МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КУЙБЫШЕВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ имени С. П. КОРОЛЕВА

МАТЕМАТИКА

Тождественные преобразования тригонометрических выражений

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

КУЙБЫШЕВ 1981

УДК 514 (075)

Настоящие методические указания предназначаются для слушателей подготовительного отделения и имеют цель всесторонне подготовить их как к выпускным экзаменам, так и для дальнейшей учебы в Куйбышевском авиационном институте. Указания составлены в соответствии с программой по математике для подготовительного отделения и содержат обширный перечень упражнений по данному разделу.

Составитель Н. В. Новикова

Отв. редактор д. т. н. проф. М. Н. Шафеев

Рецензенты: к. т. н. доцент Е. Г. Соколов, к. т. н. доцент А. В. Зинченко, ассистент И. А. Сапожникова

Рассмотрены и утверждены редакционно-издательским советом института 12.12.80 г.

1. ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

Тождеством называется равенство двух функций, справедливое при всех допустимых значениях аргумента, т. е. при всех тех значениях аргумента, при которых левая и правая части (каждая) имеют смысл.

Это же определение распространяется на тригонометрические тождества. Так, например, равенство $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1$ выполняется при всех значениях α, при которых $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ оба имеют смысл, т. е. при всех $\alpha \neq n\frac{\pi}{2}$, где $n \in Z$.

Любые тождества, в частности тригонометрические, доказывают следующими способами:

1) выражение, стоящее в одной части равенства, с помощью тождественных преобразований приводят к выражению, стоящему в другой части равенства;

2) выражения, стоящие в левой и правой частях тождества, с помощью тождественных преобразований приводят к одному и тому же виду;

3) доказывают, что разность между левой и правой частями данного тождества равна нулю.

К основным тригонометрическим тождествам относятся соотношения, выражающие зависимость между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1, \quad (1)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad (2)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \quad (3)$$

Из выражений (1)—(3), как следствия, вытекают еще три:

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1, \quad (4)$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad (5)$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}. \quad (6)$$

Используя основные тригонометрические и общие правила действий над алгебраическими выражениями, можно производить тождественные преобразования выражений, содержащих тригонометрические функции, доказывать различные прочие тригонометрические тождества, а также вычислять значения тригонометрических функций по значению одной из них.

Рассмотрим примеры, в которых требуется упростить выражения.

Пример 1.

$$A = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} + \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{\sin x} + \frac{3\cos x}{\operatorname{tg} x} + 3\sin x.$$

Установим область допустимых значений аргумента (ОДЗ). Достаточно потребовать, чтобы $\cos x$ и $\sin x$ были отличны от нуля:

$$\cos x \neq 0 => x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n_1 \ (n_1 \in Z);$$

$$\sin x \neq 0 => x \neq \pi n_2 \ (n_2 \in Z).$$

Отсюда следует, что $x \neq \frac{\pi}{2} n \ (n \in Z)$.

Выполним тождественные преобразования над выражением A, применив формулы (2) и (3):

$$A = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} + \frac{3\cos^2 x}{\sin x} + 3\sin x,$$

затем приведем к общему знаменателю и, сгруппировав два последних члена, вынесем за скобки $3\cos^2 x \sin^2 x$:

$$A = \frac{\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x + 3\cos^4 x\sin^2 x + 3\sin^4 x\cos^2 x}{\cos^2 x\sin^3 x} =$$

$$= \frac{\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x + 3\cos^2 x\sin^2 x(\cos^2 x + \sin^2 x)}{\cos^2 x\sin^3 x}.$$

Выражение в скобках, согласно формуле (1), равно 1. Тогда

$$A = \frac{\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x + 3\cos^2 x\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^3 x} =$$

$$= \frac{\sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^2 x\sin^3 x}.$$

Числитель дроби теперь представляет собой квадрат суммы $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$, т. е.

$$A = \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\cos^2 x\sin^3 x} = \frac{1}{\cos^2 x\sin^3 x}.$$

Пример 2.

$$B = \sqrt{\frac{2}{1+\sin\alpha} + \frac{2}{1-\sin\alpha}}.$$

$$\text{ОДЗ}: \sin\alpha \neq \pm 1 => \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n \ (n \in Z).$$

Выполним преобразования под корнем, приведя к общему знаменателю,

$$B = \sqrt{\frac{2(1-\sin\alpha) + 2(1+\sin\alpha)}{1-\sin^2\alpha}} = \sqrt{\frac{4}{1-\sin^2\alpha}}.$$

Из формулы (1) следует, что $1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$, тогда

$$B=\frac{2}{\sqrt{\cos^2\alpha}}=\frac{2}{|\cos\alpha|}.$$

Замечание. Под $\sqrt{\cos^2\alpha}$ подразумевается арифметическое значение корня, а по его определению $\sqrt{a^2}=|a|$.

Пример 3.

$$C=\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha.$$

$$\text{ОДЗ}: \alpha\neq\frac{\pi}{2}n\ (n\in Z).$$

Из формулы (1) следует, что $1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$ и $1-\cos^2\alpha=$ $=\sin^2\alpha$. Затем, применяя формулы (4), (3) и (6), получим

$$C=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+1=\operatorname{ctg}^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Рассмотрим примеры, в которых требуется доказать тождества.

Пример 4. $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1=-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

Покажем, что разность между левой и правой частями данного тождества равна нулю. Имеем

$$(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1)-(-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha)=$$
$$=(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha)-1=$$
$$=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-1=1-1=0.$$

Тем самым тождество доказано.

Пример 5. $|\sin\alpha|=\sqrt{\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}}$.

Это тождество будем доказывать путем преобразования выражения, стоящего в правой части, применяя формулы (2) и (3), затем (1):

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}}=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{1}{\cos\alpha\sin\alpha}}=\sin^2\alpha.$$

Поэтому

$$\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}}=\sqrt{\sin^2\alpha}=|\sin\alpha|.$$

Следует обратить внимание на то, что левая часть доказанного тождества $|\sin\alpha|$ определена при всех значениях α, а правая — лишь при $\alpha\neq\frac{\pi}{2}n\ (n\in Z)$.

Поэтому только при всех допустимых значениях α

$$\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}}=|\sin\alpha|.$$

Пример 6. $\dfrac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+1}{\operatorname{tg}\alpha-1}$.

Преобразуем левую часть, заменив 1 в числителе, согласно формуле (1), суммой $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$. Имеем последовательно:

$$\frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha)}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}.$$

Разделим числитель и знаменатель полученной дроби на $\cos\alpha$, это возможно сделать, так как $\cos\alpha\neq0$, в противном случае не существовал бы $\operatorname{tg}\alpha$, входящий в правую часть тождества:

$$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+1}{\operatorname{tg}\alpha-1}.$$

Итак, получилось то же выражение, которое находится в правой части тождества, что и требовалось доказать.

Рассмотрим примеры, в которых требуется вычислить значения тригонометрических функций по значению одной из них.

Пример 1. Пусть $\sin\alpha=-\dfrac{4}{5}$ и угол α принадлежит III четверти. Найти $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$.

Решение. В III четверти $\cos\alpha$ отрицательный, поэтому из формулы (1) определяем $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}$,

т. е. $$\cos\alpha=-\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}.$$

По формуле (2) имеем $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{4}{5}:\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{3}.$$

Пример 2. Дано: $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{21}{20}$ и $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Найти $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

Решение. Так как α принадлежит II четверти, где $\cos\alpha<$ <0, то по формуле (5) имеем

$$\frac{1}{\cos\alpha}=-\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}},$$

т. е. $$\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{1+\left(-\frac{21}{20}\right)^2}}=-\frac{20}{29}.$$

Из формулы (2) следует, что $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha\cos\alpha$, поэтому

$$\sin\alpha = -\frac{21}{20}\left(-\frac{20}{29}\right) = \frac{21}{29}.$$

Пример 3. Найти $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, где $a>0$, $b>0$.

Решение. По условию $\sin\alpha>0$, следовательно, α принадлежит либо I, либо II четверти. Поэтому $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ могут быть и положительными, и отрицательными.

1-й случай. Если α — угол I четверти, то $\cos\alpha>0$ и $\operatorname{tg}\alpha>0$, поэтому

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{a^2}{a^2+b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} : \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{b}.$$

2-й случай. Если α — угол II четверти, то $\cos\alpha<0$ и $\operatorname{tg}\alpha<0$, а именно:

$$\cos\alpha = -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{a}{b}.$$

ЗАДАНИЕ № 1

Упростить следующие выражения:

1. $\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha+\cos\alpha$. Ответ: $2\cos\alpha$.
2. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha$. Ответ: $\frac{1}{\cos^2\alpha}$.
3. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$. Ответ: $\frac{1}{\sin^2\alpha}$.
4. $1-\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha$. Ответ: $\sin^2\alpha$.
5. $(1+\cos\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha(1-\cos\alpha)$. Ответ: $\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}$.
6. $\frac{1}{\cos^2\alpha}-\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha$. Ответ: $\cos^2\alpha$.
7. $1-\sin^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha\sin^2\alpha$. Ответ: $2\cos^2\alpha$.
8. $(1+\operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha$. Ответ: 1
9. $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$. Ответ: $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$.
10. $\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}$ Ответ: $-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$.
11. $\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\operatorname{ctg}\beta$. Ответ: $\operatorname{tg}\alpha$.

12. $\dfrac{\sin\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta} - \operatorname{ctg}\beta \operatorname{tg}\alpha + 1$. Ответ: $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

13. $\sin^2\alpha - \sin^2\beta - \cos^2\beta - \cos^2\alpha$. Ответ: $-2\cos^2\alpha$.

14. $1 + \operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha(\cos^2\alpha + 1)$ Ответ: $\cos^2\alpha$.

15. $(1 - \sin^2\alpha)\operatorname{ctg}^2\alpha - 1 - \operatorname{ctg}^2\alpha$. Ответ: $-(1 + \cos^2\alpha)$.

16. $\dfrac{\sin^2\beta}{1 + \cos\beta}$. Ответ: $1 - \cos\beta$.

17. $\dfrac{\cos^2\beta}{\sin\beta - 1}$. Ответ: $-(1 + \sin\beta)$.

