Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени авиационный
институт имени академика С.П.Королева

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

У т в е р ж д е н о
редакционно-издательским
советом института
в качестве
методических указаний
для студентов
вечернего отделения

Куйбышев 1989

Составитель Л.Н.П р о к о ф ь е в

УДК 517

Метод наименьших квадратов:Метод.указания/Сост. Л.Н.Прокофьев; Куйбышев.авиац.ин-т.Куйбышев,1989.16 с.

Методические указания могут быть использованы при выполнении расчетно-графических работ по определению зависимости между величинами, исходя из данных эксперимента. В работе показано решение указанной задачи в матричных обозначениях. Наряду с кратко изложенной теорией в методических указаниях приведено достаточное число решенных типовых примеров. Данные указания предназначены студентам второго курса вечернего отделения при изучении раздела "Функции нескольких переменных" в курсе высшей математики.

Рецензенты: к.т.н., доц. В.Д.Логунов, к.т.н., доц. М.Г.Хацкель

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Во многих экспериментальных работах необходимо исследовать, как изменение одной переменной влияет на другую. Пусть, наблюдая некоторое явление, мы произвели ряд измерений величин x и y и в результате получили таблицу

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

(I)

Пусть при этом на основании каких-либо соображений нам заранее известно, что зависимость между x и y имеет вид

$$y = \beta_0 + \beta_1 x, \qquad (2)$$

но числовых значений коэффициентов β_0 и β_1 мы не знаем. Если бы результаты измерений были абсолютно точны, то для определения β_0 и β_1 было бы достаточно знать лишь две пары значений x и y, например x_1 и y_1, x_2 и y_2. Остальные неиспользованные пары удовлетворяли бы уравнению (2).

Однако результаты наших измерений не точны и поэтому значения x и y из таблицы (I), вообще говоря, не будут удовлетворять уравнению (2). Геометрически это означает, что точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ как-то разбросаны вблизи прямой (2), причем эта разбросанность носит случайный характер, связанный с многообразием причин, приводящих к погрешностям в измерениях.

Последнее обстоятельство заставляет отказаться от попыток найти точные значения коэффициентов β_0 и β_1 и ставит вопрос об отыскании оценок b_0 и b_1 для параметров β_0 и β_1.

Множество точек (x_i, y_i) на координатной плоскости называется полем рассеяния.

На практике в качестве функции, описывающей зависимость между x и y, выбирают функцию

$$y = f(x, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_r) \qquad (3)$$

по характерному расположению точек (x_i, y_i) на поле рассеяния, чтобы она отображала особенности расположения этих точек на плоскости, в частности это может быть линейная функция (2).

Для оценки параметров β_i , $i=\overline{0,r}$, функциональной зависимости (3), будем применять метод наименьших квадратов (МНК). Согласно этому методу оценки b_0, b_1, b_2,..., b_r для параметров аппроксимирующей функции (3) выбирают так, чтобы

$$Q=\sum_{i=1}^{n}[y_i-f(x_i,b_0,b_1,\dots,b_r)]^2=min.$$

Такие оценки будем называть МНК-оценками. Дифференцируя Q по b_0, b_1,..., b_r и приравнивая производные нулю, получим

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}[y_i-f(x_i;b_0,b_1,\dots,b_r)]\left(\frac{\partial f}{\partial b_0}\right)_i=0;\\ \sum\limits_{i=1}^{n}[y_i-f(x_i;b_0,b_1,\dots,b_r)]\left(\frac{\partial f}{\partial b_1}\right)_i=0;\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \sum\limits_{i=1}^{n}[y_i-f(x_i;b_0,b_1,\dots,b_r)]\left(\frac{\partial f}{\partial b_r}\right)_i=0.\end{cases} \qquad (4)$$

Здесь

$$\left(\frac{\partial f}{\partial b_k}\right)_i=f'_{b_k}(x_i;b_0,b_1,b_2,\dots,b_r),\quad k=0,1,2,\dots,r.$$

Если, в частности, $y=\beta_0+\beta_1x$, то

$$Q=\sum_{i=1}^{n}[y_i-(b_0+b_1x_i)]^2.$$

Дифференцируя Q по b_0 и b_1 , получаем

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}[y_i-b_0-b_1x_i]=0;\\ \sum\limits_{i=1}^{n}[y_i-b_0-b_1x_i]x_i=0\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}b_0n+b_1\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i;\\ b_0\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+b_1\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i.\end{cases} \qquad (5)$$

Из последней системы находим b_0 и b_1 . Задача решена.

