименьшее общее кратное периодов слагаемых.
Функция $\sin x$ имеет период $T=2\pi$.
Функция $\sin 3x$ имеет период $T_1=\frac{2\pi}{3}$.
Функция $\cos x$ имеет период $T=2\pi$.
Функция $\cos 5x$ имеет период $T_2=\frac{2\pi}{5}$.
Функция $f(x)$ имеет период $T_3=2\pi$.

в) $f(x)=\{x\}=x-[x]$

$\{x\}$ — дробная часть числа, $[x]$ — целая часть числа.
График этой функции см. на рис. 17.

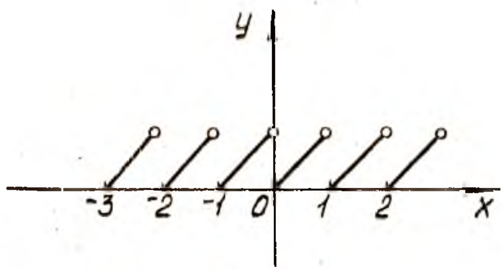

Рис. 17

Периодом этой функции является $T=1$.

г) $y=\arcsin x$.

$$D(y):[-1;\ 1].$$

Решение. Так как областью определения этой функции является конечный отрезок, то она не является периодической. Запомните, если функция периодическая, то ее область определения есть бесконечный интервал. Это следует из определения периодической функции.

Пример 5. Построить график функции

$$y=\sqrt{(x+3)^2}+\sqrt[4]{(2x-1)^4}+\sqrt[3]{x^3}.$$

Решение. Используя определение арифметического корня и корня n степени, можем записать:

$$y=|x+3|+|2x-1|+x \quad D(y)=R.$$

Разобьем числовую ось на интервалы, в которых выражения, стоящие под знаком модуля, сохраняют постоянный знак.

$$]-\infty;\ -3],\ ]-3;\ \frac{1}{2}];\ ]\frac{1}{2};\ +\infty[$$

$$y=\begin{cases} -x-3+1-2x+x & \text{при } x<-3 \\ x+3+1-2x+x & \text{при} -3\leqslant x<\frac{1}{2} \\ x+3+2x-1+x & \text{при } \frac{1}{2}\leqslant x \end{cases}$$

$$y=\begin{cases} -2x-2 & \text{при } x<-3 \\ 4 & \text{при } -3\leqslant x<\frac{1}{2}, \\ 4x+2 & \text{при } \frac{1}{2}\leqslant x \end{cases}$$

График функции $y=|x+3|+|2x-1|+x$ см. на рис. 18.

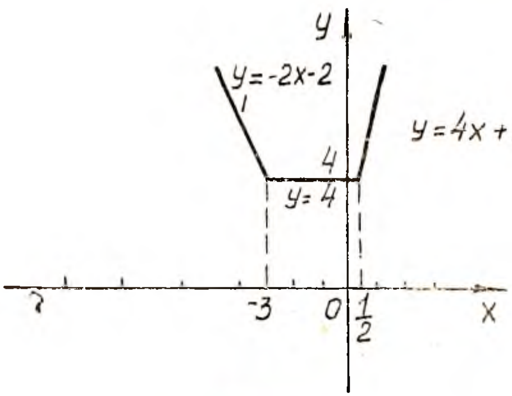

Рис. 18

Заметим, что графики подобных функций всегда непрерывны.

Пример 6. Построить график функции.

$$y=x\sqrt{(x+3)^2}-4.$$

Решение.

$$y=x\sqrt{(x+3)^2}-4=x\,|\,x+3\,|-4=$$

$$=\begin{cases} -x^2-3x-4 & \text{при } x<-3 \\ x^2+3x-4 & \text{при } x\geqslant -3 \end{cases}$$

При $x<-3$ график данной функции совпадает с графиком параболы

$$y=-x^2-3x-4.$$

При $x \geqslant -3$ график данной функции совпадает с графиком параболы

$$y = x^2 + 3x - 4.$$

График данной функции будет иметь вид (см. рис. 19).

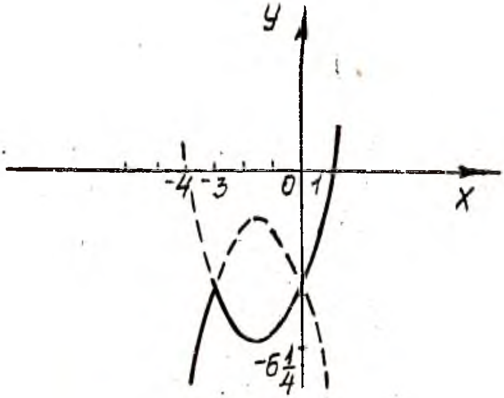

Рис. 19

Вопросы для самопроверки

1. Дать определение числовой функции.

2. Что называется графиком функции? Всякая ли кривая на плоскости является графиком некоторой функции?

3. Какая функция называется обратной по отношению к данной функции?

4. Любая ли функция имеет обратную функцию? Как называется функция, которая имеет обратную?