18. $\dfrac{2\cos^2\alpha - 1}{\sin\alpha + \cos\alpha}$. Ответ: $\cos\alpha - \sin\alpha$.

19. $\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\left[1 + \dfrac{(1-\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}\right]$. Ответ: $\dfrac{2}{\sin\alpha}$.

20. $\dfrac{\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha}$. Ответ: $\operatorname{ctg}^6\alpha$.

21. $\dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin^2\alpha \sin^2\beta} - \operatorname{ctg}^2\alpha \operatorname{ctg}^2\beta$. Ответ: -1.

22. $\operatorname{tg}\alpha + \dfrac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha}$. Ответ: $\dfrac{1}{\cos\alpha}$.

23. $\operatorname{ctg}\alpha - \dfrac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha}$. Ответ: $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{1 + \sin\alpha}$.

24. $\sqrt{\sin^2\alpha(1 + \operatorname{ctg}\alpha) + \cos^2\alpha(1 + \operatorname{tg}\alpha)}$. Ответ: $|\sin\alpha + \cos\alpha|$.

25. $\dfrac{\cos\alpha \operatorname{tg}\alpha}{\sin^2\alpha} - \operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha$. Ответ: $\sin\alpha$.

26. $\sin^4\beta - \cos^4\beta + \cos^2\beta$. Ответ: $\sin^2\beta$.

27. $\sin^2\beta + \cos^4\beta - \sin^4\beta$. Ответ: $\cos^2\beta$.

28. $\cos^4\beta + \sin^2\beta\cos^2\beta + \sin^2\beta$. Ответ: 1.

Доказать следующие тождества:

29. $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$.

30. $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$.

31. $\cos^4\alpha + \sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1$.

32. $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)^2 = 4$.

33. $3(\sin^4\beta + \cos^4\beta) - 2(\sin^6\beta + \cos^6\beta) = 1$.

34. $(1 - \operatorname{ctg}\alpha)^2 + (1 + \operatorname{ctg}\alpha)^2 = \dfrac{2}{\sin^2\alpha}$.

35. $\dfrac{1 - \sin^2\alpha}{1 - \cos^2\alpha} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}$.

36. $\dfrac{1 - \cos^2\alpha}{1 - \sin^2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

37. $\sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}} - \sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} = 2\operatorname{ctg}\alpha,\ 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

38. $\dfrac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = \dfrac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}$.

39. $\dfrac{1 + \operatorname{tg}^4 \beta}{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha$.

40. $\dfrac{1 - \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{\cos^4 \alpha} = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha$.

41. $\sqrt{\dfrac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \dfrac{1 + \cos \alpha}{|\sin \alpha|}$.

42. $\sqrt{\dfrac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}} = \dfrac{|\cos \alpha|}{1 + \sin \alpha}$.

43. $\dfrac{1}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \dfrac{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha}$.

44. $\dfrac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \dfrac{\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

45. $\dfrac{\cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha}{1 + \sin \alpha \cos \alpha} = \cos \alpha - \sin \alpha$.

46. $(\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha)(\cos \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) = (1 + \sin \alpha)(1 + \cos \alpha)$.

47. $\sin^3 \alpha (1 + \operatorname{ctg} \alpha) + \cos^3 \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha) = \sin \alpha + \cos \alpha$.

48. $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$.

49. $1 + \dfrac{2}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2$.

50. $\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha$.

51. $\dfrac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \dfrac{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha} - \operatorname{tg}^2 \alpha = 0$.

52. $\operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha \cos^2 \alpha$.

53. $\dfrac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \dfrac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \dfrac{2}{\sin \alpha}$.

54. $\dfrac{\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha} = \sin^2 \alpha$.

55. $\dfrac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$.

56. $\sqrt{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = |\sin \alpha + \cos \alpha|$.

57. $|\sin \alpha| = \sqrt{(\sec^2 \alpha - 1)(1 - \sin^2 \alpha)}$.

58. $\dfrac{2 \cos^2 \alpha - 1}{1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha} - \dfrac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \dfrac{4 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

59. $\dfrac{1 - 2 \sin^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha - 1} = 1$.

60. $\dfrac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \sin \alpha \cos \alpha} = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha$.

61. $\dfrac{2 \sin^2 \alpha - 1}{1 - 2 \cos^2 \alpha} - \dfrac{\cos^2 \alpha - 1}{1 - \sin^2 \alpha} = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$.

62. $\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\mathrm{tg}^2\alpha-1}=\sin\alpha+\cos\alpha.$

63. $\frac{1+\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha}=\mathrm{tg}^2\alpha.$

64. $\frac{1-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=1-2\sin\alpha\cos\alpha.$

65. $\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+\cos^4\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+\sin^4\alpha}=\mathrm{tg}^4\alpha.$

ЗАДАНИЕ № 2

1. По значению одной из тригонометрических функций найти значения остальных тригонометрических функций:

а) $\sin\alpha=0{,}6,\quad 0°<\alpha<90°.$

Ответ: $\cos\alpha=0{,}8;\quad \mathrm{tg}\,\alpha=0{,}75.$

б) $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{3},\quad \pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi.$

Ответ: $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{7}}{3};\quad \mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\sqrt{14}}{7};$

в) $\cos\alpha=\frac{12}{13},\quad \frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi.$

Ответ: $\sin\alpha=-\frac{5}{13};\quad \mathrm{tg}\,\alpha=-\frac{5}{12}.$

г) $\cos\alpha=-0{,}8,\quad 180°<\alpha<270°.$

Ответ: $\sin\alpha=-0{,}6;\quad \mathrm{tg}\,\alpha=0{,}75.$

д) $\mathrm{tg}\,\alpha=-2,\quad \frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi.$

Ответ: $\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5};\quad \cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}.$

е) $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{1}{3},\quad 180°<\alpha<270°.$

Ответ: $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{10}}{10};\quad \cos\alpha=-\frac{3\sqrt{10}}{10}.$

ж) $\mathrm{ctg}\,\alpha=1,\quad 180°<\alpha<270°.$

Ответ: $\sin\alpha=\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$

з) $\mathrm{ctg}\,\alpha=-\sqrt{3}.\quad \frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi.$

Ответ: $\sin\alpha=-\frac{1}{2};\quad \cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

и) $\mathrm{tg}\,\alpha=-1,\quad 90°<\alpha<180°.$

Ответ: $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

к) $\sin\alpha = -\frac{9}{41}$, $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$.

Ответ: $\cos\alpha = \frac{40}{41}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{9}{40}$.

л) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$.

Ответ: $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$; $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$.

2. $\sin\alpha = -\frac{7}{25}$, $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$. Вычислить $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$.

Ответ: $\cos\alpha = \frac{24}{25}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{7}{24}$.

3. $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$, $3\pi < \alpha < 3{,}5\pi$. Найти $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

Ответ: $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}$; $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. Найти $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = 1 + a$ и $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Какие значения может принимать параметр a?

Ответ: $\cos\alpha = \sqrt{-a(a+2)}$; $-2 \leqslant a \leqslant 0$.

5. Найти $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{m^2}{n^2}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\sin\alpha = \frac{n^2}{\sqrt{m^4 + n^4}}$;

$$\cos\alpha = \frac{m^2}{\sqrt{m^4 + n^4}}.$$

6. Зная, что $\sin\alpha = \frac{a}{b}$, где $0 < a < b$ и $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, найти значения остальных тригонометрических функций.

Ответ: $\cos\alpha = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$;

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}}.$$

7. Зная, что $\sin\alpha < 0$ и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a^2}{b^2}$, найти значения остальных тригонометрических функций угла α. Какие значения могут принимать параметры a и b?

Ответ: $\sin\alpha = -\frac{a^2}{\sqrt{a^4 + b^4}}$;

$$\cos\alpha = -\frac{b^2}{\sqrt{a^4 + b^4}}, \quad a \neq 0, \ b \neq 0.$$

8. Найти $\cos\varphi$ и $\operatorname{tg}\varphi$, если $\sin\varphi = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$ $(a > b > 0)$ и угол φ оканчивается не в I четверти.

Ответ: $\cos\varphi = \frac{b-a}{a+b}$; $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sqrt{ab}}{b-a}$.

9. Найти значения тригонометрических функций угла φ, если $\operatorname{tg}\varphi = a^2 - 1$ $(|a| \leqslant 1)$ и угол φ оканчивается не во II четверти.

Ответ: $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{a^4 - 2a^2 + 1}}$;

$\sin\varphi = \frac{a^2 - 1}{\sqrt{a^4 - 2a^2 + 1}}$.

10. Найти значение выражения $\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$, если $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ и $0° < \alpha < 90°$.

Указание. Решить двумя способами:

а) зная $\sin\alpha$, найти $\operatorname{tg}\alpha$;

б) упростить данное выражение, заменяя $\operatorname{tg}\alpha$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

Ответ: 7.

11. Найти значение выражения $\frac{2\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - 3\sin\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -2$, и $90° < \alpha < 180°$.

Указание. Решить двумя способами:

а) зная $\operatorname{tg}\alpha$, найти значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$;

б) упростить данное выражение, разделив числитель и знаменатель на $\cos\alpha$. Имеем ли право в данном случае делить на $\cos\alpha$ и почему?

Ответ: $-\frac{3}{7}$.

12. Найти значение выражения $\operatorname{ctg}\alpha - \cos\alpha$, если

$$\sin\alpha = \frac{3}{4} \text{ и } \pi > \alpha > \frac{\pi}{2}.$$

Ответ: $-\frac{\sqrt{7}}{12}$.

13. Найти значение выражения $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha$, если

$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $270° > \alpha > 180°$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

14. Вычислить следующие выражения:

а) $\frac{1+\cos\alpha+\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$, если $\frac{\pi}{2} < \alpha \leqslant \pi$, $\sin\alpha = \frac{5}{13}$;

б) $\dfrac{2\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=3$.

Ответ: а) $\dfrac{6}{25}$; б) $\dfrac{11}{4}$.

15. Известно, что $\sin\alpha+\cos\alpha=m$.
Найти:

а) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$;

б) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$.

Ответ: а) $\dfrac{m}{2}(3-m^2)$;

б) $\dfrac{1+2m^2-m^4}{2}$.