Таким же способом можно найти оценки b_0, b_1, b_2 для коэффициентов параболы $y=\beta_0+\beta_1x+\beta_2x^2$. В этом случае:

$$f(x;b_0,b_1,b_2)=b_0+b_1x+b_2x^2;$$

$$\frac{\partial f}{\partial b_0}=1;\qquad \left(\frac{\partial f}{\partial b_0}\right)_i=1;$$

$$\frac{\partial f}{\partial b_1} = x; \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial b_1}\right)_i = x_i ;$$
$$\frac{\partial f}{\partial b_2} = x^2; \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial b_2}\right)_i = x_i^2 . \tag{6}$$

После подстановки (6) в (4) в результате простых преобразований получаем систему

$$\begin{cases} b_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + b_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 y_i ; \\ b_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + b_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i ; \\ b_0 n + b_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + b_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i . \end{cases} \tag{7}$$

Таким же способом можно найти оценки параметров многих других кривых.

ПОДБОР КРИВОЙ В МАТРИЧНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЯХ

Пусть функция (3) линейна относительно параметров β_0, β_1, ..., β_r, пусть, в частности, она имеет вид (2).

Введем следующие обозначения: Y - вектор наблюдений, X - матрица значений независимых переменных, β - вектор параметров, подлежащих оцениванию, т.е.

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \cdots & \cdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}; \qquad \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}.$$

Найдем произведение $X\beta$:

$$X\beta = \begin{pmatrix} \beta_0 + \beta_1 x_1 \\ \beta_0 + \beta_1 x_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \beta_0 + \beta_1 x_n \end{pmatrix}.$$

Матричное уравнение $Y = X\beta$ равносильно совокупности уравнений

$$\begin{cases} y_1 = \beta_0 + \beta_1 x_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = \beta_0 + \beta_1 x_n \end{cases} \qquad \text{или } y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i , \quad i = \overline{1, n}.$$

Если y' есть транспонированная матрица-столбец y, то ясно, что

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = y'y.$$

Ясно также, что

$$X'X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \ldots & \ldots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{pmatrix}.$$

Кроме того,

$$X'y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{pmatrix}.$$

Все это означает, что система уравнений (5) может быть записана так:

$$X'Xb = X'y, \tag{8}$$

где $b' = (b_0, b_1)$.

Решение этой системы дает МНК-оценки b_0, b_1 параметров β_0, β_1:

$$b = (X'X)^{-1}X'y. \tag{9}$$

Будем считать при этом, что $X'X$ – неособенная матрица.

Применение матриц дает много преимуществ, главное из которых – общность. Как только задача записывается и разрешается в матричной форме, ее решение приложимо к любой задаче такого рода, независимо от того, сколько членов содержится в уравнении (3), линейном относительно искомых параметров.

Если мы хотим подобрать с помощью МНК любую модель, линейную относительно параметров, то вычисления необходимо проводить точно в такой же форме (в матричных обозначениях), как и при подборе прямой линии, содержащей лишь два параметра β_0 и β_1.

Например, система (7) может быть записана в виде

$$XX'b = X'y,$$

где $b' = (b_0, b_1, b_2)$;

$$X = \begin{pmatrix} 1 & X_1 & X_1^2 \\ 1 & X_2 & X_2^2 \\ - & - & - \\ 1 & X_n & X_n^2 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Тогда по-прежнему $b = (X'X)^{-1} X'Y$.