5. Что собой представляют графики взаимно-обратных функций?

6. Дать определение четной функции, нечетной функции.

7. Привести пример периодической функции, которая не имеет наименьшего периода.

8. Найти область определения функции

а) $y = \frac{1}{\lg(1-x)} + \sqrt{x+2}$;

б) $y = \sin(x-3) + \sqrt{x^2-16}$.

9. Какие из функций являются четными, какие нечетными, какие не являются ни четными, ни нечетными, т. е. общего вида?

а) $y=1-x^2$; г) $y=2^x+2^{-x}$;

б) $y=4\sin x\cdot\operatorname{tg}2x$; д) $y=x-|x|$;

в) $y=\sin x-\cos x$; е) $y=\operatorname{ctg}x\cdot\cos 3x$.

10. Найти функцию, обратную данной

а) $y=1-5x$; в) $y=x^2-3\ (x<0)$;

б) $y=x^3+1$; г) $y=\dfrac{3}{1-x}$.

11. Найти период функции

а) $f(x)=2\operatorname{tg}5x$;

б) $f(x)=\sin\left(\dfrac{x}{4}+1\right)$.

12. Построить графики следующих функций

а) $y=2x\sqrt[4]{(x-1)^4}+3|x+2|-\sqrt[3]{(2x+5)^3}$;

б) $y=\dfrac{x}{|x|}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

1. Найти область определения функции

а) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{5}-\dfrac{3x-1}{\lg(x+2)}$;

б) $y=\operatorname{tg}(2x+1)+\sqrt{2x-1}$;

в) $y=\sqrt[4]{2-|x|}$.

2. Построить графики следующих функций

а) $y=x|x-2|$;

б) $y=|-3x^2-2x+3|$;

в) $y=\sqrt[4]{(2x+1)^4}-3(x-1)+\sqrt[5]{(2x+3)^5}$.

3. Установите, какие из перечисленных функций четные, нечетные и какие не являются ни четными, ни нечетными (т. е. общего вида)

а) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{\cos 3x}$; б) $g(x)=\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$;

в) $=\dfrac{3^x+3^{-x}}{5x}$; г) $y=x^2-3|x|+1$.

4. Найти функцию, обратную функции

а) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$; б) $y=5x^3-4$.

5. Чему равен период функции

а) $y=\cos 2x+\sin\frac{x}{2}$;

б) $y=\cos(\omega t+\alpha)$; в) $y=3$.

Ответы к упражнениям из самопроверки

Тема 1

4. Числа вида $4k$ и $6k$, где $k \in N$;
числа вида $12k$, где $k \in N$;
числа вида $4(3k-1)$ и $4(3k-2)$, где $k \in N$.

5. а) да; б) нет; в) да; г) да.

7. а) x^3-x+5;

б) $2x^2+4x+\frac{-9x^2+8x+1}{x^3-2x^2+4x-3}$.

9. а) $y|x|\sqrt[4]{y}$; б) ab^2; в) $y|x|\sqrt[3]{y}$; г) $x^2y^4\sqrt{y}$.

10. $\frac{(a^2+1)(1-a)}{2a(1-a)}$, если $|a|<1$

$\frac{a-1}{a+1}$, если $a>1$; при $a\leqslant-1$; $a=1$ выражение теряет смысл.

11. а) $\left\{3;\ \frac{17}{19}\right\}$ б) $\{-7\}$

12. а) $]-\infty;\ +\infty[$; б) $]-\infty;\ -3[\cup]1;\ +\infty[$;

в) $]-\frac{7}{2};\ \frac{1}{2}[$; г) $]3;\ +\infty[$; д) $[-\infty;\ \frac{5}{3}[\cup]5;\ +\infty[$.

13. а) нет; б) нет; в) да; г) нет; д) нет; е) да.

Тема 2.

8. а) $[-2;\ 1[$; б) $]-\infty;\ -4]\cup[4;\ +\infty[$

9. а) четная; б) четная; в) общего вида; г) четная; д) общего вида; е) нечетная.

10. а) $y=\frac{1-x}{5}$; б) $y=\sqrt[3]{x-1}$;

в) $y=-\sqrt{x+3}$; г) $y=\frac{x-3}{x}$.

11. а) $\frac{\pi}{5}$; б) 8π.

Составители:

Фаина Андреевна Матвеева,
Изабелла Аркадьевна Сапожникова

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ
ПО МАТЕМАТИКЕ

Редактор Л. Соколова
Техн. редактор Н. Каленюк
Корректор Т. Пикурова

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт им. С. П. Королева,
Куйбышев, ул. Молодогвардейская, 151.

Сдано в набор 4.07.79 г. Подписано в печать. 12,09.79 г.
Формат бумаги $60 \times 84^1/_{16}$. Бумага оберточная белая. Гарнитура литературная.
Высокая печать Усл. печ. л. 2,09. Уч.-изд. л. 2,0. Тираж 1500 экз,
Заказ № 3504. Бесплатно.