2. ЧЕТНОСТЬ, НЕЧЕТНОСТЬ И ПЕРИОДИЧНОСТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Определение 1. Функция f называется четной, если для любых противоположных значений аргумента из области определения f значения функции равны, т. е.

$$f(-x)=f(x).$$

Например, функции $y=x^2$, $y=\dfrac{1}{x^4+1}$ четные, так как $(-x)^2=x^2$ и $\dfrac{1}{(-x)^4+1}=\dfrac{1}{x^4+1}$.

Из тригонометрических функций — функция косинус четная, т. е. $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$.

Определение 2. Функция f называется нечетной, если для любых противоположных значений аргумента из области определения f значения функции противоположны, т. е. $f(-x)=-f(x)$.

Например, функции $y=x^3$, $y=\dfrac{1}{x}$ нечетные, так как

$(-x)^3=-x^3$ и $\dfrac{1}{-x}=-\dfrac{1}{x}$.

Из тригонометрических функций — функции синус, тангенс и котангенс нечетные, т. е.

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha,$$
$$\operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

Определение 3. Функция f называется периодической, если для нее существует такое число $l\neq0$, что при любом x из области определения выполняется равенство $f(x\pm l)=f(x)$.

Это определение предполагает, что значения $x \pm l$ принадлежат области определения функции f. Число l называют периодом функции f. Из определения следует, что если l — период функции f, то любое число ln, где $n \in Z$, тоже период f. Обычно отыскивается наименьший положительный период l_0, который кратко тоже называют периодом.

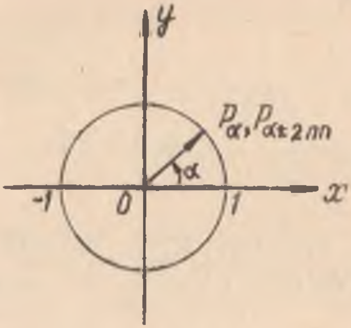

Рис. 1

Тригонометрические функции синус, косинус, тангенс и котангенс являются периодическими. Это следует из того, что аргументы α, $\alpha \pm 2\pi n$ (рис. 1) изображаются одной и той же точкой единичной окружности. Следовательно, значения тригонометрических функций при $\alpha \pm 2\pi n$ будут такими же, как при аргументе α, т. е.

$$\sin(\alpha \pm 2\pi n) = \sin \alpha;$$
$$\cos(\alpha \pm 2\pi n) = \cos \alpha;$$
$$\operatorname{tg}(\alpha \pm 2\pi n) = \operatorname{tg} \alpha;$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm 2\pi n) = \operatorname{ctg} \alpha.$$

Таким образом, 2π является общим периодом всех тригонометрических функций и наименьшим положительным периодом функций синуса и косинуса.

Для функций тангенса и котангенса наименьшим положительным периодом является число π, т. е.

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \pi n) = \operatorname{tg} \alpha,$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \pi n) = \operatorname{ctg} \alpha.$$

Рассмотрим следующие примеры.

Пример 1. Найти наименьший положительный период следующих функций:

$2 \sin x$. Так как $\sin x$ имеет наименьший положительный период 2π, то $2 \sin x = 2 \sin(x + 2\pi)$, т. е. 2π является наименьшим положительным периодом функции $2 \sin x$.

$\cos 4x$. Так как функция косинус имеет наименьший положительный период 2π, то $\cos 4x = \cos(4x + 2\pi) = \cos 4\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Отсюда видно, что значение функции $\cos 4x$ не изменилось от прибавления к аргументу x числа $\frac{\pi}{2}$, следовательно, наименьший положительный период функции $\cos 4x$ будет $\frac{\pi}{2}$.

Пример 2. Определить, какие функции являются четными, нечетными и какие не являются ни четными, ни нечетными.

Sin $2x$. Заменив x на $-x$, будем иметь $\sin 2(-x) = \sin(-2x) = -\sin 2x$, т. е. получено значение, противоположное значению $\sin 2x$, это означает, что функция $\sin 2x$ нечетная.

$x^3 \operatorname{ctg} x$. Заменив x на $-x$, имеем $(-x)^3 \operatorname{ctg}(-x) = -x^3(-\operatorname{ctg} x) = x^3 \operatorname{ctg} x$, т. е. значение функции не изменилось, это означает, что функция $x^3 \operatorname{ctg} x$ четная.

$1 - \sin x$. Заменив x на $-x$, получим $1 + \sin x$, это значение не равно $1 - \sin x$ и не является ему противоположным, следовательно, данная функция не является ни четной, ни нечетной.

ЗАДАНИЕ № 3

Какие функции являются четными, нечетными и какие не являются ни четными, ни нечетными:

1. а) $\cos 2x$; б) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; в) $\operatorname{ctg} 3x$.

2. а) $\sin^3 x$; б) $\sin x + \cos x$; в) $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$.

3. а) $\frac{2\sin x}{1 + \cos x}$; б) $x^2 + \sin^2 x$; в) $\frac{x + \sin x}{x - \sin x}$.

4. а) $\frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg} 2x + \sin 2x}$; б) $\frac{x^2 + \cos x}{x^2 - \cos x}$; в) $\sin x \cos x$.

5. а) $|\sin x|$; б) $\frac{\sin x}{x}$; в) $\sin\frac{x}{2}$.

6. а) $\frac{1}{\cos x}$; б) $\frac{1}{\operatorname{tg} 2x}$; в) $x \cdot \sin x$.

7. а) $x \cdot \cos x$; б) $x^2 \operatorname{tg} x$; в) $|1 + \cos x|$.

8. а) $\sqrt{\sin x}$; б) $\sqrt{\cos x}$; в) $3^{\sin x}$.

9. а) $2^{\cos x}$; б) $2^{\operatorname{tg} x}$; в) $\frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} x}$.

10. а) $\sin 3x \cdot \cos 3x$; б) $\operatorname{tg} 2x \cdot \cos x$; в) $\sin 2x \cdot \operatorname{ctg} 5x$.

Определить наименьшие положительные периоды функций:

11. а) $\frac{\sin x}{2}$; б) $3\cos x$; в) $\frac{\cos x}{3}$.

12. а) $2 \operatorname{tg} x+1$; б) $\frac{1}{3} \operatorname{tg} x$; в) $2 \operatorname{ctg} x-1$.

13. а) $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x$; б) $\sin 2x$; в) $\sin \frac{x}{2}$.

14. а) $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$; б) $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$; в) $\cos \frac{x}{3}$.

15. а) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$; б) $2 \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$; в) $\frac{1}{\sin x}$.

16. а) $\operatorname{tg} 2x$; б) $\operatorname{tg} \frac{x}{3}$; в) $\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

17. а) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$; б) $\operatorname{ctg} 4x$; в) $\sin \frac{x}{2}+\operatorname{tg} x$.

18. а) $\sin(4\pi x+2)$; б) $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{3}$; в) $\frac{1}{\cos x}$.

19. а) $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$; б) $\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x$; в) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+1\right)$.

20. а) $\operatorname{tg}\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$; б) $3 \operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$; в) $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$.

21. а) $\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}$; б) $2 \sin 2x$; в) $\sin 3x$.

22. а) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$; б) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$; в) $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

23. а) $\cos \frac{x}{2}$; б) $\cos 2x$; в) $\cos 3x$.

Упростить выражения:

24. $a \sin(-30^\circ)-2a \cdot \operatorname{tg}(-45^\circ)+b \cos(-60^\circ)-b \operatorname{ctg}(-90^\circ)$.

25. $$\frac{\sin^3(-30^\circ)-2 \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)-1}{2-\operatorname{tg} 45^\circ+4 \cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)}.$$

26. $\left[2a \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]^3-4\left[a \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]^3+6 \operatorname{tg} 0$.

27. $5 \operatorname{tg} 0+2 \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)-3 \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+4 \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

28. $\sin \beta+\cos \alpha+\operatorname{tg} \alpha+\operatorname{ctg} \beta$ при $\alpha=-\frac{\pi}{3}$, $\beta=-\frac{\pi}{4}$.

29. $8 \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \cos \frac{\pi}{3}+\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

3. ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО И ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТОВ

К формулам сложения тригонометрических функций относятся формулы синуса, косинуса, тангенса суммы или разности двух аргументов:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta, \tag{7}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta, \tag{8}$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta, \tag{9}$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta, \tag{10}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \tag{11}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \tag{12}$$

Рассмотрим следующие примеры.

Пример 1. Вычислить $\cos 75°$.

$$\cos 75°=\cos(30°+45°)=\cos 30°\cos 45°-\sin 30°\sin 45°=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Пример 2. Вычислить $\sin(\alpha+\beta)$, если $\cos\alpha=-\frac{8}{17}$, $\cos\beta=\frac{4}{5}$, $\alpha\in$ III четверти, $\beta\in$ IV четверти.

Определим $\sin\alpha$ и $\sin\beta$ из формулы (1).

$$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{64}{289}}=-\frac{15}{17},$$

$$\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\sqrt{1-\frac{16}{25}}=-\frac{3}{5}.$$

Значения $\sin\alpha$ и $\sin\beta$ берем со знаком (—), так как функция синус в III и IV четвертях отрицательна. Тогда

$$\sin(\alpha+\beta)=-\frac{15}{17}\,\frac{4}{5}+\left(-\frac{8}{17}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{-60+24}{85}=-\frac{36}{85}.$$

Пример 3. Упростить выражение

$$\frac{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}=A.$$

$\cos(\alpha+\beta)$ и $\cos(\alpha-\beta)$ заменим по формулам (7) и (8).

$$A=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta-\sin\alpha\sin\beta}=1.$$

Пример 4. Вычислить:

$$B = \frac{\operatorname{tg} 13^\circ + \operatorname{tg} 47^\circ}{1 - \operatorname{tg} 13^\circ \operatorname{tg} 47^\circ}.$$

Применив формулу (11) справа налево, имеем

$$B = \operatorname{tg}(13^\circ + 47^\circ) = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}.$$

Пример 5. Доказать тождество:

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = 1.$$

ОДЗ:

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n_1,\ n_1 \in Z. \qquad \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n_2,\ n_2 \in Z. \qquad \alpha + \beta \neq \pi n_3,\ n_3 \in Z.$$

Из формулы (4) следует, что $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}$.