Сложность вычислений с увеличением числа параметров резко возрастает, поэтому задачи с большим числом параметров решаются на ЭВМ.

Вид системы (8) и формула (9) для ее решения не изменяется, если взяты более сложные линейные модели, в которых число независимых переменных (факторов), влияющих на значение функции (отклика), две и более.

ПРИМЕРЫ

Пример I

Подобрать с помощью МНК аппроксимирующий полином для следующих данных

x	0	I	2	3	4
y	-2	-6	-I0,5	-I4,5	-I9

Р е ш е н и е

Расположение точек на поле рассеяния подсказывает, что между x и y имеет место приближенная линейная зависимость

$$y = \beta_0 + \beta_1 x.$$

Вычисления, которые нужно произвести, расположим по следующей схеме:

i	X_i^0	X_i^1	X_i^2	y_i	$X_i y_i$
1	1	X_1	X_1^2	y_1	$X_1 y_1$
2	1	X_2	X_2^2	y_2	$X_2 y_2$
3	1	X_3	X_3^2	y_3	$X_3 y_3$
4	1	X_4	X_4^2	y_4	$X_4 y_4$
5	1	X_5	X_5^2	y_5	$X_5 y_5$
Σ					

После заполнения указанной таблицы исходными данными и результатами их обработки получим следующую таблицу:

i	x_i^0	x_i^1	x_i^2	y_i	$x_i y_i$
I	I	0	0	-2	0
2	I	I	I	-6	-6,0
3	I	2	4	-I0,5	-2I,0
4	I	3	9	-I4,5	-43,5
5	I	4	I6	-I9,0	-76,0
$\sum$	5	I0	30	-52,0	-I46,5

Тогда система уравнений (5) для определения b_0 и b_1 примет вид

$$\begin{cases} 5b_0 + 10b_1 = -52{,}0 ; \\ 10b_0 + 30b_1 = -146{,}5 . \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем $b_0 = -1{,}9$, $b_1 = -4{,}25$. Следовательно, искомая зависимость между x и y выражается формулой

$$y = -1{,}9 - 4{,}25x .$$

Пример 2

В результате измерения зависимых величин x и y получены следующие данные

x	I	2	3	4	5	6	7
y	0,5	0,5	I	2	3	5	8

Определить вид зависимости между величинами x и y и найти МНК-оценки параметров эмпирической формулы.

Решение

В прямоугольной декартовой системе координат построим точки M_i с координатами (x_i , y_i). они незначительно уклоняются от точек дуги некоторой параболы. Следовательно, можно предположить, что зависимость между x и y выражается формулой

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 .$$

По результатам измерений и обработки величин x и y составим следующую таблицу:

i	X_i^0	X_i^1	X_i^2	X_i^3	X_i^4	y_i	$X_i y_i$	$X_i^2 y_i$
I	I	I	I	I	I	0,5	0,5	0,5
2	I	2	4	8	I6	0,5	I	2
3	I	3	9	27	8I	I	3	9
4	I	4	I6	64	256	2	8	32
5	I	5	26	I25	625	3	I5	75
6	I	6	36	2I6	I296	5	30	I80
7	I	7	49	343	240I	8	56	392
$\sum$	7	28	I40	784	4676	20	II3,5	690,5

В соответствии с этой таблицей система уравнений (7) примет вид

$$\begin{cases} 7b_0 + 28b_1 + 140b_2 = 20; \\ 28b_0 + 140b_1 + 784b_2 = 113{,}5; \\ 140b_0 + 784b_1 + 4676b_2 = 690.5. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим

$$b_0 = -1{,}234; \qquad b_1 = 0{,}796; \qquad b_2 = 0{,}046.$$

Следовательно, искомый полином будет

$$y = -1{,}234 + 0{,}796X + 0{,}046X^2 .$$

Пример 3

Результаты эксперимента представлены в таблице.

i	X_1	X_2	y
I	0	0	I0
2	0	I	I7
3	0	2	20
4	I	0	I4
5	2	0	I8
6	I	I	24
7	2	2	40
8	0	-I	3
9	-I	-I	3

Здесь число независимых переменных (факторов) $K = 2$. Количество опытов (измерений) $n = 9$. Пусть моделью, описывающей зависимость между x и y служит полином первой степени $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$.