Подставим это выражение в левую часть тождества, применив формулу (11):

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)} = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta +$$

$$+ (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)\frac{1}{\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}} = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta +$$

$$+ (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)\frac{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + 1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = 1.$$

Получили, что левая часть равна правой. Значит, тождество доказано. С помощью формул (1)—(12) решаются задачи № 1—44.

Формулы двойного и половинного аргумента вытекают как следствия.

При $\alpha = \beta$ из формул (7), (9) и (11) получаем

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \tag{13}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \tag{14}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n,\ n \in Z. \tag{15}$$

Если в формуле (13) $\cos^2\alpha$ или $\sin^2\alpha$ заменить их значением из (1), то получим $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \Rightarrow$

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}. \tag{16}$$

Из (16) следует $\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$.

Аргумент, стоящий в левой части, в два раза меньше аргумента в правой части. Это означает, что

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}. \qquad (17)$$

Аналогично получаем $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 =>$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}. \qquad (18)$$

Отсюда следует, что $\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

или

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}. \qquad (19)$$

Формулы (16) и (18) носят название формул понижения степени тригонометрических функций синуса и косинуса.

Поделив (17) на (19), получим

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}. \qquad (20)$$

В формулах (17), (19) и (20) знак берется в зависимости от четверти, в которую попадает аргумент $\frac{\alpha}{2}$, и от знака искомой функции в этой четверти.

Пример 6. Вычислить $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ и $\operatorname{tg} 2\alpha$, если

$$\cos\alpha = -\frac{5}{13}, \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$$

Определим сначала $\sin\alpha$ с помощью формулы (1)

$$\sin\alpha = +\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

(знак плюс, так как $\alpha \in$ II четв.). $\sin\alpha = \sqrt{1-\frac{25}{169}} = \frac{12}{13}$.

С помощью формул (13) и (14), затем (2) определим:

$$\sin 2\alpha = 2\cdot\frac{12}{13}\left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{120}{169};$$

$$\cos 2\alpha = \frac{25}{169} - \frac{144}{169} = -\frac{119}{169};$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{120}{119}.$$

Пример 7. Упростить выражение $\cos 4\alpha + 2\sin^2 2\alpha$.

Из формулы (13) имеем $\cos 4\alpha = \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha$, подставим его в данное выражение и, применив формулу (1), получим

$$\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha + 2\sin^2 2\alpha = \cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha = 1.$$

С помощью формул (1)—(20) решаются задачи в № 45—92.

ЗАДАНИЕ № 4

Вычислить без таблиц:

1. $\cos 43^\circ \cos 17^\circ - \sin 43^\circ \sin 17^\circ$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

2. $\sin 56^\circ \cos 34^\circ + \cos 56^\circ \sin 34^\circ$.

Ответ: 1.

3. $\sin 57^\circ \cos 12^\circ - \cos 57^\circ \sin 12^\circ$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. $\sin 75^\circ$, $\operatorname{tg} 75^\circ$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; $2+\sqrt{3}$.

5. $\cos 105^\circ$, $\sin 105^\circ$.

Ответ: $\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

6. $\sin 7^\circ \cos 37^\circ - \cos 7^\circ \sin 37^\circ$.

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

7. $\sin 15^\circ \sin 45^\circ - \cos 45^\circ \cos 15^\circ$.

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

8. $\cos 75^\circ \cos 15^\circ - \sin 75^\circ \sin 15^\circ$.

Ответ: 0.

9. $\sin 22^\circ - \sin 50^\circ \cos 28^\circ + \cos 50^\circ \sin 28^\circ$.

Ответ: 0.

10. $\sin (10^\circ + \alpha) \cos (20^\circ - \alpha) + \cos (10^\circ + \alpha) \sin (20^\circ - \alpha)$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

11. $\cos (50^\circ + \alpha) \cos (10^\circ - \alpha) - \sin (50^\circ + \alpha) \sin (10^\circ - \alpha)$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

12. $\sin (\alpha + \beta)$, $\cos (\alpha + \beta)$, $\sin (\alpha - \beta)$, $\cos (\alpha - \beta)$, если

а) $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, $\cos \beta = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $-\frac{33}{65}$, $-\frac{56}{65}$, $\frac{63}{65}$, $-\frac{16}{65}$.

б) $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, $\sin \beta = \frac{12}{13}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

в) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $\sin\beta = -0,6$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\pi < \beta < \frac{3}{2}\pi$.

Ответ: $-\frac{63}{65}$, $\frac{16}{65}$, $-\frac{33}{65}$, $-\frac{56}{65}$.

г) $\sin\alpha = 0,6$, $\cos\beta = -\frac{7}{25}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\pi < \beta < \frac{3}{2}\pi$.

Ответ: $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $-\frac{117}{125}$, $-\frac{44}{125}$.

13. $\sin(45^0 + \alpha)$, если $\cos\alpha = -0,5$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$.

14. $\cos(60^0 - \alpha)$, если $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$, $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$.

Ответ: $\frac{5 - 12\sqrt{3}}{26}$.

15. а) $\operatorname{tg}(45^0 + \alpha)$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

Ответ: -3.

б) $\operatorname{tg}(60^0 - \alpha)$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{5\sqrt{3} - 6}{3}$.

16. а) $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha = 3$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}$.

Ответ: -7; 1.

б) $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$.

Ответ: $-\frac{11}{3}$; $-\frac{7}{9}$.

17. $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ и $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha = 0,5$; $\sin\beta = 0,6$; $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Ответ: 2; $-5,5$.

18. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$, если $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$, $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$.

Ответ: $-\frac{7}{17}$.

Упростить выражения:

19. $\frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}$.

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\beta$.

20. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)+\cos\alpha\sin\beta}$. Ответ: 1.

21. $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}$. Ответ: $-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$.

22. $\dfrac{\sin(45^\circ+\alpha)-\cos(45^\circ+\alpha)}{\sin(45^\circ+\alpha)+\cos(45^\circ+\alpha)}$. Ответ: $\operatorname{tg}\alpha$.

23. $\dfrac{\sin 11^\circ\cos 15^\circ+\cos 11^\circ\sin 15^\circ}{\sin 18^\circ\cos 12^\circ+\cos 18^\circ\sin 12^\circ}$. Ответ: $2\sin 26^0$.

24. $\dfrac{\cos 65^\circ\cos 40^\circ+\sin 65^\circ\sin 40^\circ}{\sin 37^\circ\cos 12^\circ-\cos 37^\circ\sin 12^\circ}$. Ответ: $\operatorname{ctg} 25^0$.

25. $\dfrac{\operatorname{tg} 20^\circ+\operatorname{tg} 5^\circ}{1-\operatorname{tg} 20^\circ\operatorname{tg} 5^\circ}$. Ответ: $\operatorname{tg} 25^0$.

26. $\dfrac{\operatorname{tg} 70^\circ-\operatorname{tg} 35^\circ}{\operatorname{tg} 70^\circ\operatorname{tg} 35^\circ+1}$. Ответ: $\operatorname{tg} 35^0$.

27. $\dfrac{\operatorname{tg} 27^\circ+\operatorname{tg} 18^\circ}{\operatorname{tg} 27^\circ\operatorname{tg} 18^\circ-1}$. Ответ: -1.

Доказать тождества:

28. $\cos(\alpha+45^0)-\cos(\alpha-45^0)=-\sqrt{2}\sin\alpha$.

29. $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta$.

30. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-2\sin\alpha\cos\beta}{2\sin\alpha\sin\beta+\cos(\alpha+\beta)}=\operatorname{tg}(\beta-\alpha)$.

31. $\dfrac{2\sin\alpha\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-2\sin\alpha\sin\beta}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

32. $\sin 15^0+\operatorname{tg} 30^0\cos 15^0=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

33. $\cos 40^0+\operatorname{tg}\alpha\sin 40^0=\dfrac{\cos(40^\circ-\alpha)}{\cos\alpha}$.

34. $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}=\cos\alpha\cos\beta$.

35. $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

36. $\dfrac{\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)}{2\sin^2\alpha\sin^2\beta}=\operatorname{ctg}^2\alpha\operatorname{ctg}^2\beta+1$.

37. $\frac{1}{2}(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha)=\sin(30^0+\alpha)$.

38. $\cos^2\alpha+\cos^2(60^0+\alpha)+\cos^2(60^0-\alpha)=\frac{3}{2}$.

39. $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta$.

40. $\dfrac{\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta} = \operatorname{tg}(\alpha+\beta) \operatorname{tg}(\alpha-\beta).$

41. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) - \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha+\beta) \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta.$

42. $\operatorname{tg}(45^0+\alpha) - \operatorname{tg}\alpha = 1 + \operatorname{tg}(45^0+\alpha) \operatorname{tg}\alpha.$

43. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)} - \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)} = -2 \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta.$

44. $\dfrac{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = \dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}.$

Вычислить:

45. $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ и $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}6$; $0^0 < \alpha < 90^0$.

Ответ: $\dfrac{24}{25}$; $\dfrac{7}{25}$; $3\dfrac{3}{7}$.

46. $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{2}{3}$; $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

Ответ: $\dfrac{1}{9}$; $4\sqrt{5}$.

47. Найти $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{2n}{1+n^2}$,

$0 < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\pi}{4}$, $n > 0$,

Ответ: $\dfrac{4n\,|1-n^2|}{(1+n^2)^2}$; $\dfrac{6n^2-n^4-1}{(1+n^2)^2}$.

48. $\operatorname{tg} 2\alpha$ и $\operatorname{tg}(2\alpha-\beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{5}$ и $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{3}$.

49. $\operatorname{tg}(2\alpha+\beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{3}$ и $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{4}$.

Ответ: $\dfrac{16}{13}$.

50. а) $2\sin 22^0 30' \cos 22^0 30'$;

б) $1 - 2\sin^2 15^0$;

в) $\dfrac{1}{4}\sin\dfrac{\pi}{8}\cos\dfrac{\pi}{8}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\dfrac{\sqrt{2}}{16}$.

51. а) $\sin^2 22^0 30' - \cos^2 22^0 30'$;

б) $\sin 15^0 \cos 15^0$;

в) $2\cos^2\dfrac{\pi}{8} - 1$. Ответ: $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\dfrac{1}{4}$; $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

52. а) $\dfrac{\operatorname{tg} 15^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ}$;

б) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}$. Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$; 2.

Упростить выражения:

53. $\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha$. Ответ: $\dfrac{1}{4}\sin 4\alpha$.

54. $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$ Ответ: $\cos 2\alpha$.

55. $\cos^2\alpha-4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$. Ответ: $\cos 2\alpha$.

56. $1-8\sin^2\alpha\cos^2\alpha$. Ответ: $\cos 4\alpha$.

57. $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{1+\sin 2\alpha}$. Ответ: 1.

58. $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$. Ответ: $-(\cos\alpha+\sin\alpha)$.

59. $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}$. Ответ: $\dfrac{1}{\cos\alpha}$.

60. $\dfrac{2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. Ответ: $-\operatorname{tg}\alpha$.

61. $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$. Ответ: $\cos 2\alpha$.

62. $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\cos 2\alpha}$. Ответ: $\dfrac{2}{\sin 2\alpha}$.

63. $2\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$. Ответ: $\dfrac{1}{2}\sin 4\alpha$.

64. $\cos^4\alpha-6\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\sin^4\alpha$. Ответ: $\cos 4\alpha$.

Доказать тождества:

65. $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 15^\circ}{1+\operatorname{tg}^2 15^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

66. $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=-\cos 2\alpha$.

67. $\dfrac{2\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}=\sin 2\alpha$.

68. $\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\cos\alpha$.

69. $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\alpha$.

70. $\dfrac{1}{1-\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}-\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\alpha.$

71. $\dfrac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}.$

72. $\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-\cos 2\alpha\cos 2\beta=1.$

Вычислить:

73. $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha=\frac{119}{169}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{5}{13}$; $\frac{12}{13}$; $\frac{5}{12}$.

74. $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha=\frac{3}{4}$, $270^0<\alpha<360^0$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$; $-\frac{\sqrt{14}}{4}$; $-\frac{\sqrt{7}}{7}$.

75. $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$, $180^0<\alpha<270^0$.

Ответ: $\frac{2}{\sqrt{5}}$; $-\frac{1}{\sqrt{5}}$; -2.

76. а) $\sin 15^0$, $\cos 15^0$, $\operatorname{tg} 15^0$;

Ответ: $\frac{1}{4}(\sqrt{6}\mp\sqrt{2})$; $2-\sqrt{3}$.

б) $\sin 7^030'$, $\cos 7^030'$;

в) $\operatorname{tg} 22^\circ30'$. Ответ: $\sqrt{2}-1$.

77. $\sin\frac{\alpha}{4}$, если $450^\circ<\alpha<540^\circ$ и $\sin\alpha=\frac{336}{625}$.

Ответ: $\frac{4}{5}$.

78. $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$, если $0^0<\frac{\alpha}{4}<90^\circ$ и $\cos\alpha=\frac{3}{5}$.

Упростить выражения:

79. $\sqrt{\dfrac{1-\cos\dfrac{\alpha}{4}}{2}}$ Ответ: $\left|\sin\frac{\alpha}{8}\right|$.

80. $\sqrt{\dfrac{1+\cos 4\alpha}{2}}.$ Ответ: $|\cos 2\alpha|$.

81. $2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos\alpha.$ Ответ: 1

82. $2\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha.$ Ответ: 1.

83. $\sqrt{\dfrac{1-\cos\frac{\alpha}{4}}{1+\cos\frac{\alpha}{4}}}$. Ответ: $\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}\right|$.

84. $\sqrt{\dfrac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}}$. Ответ: $|\operatorname{ctg}\alpha|$.

85. $\sqrt{1+\cos 8\alpha}$. Ответ: $\sqrt{2}\,|\cos 4\alpha|$.

Доказать тождества:

86. $\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

87. $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

88. $\dfrac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$.

89. $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\;\dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

90. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}-2\operatorname{ctg}\alpha$.

91. $\sin\alpha-\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\cos\alpha\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

92. $\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{1}{\cos\alpha}-\operatorname{tg}\alpha$.

4. ВЫРАЖЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЧЕРЕЗ ТАНГЕНС ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТА

Тригонометрические функции $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ выражаются через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ следующим образом:

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \tag{21}$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \tag{22}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \tag{23}$$

Пример: Найти $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=2$.

По формулам (21) и (22) получаем

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{4}{1+4}=\frac{4}{5};$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-4}{1+4}=-\frac{3}{5}.$$

Упражнения:

1. Найти $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=5$.
2. Найти $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ и $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=-3$.
3. Найти $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ и $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha=3$.
4. Найти $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$. Ответ $\frac{7}{25}$.
5. Найти $\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$. Ответ $\frac{-84}{625}$.
6. Найти $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{3}$.
7. Найти $\sin 4x$, если $\operatorname{ctg} x=\frac{1}{3}$. Ответ: $-0{,}96$.
8. Вычислить $\frac{\sin\alpha}{2-3\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$. Ответ: 4.
9. Вычислить $\frac{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{15}$.

   Ответ: $\frac{4}{225}$.
10. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=z$. Найти: а) $\frac{1}{4+5\cos\alpha}$;

    б) $\frac{1}{3-5\sin\alpha}$;

    в) $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$.

    Ответ: $\frac{1+z^2}{9-z^2}$; $\frac{1+z^2}{3-10z+3z^2}$; $\frac{1+z}{1-z}$.

5. ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

Формулами приведения принято называть выражения тригонометрических функций аргументов $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\pi\pm\alpha$, $\frac{3}{2}\pi\pm\alpha$, $2\pi\pm\alpha$ через тригонометрические функции аргумента α.

Например, выразим $\sin(\pi+\alpha)$, применив формулу сложения для синуса $\sin(\pi+\alpha)=\sin\pi\cos\alpha+\cos\pi\sin\alpha$.
Далее, заменив $\sin\pi=0$ и $\cos\pi=-1$, получим

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha.$$

Аналогично можно получить

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=\sin\alpha,\ \operatorname{tg}(2\pi-\alpha)=\frac{\sin(2\pi-\alpha)}{\cos(2\pi-\alpha)}=$$

$$=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha.$$

Нет надобности всякий раз применять формулы сложения, достаточно помнить так называемое «правило приведения»:

1. Если в формуле содержатся аргументы π и 2π (180 и 360°), то название функции не изменяется, если же в формуле содержатся аргументы $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3}{2}\pi$(90 и 270°), то название функции изменяется на сходное (синус на косинус, тангенс на котангенс и т. д.).

2. Если приводимая функция отрицательна (считая α — острым), то функцию α надо умножить на -1, если же положительна, то функцию аргумента α взять со знаком $+$.

Пользуясь этим правилом, можно функцию произвольного аргумента привести к функции острого угла, применяя еще свойство четности и нечетности (если аргумент отрицательный) и периодичности (если аргумент превышает 2π или 360°).

Пример 1.

$$\sin(-330^\circ)=-\sin 330^\circ=-\sin(360^\circ-30^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}.$$

$$\operatorname{ctg} 420^\circ=\operatorname{ctg}(360^\circ+60^\circ)=\operatorname{ctg} 60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Пример 2. Вычислить:

$$\sin(-300^\circ)+\cos(-225^\circ)+(-\operatorname{tg} 330^\circ)+\operatorname{ctg}(-240^\circ)=$$

$$=-\sin 300^\circ+\cos 225^\circ-\operatorname{tg} 330^\circ-\operatorname{ctg} 240^\circ=$$

$$=-\sin(270^\circ+30^\circ)+\cos(180^\circ+45^\circ)-\operatorname{tg}(360^\circ-30^\circ)-$$

$$-\operatorname{ctg}(270^\circ-30^\circ)=\cos 30^\circ-\cos 45^\circ+\operatorname{tg} 30^\circ-\operatorname{tg} 30^\circ=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}.$$

Пример 3. Упростить:

$$\frac{\cos 304^\circ \operatorname{tg} 416^\circ-\operatorname{tg} 214^\circ \operatorname{tg}(-56^\circ)}{\operatorname{ctg} 214^\circ+\cos 326^\circ \operatorname{ctg}(-56^\circ)}=$$

$$=\frac{\cos(360^\circ-56^\circ)\operatorname{tg}(360^\circ+56^\circ)-\operatorname{tg}(270^\circ-56^\circ)(-\operatorname{tg} 56^\circ)}{\operatorname{ctg}(270^\circ-56^\circ)+\cos(270^\circ+56^\circ)(-\operatorname{ctg} 56^\circ)}=$$

$$= \frac{\cos 56^\circ \operatorname{tg} 56^\circ + \operatorname{ctg} 56^\circ \operatorname{tg} 56^\circ}{\operatorname{tg} 56^\circ + \sin 56^\circ \operatorname{ctg} 56^\circ} = \frac{\sin 56^\circ + 1}{\operatorname{tg} 56^\circ + \cos 56^\circ}.$$

Пример 4. Доказать тождество:

$$\frac{\operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\left[\sin\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) - \sin(\pi + \alpha)\right]}{\operatorname{tg}(\pi + \alpha)\left[\cos(\alpha + 2\pi) + \sin(\alpha - 2\pi)\right]} = -1.$$

В левой части в преобразованиях используем свойство нечетности функций синуса и котангенса:

$$\operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$

$$\sin\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) = -\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right),$$

затем — свойство периодичности функций тангенса, косинуса и синуса:

$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha, \ \cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha, \ \sin(\alpha - 2\pi) = \sin\alpha,$$

после этого левая часть примет вид

$$\frac{-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\left[-\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) - \sin(\pi + \alpha)\right]}{\operatorname{tg}\alpha\,(\cos\alpha + \sin\alpha)}.$$

Затем применим формулы приведения к функциям, стоящим в числителе:

$$\frac{-\operatorname{tg}\alpha\,(\cos\alpha + \sin\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha\,(\cos\alpha + \sin\alpha)} = -1.$$

Пример 5. Доказать равенство:

$$\operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 70^\circ \operatorname{tg} 80^\circ = 1.$$

Функции тангенса углов, больших 45°, заменим по формуле приведения функциями углов, меньших 45°, т. е.

$$\operatorname{tg} 50^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ - 40^\circ) = \operatorname{ctg} 40^\circ,$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ - 30^\circ) = \operatorname{ctg} 30^\circ,$$

$$\operatorname{tg} 70^\circ = \operatorname{ctg} 20^\circ,$$

$$\operatorname{tg} 80^\circ = \operatorname{ctg} 10^\circ.$$

Затем сгруппируем тангенсы и котангенсы одних и тех же аргументов:

$$(\operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{ctg} 10^\circ)(\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{ctg} 20^\circ)(\operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ)(\operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{ctg} 40^\circ) = 1$$

(каждое выражение, стоящее в скобках, равно 1 по формуле (4)). Итак, равенство доказано.