Найдем оценки b_0, b_1, b_2 параметров β_0, β_1, β_2.

Р е ш е н и е

Составим матрицу X наблюдений и транспонированную матрицу X':

$$X = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X_0 & X_1 & X_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}; \quad X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$X'X = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 4 \\ 5 & 11 & 7 \\ 4 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Вычислим $(X'X)^{-1}$:

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{628}\begin{pmatrix} 96 & -36 & -14 \\ -36 & 92 & -34 \\ -14 & -34 & 74 \end{pmatrix}.$$

Далее запишем матрицу Y и найдем произведение $X'Y$:

$$Y = \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \\ 20 \\ 14 \\ 18 \\ 24 \\ 40 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}; \qquad X'Y = \begin{pmatrix} 149 \\ 151 \\ 155 \end{pmatrix}.$$

И, наконец,

$$b = (X'X)^{-1}X'Y = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10,65 \\ 5,2 \\ 6,8 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $b_0 = 10,65$; $b_1 = 5,2$; $b_2 = 6,8$ и искомое уравнение есть

$$y = 10,65 + 5,2\,X_1 + 6,8\,X_2.$$

Пример 4

В результате эксперимента получены данные:

X	5	3	24	35	44	55	63	74	82	95
y	I8	I2	8	8	8	8	7	6	8	8

Пусть моделью, описывающей зависимость между X и y служит уравнение гиперболы $y=\beta_0+\beta_1\frac{1}{X}$. Найдем МНК-оценки параметров β_0, β_1.

Р е ш е н и е

Система (4) для данного случая примет вид

$$\begin{cases} n b_0 + b_1 \sum_i \frac{1}{X_i} = \sum_i y_i ; \\ b_0 \sum_i \frac{1}{X_i} + b_1 \sum_i \left(\frac{1}{X_i}\right)^2 = \sum_i y_i \frac{1}{X_i} . \end{cases}$$

Произведем замену переменных $\frac{1}{X} = X_1$, получим следующую систему:

$$\begin{cases} n b_0 + b_1 \sum_i X_{1i} = \sum_i y_i ; \\ b_0 \sum_i X_{1i} + b_1 \sum_i X_{1i}^2 = \sum_i y_i X_{1i} . \end{cases} \qquad (I0)$$

Для определения параметров гиперболы строим расчетную таблицу

i	X_i	$X_{1i}^0=\left(\frac{1}{X_i}\right)^0$	$X_{1i}=\frac{1}{X_i}$	X_{1i}^2	y_i	$X_{1i} y_i$
I	5	I	0,2000	0,0400	I8	3,6000
2	3	I	0,3333	0,IIII	I2	3,9996
3	24	I	0,04I7	0,00I7	8	0,3336
4	35	I	0,0286	0,0008	8	0,2288
5	44	I	0,0227	0,0005	8	0,I8I6
6	55	I	0,0I82	0,0003	8	0,I456
7	63	I	0,0I59	0,0002	7	0,III3
8	74	I	0,0I35	0,0002	6	0,08I0
9	82	I	0,0I22	0,000I	8	0,0976
I0	95	I	0,0I05	0,000I	8	0,0840
Σ		I0	0,6966	0,I550	9I	8,863I

1792

Подставим значения фактических данных в систему (I0), получим:

$$\begin{cases} 10 b_0 + 0,6966 b_1 = 91 ; \\ 0,6966 b_0 + 0,1550 b_1 = 8,8631 . \end{cases}$$

Решая последнюю систему, будем иметь: $b_0 = 7{,}448$, $b_1 = 23{,}7$.
Уравнение гиперболы будет иметь вид

$$y = 7{,}448 + 23{,}7\frac{1}{x}$$

Пример 5

Результаты эксперимента представлены в таблице.

x	1,01	4,0	1,2	2,2	1,7	12,0	2,0	3,1	10,0	10,4	16,6	9,8	3,5	4,7	18,8	20,3
y	0,05	0,07	4,3	7,7	28,0	29,0	39,0	40,0	42,0	67,0	85,0	109,0	119,0	121,0	123,0	170,0

Пусть зависимость между x и y выражается степенной функцией

$$y = \beta_0 x^{\beta_1}.$$

Найти МНК-оценки параметров β_0, β_1.