ЗАДАНИЕ № 5

Вычислить:

1. $\sin 120°$; $\cos 150°$; $\operatorname{tg} 135°$; $\operatorname{ctg} 120°$; $\sin(-135°)$.

2. $\sin 225°$; $\cos 240°$; $\operatorname{tg} 210°$; $\sin(-240°)$; $\cos(-210°)$.

3. $\sin 300°$; $\cos 315°$; $\operatorname{tg} 330°$; $\cos(-300°)$; $\cos(-120°)$.

4. $\sin^2 120° + \cos^2 150° + \operatorname{tg}^2 210° - \operatorname{ctg}^2 225°$.

Ответ: $\frac{5}{6}$.

5. $\sin^2(-330°) - \cos^2(-120°) - \operatorname{tg}^2(-240°) + \operatorname{ctg}^2(-330°)$.

Ответ: 0.

6. $6 \sin 120° \operatorname{tg} 300° \operatorname{ctg} 225°$.

Ответ: -9.

7. $4 \sin 330° \cos(-240°) \operatorname{tg} 120° - 2\cos 150° \operatorname{tg}(-315°)$.

Ответ: 0.

8. $\dfrac{\cos(-150°)}{\cos 330°} - \dfrac{\operatorname{tg} 150° \sin 300°}{\cos 360°} + \cos(-240°) \operatorname{ctg} 120°$.

Ответ: $\dfrac{-9+\sqrt{3}}{6}$.

Привести тригонометрические функции к функциям положительных углов, не больших 45°.

9. $\sin 560°$; $\cos 846°$; $\operatorname{tg} 758°$; $\operatorname{ctg} 1000°$.

10. $\sin(-310°)$; $\cos(-500°)$; $\operatorname{tg}(-405°)$; $\operatorname{ctg}(-820°)$.

11. $\sin 130°$; $\cos 820°$; $\operatorname{tg} 930°$; $\operatorname{ctg} 470°$.

12. $\sin(-500°)$; $\cos(-415°)$; $\operatorname{tg}(-100°)$; $\operatorname{ctg}(-840°)$.

13. $\sin 170°$; $\cos 350°$; $\operatorname{tg} 190°$; $\operatorname{ctg} 340°$.

14. $\sin(-340°)$; $\cos(-760°)$; $\operatorname{tg}(-560°)$; $\operatorname{ctg}(-690°)$.

Упростить выражения:

15. $\sin(180° - \alpha) + \cos(90° + \alpha) - \operatorname{tg}(360° - \alpha) + \operatorname{ctg}(270° - \alpha)$.

Ответ: $2 \operatorname{tg} \alpha$.

16. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(\pi - \alpha) + \operatorname{tg}(\pi - \alpha) - \operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$.

Ответ: $2 \cos \alpha$.

17. $\sin^2(180° - \alpha) + \sin^2(270° - \alpha) + \operatorname{tg}(90° + \alpha) \operatorname{ctg}(360° - \alpha)$.

Ответ: $\dfrac{1}{\sin^2 \alpha}$.

18. $\dfrac{\cos^2(360° - \alpha) + \sin^2(270° - \alpha)}{\operatorname{tg}^2(90° + \alpha)\operatorname{ctg}^2(270° + \alpha)}$.

Ответ: $2\cos^2\alpha$.

19. $\dfrac{\sin(-\alpha)\operatorname{tg}(-\alpha)}{\cos(-\alpha)\operatorname{ctg}(-\alpha)}$. Ответ: $-\operatorname{tg}^3\alpha$.

20. $2\sin 40° + \cos 130° - 3\sin 160° - \cos(-110°)$.

Ответ: $\sin 40° - 2\sin 20°$.

21. $3\operatorname{tg} 200° - 2\sin(-80°) + \operatorname{ctg} 290° + \cos(-10°)$.

Ответ: $2\operatorname{tg} 20° + 3\cos 10°$.

22. $\sin 160°\cos 110° + \sin 250°\cos 340° + \operatorname{tg} 110\operatorname{tg} 340°$.

Ответ: 0.

23. $\dfrac{\sin 160°\cos 70° - \cos 200°\sin 70° - \cos 235°\sin 215°}{\operatorname{tg} 55°\operatorname{ctg} 215°}$.

Ответ: $\sin^2 35°$.

24. $\dfrac{\operatorname{tg}(270° - \alpha)\sin 130°\cos 320°\sin 270°}{\operatorname{ctg}(180° - \alpha)\cos 50°\sin 220°\cos 360°}$.

Ответ: $-\operatorname{ctg}^2 40°$.

25. $\sin(\alpha - 90°) + \cos(\alpha - 180°) - \operatorname{tg}(\alpha - 270°) + \operatorname{ctg}(360° - \alpha)$.

Ответ: $-2\cos\alpha$.

26. $\operatorname{tg}^2(\alpha - 180°)\operatorname{ctg}(\alpha - 360°) + \sin^2(\alpha + 180°) + \sin^2(270° - \alpha)$.

Ответ: $1 + \operatorname{tg}\alpha$.

27. $\operatorname{tg}^2(\alpha - 360°)\sin^2(\alpha - 270°) + \cos^2(360° + \alpha) -$
$-2\sin(180° - \alpha)\sin(90° + \alpha)$.

Ответ: $1 - \sin 2\alpha$.

28. $\dfrac{\sin^3(\alpha - 270°)\cos(360° - \alpha)}{\operatorname{tg}^3(\alpha - 90°)\cos^3(\alpha - 270°)}$. Ответ: $\cos\alpha$.

29. $\sqrt{\dfrac{\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) + 1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + 1}}$. Ответ: $\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right|$.

Доказать тождества:

30. а) $\sin(45° + \alpha) = \cos(45° - \alpha)$.

б) $\cos(45° + \alpha) = \sin(45° - \alpha)$.

в) $\operatorname{tg}(45° + \alpha) = \operatorname{ctg}(45 - \alpha)$.

31. $\sin(150° + \alpha) = \sin(30° - \alpha)$.

32. $\dfrac{\sin(360° - \alpha)\operatorname{tg}(90° + \alpha)\operatorname{ctg}(270° - \alpha)}{\cos(360° + \alpha)\operatorname{tg}(180° + \alpha)} = 1$.

33. $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)}{\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)} - \dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)} + \operatorname{tg}(\pi-\alpha) + 1 = 0.$

34. $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\cos(-\alpha)}{\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)} = \sin\alpha.$

35. $\dfrac{\sin^2(-212^\circ)\cos 302^\circ + \cos^3(-148^\circ)}{\sin(-82^\circ)\cos(-8^\circ)+\sin 368^\circ \sin(-172^\circ)-\sin 58^\circ \sin 148^\circ} =$

$= \cos 32^0 - \sin 32^0.$

36. $\sin^2(30^0+\alpha)+\sin^2(240^0-\alpha)=1.$

37. $\dfrac{\cos^2(270^\circ+\alpha)}{\operatorname{tg}^2(\alpha-360^\circ)} + \dfrac{\cos^2(-\alpha)}{\operatorname{tg}^2(\alpha-270^\circ)} = 1.$

38. $\sin\left(\frac{\alpha}{2}+x\right) = \cos\left(\frac{\beta}{2}-x\right)$, если α и β—смежные углы.

39. а) $\sin 18^0 \cos 36^0 = \frac{1}{4}$; б) $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$.

Указание: а) Умножить и разделить левую часть равенства на $\cos 18^\circ$.

40. $\cos 20^0 \cos 40^0 \cos 80^0 = \frac{1}{8}$.

41. $\cos 10^0 \cos 80^0 = \frac{1}{2}\sin 20^0$.

42. $\sin 40^0 \sin 50^0 = \frac{1}{2}\cos 10^0$.

43. $\cos\alpha + \cos(120^0-\alpha)+\cos(120^0+\alpha) = 0.$

44. $\sin^2\alpha+\sin^2(120^0+\alpha)+\sin^2(120^0-\alpha) = \frac{3}{2}$.

45. $2\sin(45^0+\alpha)\sin(45^0-\alpha) = \cos 2\alpha.$

46. $1+\sin\alpha = 2\cos^2\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right).$

47. $1-\sin\alpha = 2\sin^2\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right).$

48. $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right).$

49. $\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha} = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$

50. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{2}{\cos\alpha}.$

51. $8\cos 10^0\cos 20^0\cos 40^0 = \operatorname{ctg} 10^0.$

52. $16\sin 10^0\sin 30^0\sin 50^0\sin 70^0\sin 90^0 = 1.$

6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СУММУ И СУММЫ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Из формул сложения для синуса

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha,$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha,$$

путем суммирования их можно получить

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta, \text{ т. е.}$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]. \quad (24)$$

Из формул сложения для косинуса

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

аналогично находим:

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]. \quad (25)$$

Для получения формулы $\sin\alpha\sin\beta$ достаточно вычесть из $\cos(\alpha-\beta)$ $\cos(\alpha+\beta)$ и разделить результат пополам:

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]. \quad (26)$$

Пример 1. Вычислить

$$\cos\frac{7}{12}\pi\cos\frac{\pi}{12}.$$

По формуле (25) имеем:

$$\cos\frac{7}{12}\pi\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2}{3}\pi+\cos\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{4}.$$

Пример 2. Представить в виде суммы $4\sin 20^\circ\cos 50^\circ\cos 80^\circ$.

Сгруппируем $\sin 20^\circ\cos 50^\circ$ и применим формулу (24), затем, раскрыв скобки, применим ее вторично:

$$2[\sin(20^0+50^0)+\sin(20^0-50^0)]\cos 80^0=$$

$$=2(\sin 70^0\cos 80^0-\sin 30^0\cos 80^0)=\sin 150^0+$$

$$+\sin(70^0-80^0)-\cos 80^0=\sin 30^0-\sin 10^0-\sin 10^0=$$

$$=\frac{1}{2}-2\sin 10^0.$$

Пример 3. Доказать тождество:

$$256 \sin^5 x \cos^4 x = 6 \sin x + 4 \sin 3x - 4 \sin 5x - \sin 7x + \sin 9x.$$

Преобразуем левую часть:

$$256 \sin^5 x \cos^4 x = 256 \sin x (\sin x \cos x)^4 =$$

$$= 256 \sin x \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^4 = 16 \sin x \sin^4 2x =$$

$$= 16 \sin x \left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right)^2 = 4 \sin x (1 - \cos 4x)^2 =$$

$$= 4 \sin x - 8 \sin x \cos 4x + 4 \sin x \cos^2 4x =$$

$$= 4 \sin x - 4 \sin 5x - 4 \sin(-3x) + 4 \sin x \frac{1 + \cos 8x}{2} =$$

$$= 4 \sin x - 4 \sin 5x + 4 \sin 3x + 2 \sin x + 2 \sin x \cos 8x =$$

$$= 6 \sin x + 4 \sin 3x - 4 \sin 5x + \sin 9x - \sin 7x.$$

Аналогично решаются примеры, приведенные в задании № 6 (№ 1—25 и 111—115).

Из выведенных трех формул легко получить формулы преобразования суммы и разности одноименных функций:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \qquad (27)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}, \qquad (28)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \qquad (29)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}, \qquad (30)$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \qquad (31)$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}. \qquad (32)$$

Пример 4. Преобразовать в произведение: $\sqrt{2} + 2 \cos \alpha$.

Вынесем за скобки 2 и применим формулу суммы косинусов (29):

$$2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos \alpha\right) = 2\left(\cos \frac{\pi}{4} + \cos \alpha\right) =$$

$$= 4 \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Пример 5. Доказать тождество:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = 2 \operatorname{tg} \alpha.$$

К левой части тождества применим формулу разности тангенсов (32):

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sin\alpha}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Затем, согласно формуле (25),

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+\cos\alpha\right)=\frac{1}{2}\cos\alpha,$$

тогда

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sin\alpha}{\frac{1}{2}\cos\alpha}=2\operatorname{tg}\alpha.$$

Здесь применили $\cos\frac{\pi}{2}=0$ и формулу (2).

Пример 6. Упростить выражение:

$$\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{8}\right)-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{8}\right).$$

Для этого применим формулы понижения степени (16) и (18), затем суммы косинусов (29):

$$\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{8}\right)-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{8}\right)=$$

$$=\frac{1-\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{2}-\frac{1+\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right]=$$

$$=-\cos 2\alpha\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\alpha.$$

Аналогично решаются примеры, приведенные в задании № 6 (№ 26—110).

ЗАДАНИЕ № 6

Представить в виде суммы:

1. $\cos 20^0 \cos 10^0$. Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}\cos 10^0$.

2. $\cos 18^0 \cos 46^0$. Ответ: $\frac{1}{2}(\cos 64^0+\cos 28^0)$.

3. $\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5}$. Ответ: $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{3}{10}\pi+\cos\frac{\pi}{10}\right)$.

4. $\cos(x+\alpha)\cos(x-\alpha)$. Ответ: $\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 2\alpha)$.

5. $\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha$. Ответ: $\frac{1}{2}[\cos(2\alpha+\beta)+\cos\beta]$.

6. $4\cos 8^0 \cos 10^0 \cos 6^0$.

Ответ: $\cos 4^0 + \cos 8^0 + \cos 12^0 + \cos 24^0$.

7. $4\cos\alpha \cos 3\alpha \cos 4\alpha$.

Ответ: $1 + \cos 2\alpha + \cos 6\alpha + \cos 8\alpha$.

8. $8\cos(\alpha - \beta)\cos(\alpha - \gamma)\cos(\gamma - \beta)$.

Ответ: $2[1 + \cos 2(\alpha - \beta) + \cos 2(\beta - \gamma) + \cos 2(\gamma - \alpha)]$

9. $\sin 40^0 \sin 4^0$ Ответ: $\frac{1}{2}(\cos 36^0 - \cos 44^0)$.

10. $\sin 6^0 \sin 24^0$. Ответ: $\frac{1}{2}\cos 18^0 - \frac{\sqrt{3}}{4}$.

11. $\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{8}$. Ответ: $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{3}{40}\pi - \cos\frac{13}{40}\pi\right)$.

12. $\sin 5\alpha \sin 3\alpha$. Ответ: $\frac{1}{2}(\cos 2\alpha - \cos 8\alpha)$.

13. $\sin 2\alpha \sin(\alpha + \beta)$. Ответ: $\frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(3\alpha + \beta)]$.

14. $2\sin\alpha \sin 2\alpha \sin 3\alpha$.

Ответ: $\frac{1}{2}(\sin 2\alpha + \sin 4\alpha - \sin 6\alpha)$

15. $\sin(x + \alpha)\sin(x - \alpha)$. Ответ: $\frac{1}{2}(\cos 2\alpha - \cos 2x)$.

16. $\sin 12^0 \cos 42^0$. Ответ: $\frac{1}{2}\sin 54^0 - \frac{1}{4}$.

17. $\sin 8^0 \, 2\cos 4^0$. Ответ: $\sin 4^0 + \sin 12^0$.

18. $\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{8}$. Ответ: $\frac{1}{2}\left(\sin\frac{9}{40}\pi - \sin\frac{\pi}{40}\right)$.

19. $\sin 4\alpha \cos 2\alpha$. Ответ: $\frac{1}{2}(\sin 2\alpha + \sin 6\alpha)$.

20. $\sin(\alpha - \beta)\cos(\beta - \alpha)$. Ответ: $\frac{1}{2}\sin 2(\alpha - \beta)$.

21. $\sin(x + \alpha)\cos(x - \alpha)$. Ответ: $\frac{1}{2}(\sin 2x + \sin 2\alpha)$.

22. $2\sin 40^0 \cos 10^0 \cos 8^0$.

Ответ: $\frac{1}{2}(\sin 58^0 + \sin 42^0 + \cos 8^0)$.

23. $\cos^2\alpha \sin^2\alpha$. Ответ: $\frac{1}{8}(1 - \cos 4\alpha)$.

24. а) $\cos^3\alpha \sin^2\alpha$; б) $\sin^3\alpha \cos^2\alpha$

Ответ: а) $\frac{1}{8}\left(\cos\alpha - \frac{1}{2}\cos 5\alpha - \frac{1}{2}\cos 3\alpha\right)$;

б) $\frac{1}{8}\left(\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 3\alpha - \frac{1}{2}\sin 5\alpha\right)$.

25. а) $\cos^4\alpha$; б) $\sin^4\alpha$.

Ответ: а) $\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{8}\cos 4\alpha$;

б) $\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{8}\cos 4\alpha$.

Преобразовать сумму в произведение:

26. а) $\cos 50^0 + \cos 20^0$; б) $\cos 18^0 - \cos 10^0$; в) $\cos 4^0 - \cos 28^0$.

Ответ: $2\cos 15^0 \cos 35^0$; $-2\sin 4^0 \sin 14^0$; $2\sin 12^0 \sin 16^0$.

27. а) $\sin 26^0 + \sin 14^0$; б) $\sin 73^0 - \sin 36^0$; в) $\sin 7^0 - \sin 19^0$.

Ответ: $2\sin 20^0 \cos 6^0$; $2\sin 18^0 30' \cos 54^0 30'$; $-2\sin 6^0 \cos 13^0$.

28. а) $\sin 46^0 + \cos 50^0$; б) $\cos 36^0 - \sin 16^0$; в) $\sin 1^0 + \cos 64^0$.

Ответ: $2\sin 43^\circ \cos 3^0$; $2\sin 19^0 \sin 55^0$; $2\sin 13^0 30' \cos 12^\prime 30'$.

29. а) $\sin\frac{\pi}{10} + \sin\frac{\pi}{12}$; б) $\cos\frac{\pi}{8} - \cos\frac{\pi}{18}$;

в) $\sin\frac{\pi}{10} - \cos\frac{\pi}{12}$.

Ответ: $2\sin\frac{11}{120}\pi\cos\frac{\pi}{120}$; $-2\sin\frac{19}{120}\pi\cos\frac{31}{120}\pi$.

30. а) $\operatorname{tg} 12^0 + \operatorname{tg} 32^0$; б) $\operatorname{tg}\frac{5}{12}\pi - \operatorname{tg}\frac{7}{12}\pi$;

в) $\operatorname{tg}\frac{3}{5}\pi - \operatorname{ctg}\frac{1}{15}\pi$.

31. $\sin 4\alpha + \sin 2\alpha$. Ответ: $2\sin 3\alpha \cos\alpha$.

32. $\cos 2\alpha - \cos 6\alpha$. Ответ: $2\sin 2\alpha \sin 4\alpha$.

33. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg} 3\alpha$. Ответ: $\frac{\sin 4\alpha}{\cos\alpha\cos 3\alpha}$.

34. $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$. Ответ: $2\cos\alpha\cos\beta$.

35. $\sin(40^0+\alpha) - \sin(40^0-\alpha)$. Ответ: $2\sin\alpha\cos 40^0$.

36. $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$. Ответ: $2\sin\beta\cos\alpha$.

37. а) $\sin\alpha + \cos\alpha$; б) $\sin\alpha - \cos\alpha$; в) $\cos\beta - \sin\alpha$.

38. а) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta$; б) $\cos^2\alpha - \cos^2\beta$; в) $\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta$.

39. $\frac{\sin 75^\circ + \sin 15^\circ}{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}$. Ответ: $\sqrt{3}$.

40. $\frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\cos\alpha - \cos\beta}$. Ответ: $\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta-\alpha}{2}$.

41. $\frac{\sin 7\alpha - \sin 5\alpha}{\sin 7\alpha + \sin 5\alpha}$. Ответ: $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg} 6\alpha$.

42. $\frac{\cos 6\alpha - \cos 4\alpha}{\cos 6\alpha + \cos 4\alpha}$. Ответ: $-\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg} 5\alpha$.

43. $\sin 10^0 + \sin 11^0 + \sin 15^0 + \sin 16^0$.

Ответ: $4\cos 30' \cos 2^0 30' \sin 13^0$.