Р е ш е н и е

Для определения параметров произведем логарифмирование степенной функции

$$\lg y = \lg\beta_0 + \beta_1 \lg x.$$

Введем обозначения: $Y = \lg y$; $B_0 = \lg\beta_0$; $B_1 = \beta_1$; $X = \lg x$.

В этих новых обозначениях будем иметь $Y = B_0 + B_1 X$.

Оценки b_0, b_1 для неизвестных параметров B_0 и B_1 найдем из системы

$$\begin{cases} n b_0 + b_1 \sum X_i = \sum Y_i; \\ b_0 \sum X_i + b_1 \sum X_i^2 = \sum X_i Y_i, \end{cases} \tag{II}$$

где $X_i = \lg x_i$; $Y_i = \lg y_i$. Для решения системы составляем расчетную таблицу:

i	x_i	y_i	$\lg x_i = X_i$	$\lg y_i = Y_i$	$X_i Y_i$	X_i^2
1	1,01	0,05	0,0043	−1,3010	−0,0056	0,00002
2	4,0	0,07	0,6021	−0,1549	−0,0933	0,3620
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
16	20,3	170,0	1,3075	2,2304	2,9163	1,7076
Σ			11,1562	22,0416	19,8959	10,549

Подставим полученные данные в систему (II):

$$\mathrm{I6}\, b_0 + \mathrm{II{,}I56}\, b_1 = 22{,}04\mathrm{I6};$$
$$\mathrm{II{,}I56}\, b_0 + \mathrm{I0{,}549}\, b_1 = \mathrm{I9{,}8959}.$$

Решая последнюю систему, будем иметь $b_0 = 0{,}24$; $b_1 = \mathrm{I{,}633}$.
Следовательно, $\lg y = 0{,}24 + \mathrm{I{,}633} \lg x$.

ЗАДАНИЕ

Данные опыта приведены в таблицах. Полагая, что x и y связаны данной функцией, найти параметры этой функции методом наименьших квадратов.

I.

x	54	63	74	90	II2	I40	I90
y	8	I0	II	I3	I5	I7	I9

; $y = \beta_0 + \beta_1 x$.

2.

x	29,0	38,0	46,0	54,0	62,0	70,0	79,0	97,3
y	3,6	5,83	6,0	7,90	8,03	I0,98	I3,87	I5,50

; $y = \beta_0 + \beta_1 x$.

3.

x	I	3	4	2	5	7	8	6
y	80	90	I20	I00	II0	I50	I60	I30

; $y = \beta_0 + \beta_1 x$.

4.

x	6,3	6,0	7,5	8,5	3,5	6,2	7,5	8,7	6,0	3,7
y	5	4	6	7	3	4	6	7	4	3

; $y = \beta_0 + \beta_1 x$.

5.

x	2,0	3,5	4,0	4,5	5,5	6,0
y	I,9	I,7	I,8	I,6	I,5	I,4

; $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$

6.

x	5,0	6,0	6,5	7,0	8,0
y	25	28	3I	35	40

; $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$.

7.

x	2	3	4	4	5	6	6	6	7	8	9	I0	I2	I3	I4
y	8	I0	7	6	5	5	4	3	4	5	3	2	I	I	2

; $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$.

8.

x	40	55	64	75	82	94	104	110	115	120
y	2,8	4,3	4,6	4,9	5,6	6,4	7,7	7,9	10,2	9,8

$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$.

9.

x	7	10	15	20	30	45	60	120
y	10	9	7,5	6,0	6,3	5,8	5,4	5,0

; $y = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{x}$.

10.

x	54	63	74	90	112	140	190
y	0,15	0,20	0,35	0,55	0,95	1,40	1,60

; $y = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{x}$.

11.

x	1,0	0,5	0,07	0,3	0,25	0,34	0,13	0,08	0,22	0,58
y	1,6	1,0	8,5	5,0	4,4	2,0	6,0	7,5	3,8	1,4

; $y = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{x}$.

12.

x	54	63	74	90	112	140	190
y	0,50	0,70	0,80	1,00	1,40	2,20	2,50

; $y = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{x}$.

13.

x	152	116	100	108	129	141	147	156	156	163
y	47,6	34,8	31,6	32,6	38,2	42,1	45,0	47,3	47,4	49,0

;

x	170	178	187
y	51,5	53,2	55,6

; $y = \beta_0 x^{\beta_1}$.

14.

x	2	4	6	8	10
y	4,5	7,0	8,0	7,5	9,0

; $y = \beta_0 + \beta_1 x$.

15.

x	0	4	10	15	21	29	36	51	68
y	66,7	71,0	76,3	80,6	85,7	92,9	99,4	113,6	125,1

; $y = \beta_0 + \beta_1 x$.

16.

x	0	2	4	6	8	10
y	5	-1	0,5	1,5	4,5	8,5

; $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$.

I7.

x	0	7	I2	I7	22	27	32	37
y	I00	87,3	72,9	63,2	54,7	47,5	4I,3	36,3

, $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$.

I8.

x	I2,I	II,2	9,8	I0,4	9,2	8,5	8,8	7,4	6,6
y	I0,5	9,3	8,3	9,6	8,6	7,I	6,9	5,8	5,2

x	7,0	6,4	6,0	6,5	5,8	5,4
y	5,0	5,I	4,6	5,0	4,4	3,9

; $y = \beta_0 + \beta_1 x$.

I9.

x	I	2	3	5	I0	20	30	50
y	I0,I5	5,52	4,08	2,85	2,II	I,62	I,4I	I,30

x	I00	200
y	I,2I	I,I5

; $y = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{x}$.

20.

x	5	I0	20	40	60
y	5I,33	78,00	I44,3	263,6	375,2

; $y = \beta_0 + \beta_1 x$.

2I.

x	-3	-2	-I	0	I	2	3
y	-0,7I	-0,0I	0,5I	0,82	0,88	0,8I	0,49

; $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$.

22.

x	4I	50	8I	I04	I20	I39	I54	I80	208	24I	250	269	30I
y	4	8	I0	I4	I6	20	I9	23	26	30	3I	36	37

; $y = \beta_0 + \beta_1 x$.

23.

x	54	63	74	90	II2	I40	I90
y	8	I2	I3	I4	I6	I5	I4

; $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$.

24.

i	x_1	x_2	y
I	90	I	25
2	II0	I	28
3	I20	2	3I
4	I30	2	32
5	I80	3	36
6	200	3	42
7	280	4	55

;

$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$.

25.

i	x_1	x_2	y
I	90	I	8
2	II0	I	I0
3	I20	2	I5
4	I30	2	I8
5	I80	3	22
6	200	3	30
7	280	4	40

;

$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$.

Составитель Леонтий Николаевич П р о к о ф ь е в

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Редактор А.П.З а х а р д я е в а
Техн.редактор Н.М.К а л е н ю к
Корректор Н.Д.Ч а й н и к о в а

Подписано в печать II.I2.89. Формат 60x84 I/I6.
Бумага оберточная белая. Печать офсетная.
Усл.п.л. 0,93. Уч.-изд.л. 0,8. Тираж 300 экз.
Заказ № 1792. Бесплатно.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени авиационный институт имени академика С.П.Королева. 443086 Куйбышев, Московское шоссе, 34.

Типография имени В.П.Мяги Куйбышевского полиграфического объединения 443099 Куйбышев, ул.Венцека, 60.