44. $\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 2\alpha + \sin 4\alpha$.

Ответ: $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin\frac{5}{2}\alpha$.

45. $\cos 31^0 + \cos 13^0 + \cos 8^0 + \cos 36^0$.

Ответ: $4\cos 2^0 30' \cos 11^0 30' \cos 22^0$.

46. $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 4\alpha$.

Ответ: $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos\frac{5}{2}\alpha$.

47. а) $1+\cos 2\alpha$; б) $1-\cos\alpha$; в) $1+\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

Ответ: $2\cos^2\alpha$; $2\sin^2\frac{\alpha}{2}$; $2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)$.

48. а) $1+\cos 40^0$; б) $1-\cos 17^0$; в) $\cos 31^0 - 1$.

Ответ: в) $-2\sin^2 15^0 30'$.

49. а) $1+\sin 50^0$; б) $1+\sin\alpha$; в) $1-\sin\alpha$.

Ответ: $2\cos^2 20^0$; $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$; $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

50. а) $1-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$; б) $\sin 26^0 - 1$.

Ответ: б) $-2\sin^2 32^0$.

51. $\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$. Ответ: $\operatorname{tg}^2\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right)$.

52. $\frac{1-\cos 50^\circ}{\cos 40^\circ}$. Ответ: $\operatorname{tg} 25^0$.

53. $\frac{1+\cos(\alpha-\beta)}{1-\cos(\alpha-\beta)}$. Ответ: $\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha-\beta}{2}$.

54. а) $1\pm\operatorname{tg}\alpha$; б) $1\pm\operatorname{ctg}\beta$; в) $\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha$;

Ответ: а) $\frac{\sqrt{2}\sin(45^\circ\pm\alpha)}{\cos\alpha}$; в) $2\operatorname{tg}\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

55. а) $1+\sin\alpha+\cos\alpha$; б) $1-\cos\alpha+\sin\alpha$.

Ответ: а) $2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right)$.

56. $1-2\cos\alpha+\cos 2\alpha$. Ответ: $-4\cos\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

57. а) $1+\sin\alpha-\cos\alpha-\operatorname{tg}\alpha$; б) $1+\sin\alpha+\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha$;

в) $1-\sin\alpha+\cos\alpha-\operatorname{tg}\alpha$.

Ответ: а) $\frac{2\sqrt{2}}{\cos\alpha}\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin(45^0-\alpha)$.

58. а) $\frac{1-2\cos\alpha+\cos 2\alpha}{1+2\cos\alpha+\cos 2\alpha}$; б) $\frac{1-2\sin\alpha-\cos 2\alpha}{1+2\sin\alpha-\cos 2\alpha}$.

Ответ: а) $-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$; б) $-\operatorname{tg}^2\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right)$.

59. $1-\sin\alpha-\cos\alpha$.

Ответ: $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-45^0\right)$.

60. $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha$.

Ответ: $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin\frac{3}{2}\alpha$.

61. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)$.

Ответ: $4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$.

62. $\sin(5\alpha+\beta)+\sin(3\alpha+\beta)+\sin 2\alpha$.

Ответ: $4\cos\alpha\cos\frac{3\alpha+\beta}{2}\sin\frac{5\alpha+\beta}{2}$.

63. $\cos 12^0-2\cos 24^0+\cos 36^0$.

Ответ: $-4\sin^2 6^0\cos 24^0$.

64. $\sin 19^0+\sin 25^0+\sin 6^0$.

Ответ: $4\cos 3^0\cos 9^0 30'\sin 12^0 30'$.

65. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg} 2\alpha-\operatorname{tg} 3\alpha$.

Ответ: $-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg} 2\alpha\operatorname{tg} 3\alpha$.

66. а) $1+2\cos\alpha$; б) $1-2\cos\alpha$.

Ответ: а) $4\cos\left(30^0+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^0-\frac{\alpha}{2}\right)$;

б) $4\sin\left(30^0+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-30^0\right)$.

67. а) $1+2\sin 2\beta$; б) $\sqrt{2}\sin\alpha-1$.

Ответ: а) $4\sin(15^0+\beta)\cos(15^0-\beta)$;

б) $2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{8}\right)$.

68. а) $\sqrt{2}+2\cos\alpha$; б) $1+\sqrt{2}\cos\alpha$.

Ответ: а) $4\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

69. а) $1-4\sin^2\alpha$; б) $3-4\cos^2\alpha$; в) $3-\mathrm{tg}^2\,\alpha$.

Ответ: а) $4\sin(\alpha+30^0)\sin(30^0-\alpha)$.

70. $1+\cos\alpha+\cos 2\alpha$.

Ответ: $4\cos\alpha\cos\left(30^0-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^0+\frac{\alpha}{2}\right)$.

71. а) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$ Ответ: $\sqrt{3}\cos\alpha$.

б) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$ Ответ: $\sin\alpha$.

Доказать тождества:

72. $\sin 10^0+\sin 50^0-\cos 20^0=0$.

73. $\sin 18^0+\cos 48^0-\cos 12^0=0$.

74. $\cos 35^0+\cos 85^0-\cos 25^0=\sin(45^0+\alpha)-\cos(45^0-\alpha)$.

75. $\frac{\cos 20^\circ-\cos 50^\circ}{\sin 11^\circ+\cos 31^\circ}=\frac{\sin 80^\circ-\sin 70^\circ}{\sin 29^\circ-\sin 19^\circ}$.

76. $\frac{\sin 14^\circ+\sin 28^\circ-\sin 42^\circ}{\sin 42^\circ+\sin 14^\circ-\sin 56^\circ}=\frac{1}{2\cos 14^\circ}$.

77. $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$.

78. $\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}=-\mathrm{ctg}\frac{\beta+\alpha}{2}$.

79. $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}=\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$.

80. $\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta}=\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$.

81. $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}=\mathrm{tg}\,2\alpha$.

82. $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\mathrm{tg}(45^0+\alpha)$.

83. $\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}=\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta$.

84. $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}=\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta.$

85. $\dfrac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}^2(45^0-\alpha).$

86. $\dfrac{1+\operatorname{ctg}\alpha}{1-\operatorname{ctg}\alpha}=\operatorname{ctg}(\alpha-45^0).$

87. $4\sin^2\alpha-3=4\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$

88. $4\cos^2\alpha-1=4\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right).$

89. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}=\operatorname{tg}\alpha.$

90. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}=-\operatorname{ctg}\alpha.$

91. $\dfrac{\sin\alpha-2\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha-2\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha.$

92. $\dfrac{1+\operatorname{ctg}2\alpha}{1-\operatorname{ctg}2\alpha}=\dfrac{\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}.$

93. $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha-\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}=\operatorname{tg}3\alpha.$

94. $\dfrac{\cos\alpha-\cos 3\alpha+\cos 5\alpha-\cos 7\alpha}{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$

95. $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\sin 2\alpha.$

96. $\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}=2\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right),$

если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$

97. $\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}=2\sin\frac{\alpha}{2}$, если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$

98. $(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2=4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}.$

99. $(\sin\alpha-\sin\beta)^2+(\cos\alpha-\cos\beta)^2=4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}.$

100. $(\sin 2\alpha+\sin 4\alpha)^2+(\cos 2\alpha+\cos 4\alpha)^2=4\cos^2\alpha.$

101. $\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\cos^2\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right).$

102. $\cos^2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)-\frac{1}{2}=$

$$=-2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{2}\right).$$

103. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\sin^2(\alpha+\beta)=2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)$.

104. $\dfrac{\sin^2\alpha-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\alpha-4+4\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}$.

105. $\sin\alpha+\cos\alpha-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=$

$$=\sqrt{6}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right).$$

106. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha-\sin\alpha=-2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\times$

$$\times\operatorname{ctg}\alpha\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right).$$

107. $\cos\left(\frac{3}{10}\pi-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{10}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{3}{10}\pi+\alpha\right)+$

$$+\cos\left(\frac{\pi}{10}+\alpha\right)=\sin\alpha.$$

108. $\dfrac{\left(\cos\alpha+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\sin\alpha+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$.

109. $4\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha)=\sin 3\alpha$.

110. $\operatorname{tg}3\alpha=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(60^\circ+\alpha)\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)$.

111. $1+2\cos 7\alpha=\dfrac{\sin 10{,}5\,\alpha}{\sin 3{,}5\,\alpha}$.

112. $\cos 10^\circ\cos 30^\circ\cos 50^\circ\cos 70^\circ=\frac{3}{16}$.

113. $16\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ=3$.

114. $2\sin 2\alpha\sin\alpha+\cos 3\alpha=\cos\alpha$.

115. $\sin\alpha-2\sin\left(\frac{\alpha}{2}-15^\circ\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}+15^\circ\right)=\frac{1}{2}$.

ЛИТЕРАТУРА

Мордкович А. Г. Алгебра и начала анализа: Учебное пособие для подготовительных отделений высших учебных заведений.— М.: Высшая школа, 1979.

Абрамович М. И., Стародубцев И. Г. Математика. Геометрия и тригонометрические функции: Учебное пособие для подготовительных отделений высших технических учебных заведений— М.: Высшая школа, 1976.

Алгебра и начала анализа: Учебные пособия для 9—10 классов средней школы. Под ред. А. Н. Колмогорова.— М.: Просвещение, 1976.

Кочетков Б. С., Кочеткова Е. С. Алгебра и элементарные функции: Учебное пособие для учащихся 9—10 классов средней школы.— М.: Просвещение, 1968.

Стратилатов П. В. Сборник задач по тригонометрии. Для 9—10 классов средней школы.— М.: Учпедгиз, 1957.

Новоселов С. И. Тригонометрия: Учебник для 9—10 классов средней школы.— М.: Учпедгиз, 1956.

Рыбкин Н. Сборник задач по тригонометрии. Для 8, 9 и 10 классов средней школы.— М.: Учпедгиз, 1950.

Кущенко В. С. Сборник конкурсных задач по математике с решениями.— Ленинград: Судостроение, 1964.

Антонов Н. П., Выгодский М. Я. и др. Сборник задач по элементарной математике: Пособие для самообразования.— М.: Госиздат технико-теоретической литературы, 1958.

СОДЕРЖАНИЕ

Составитель *Нина Васильевна Новикова*

МАТЕМАТИКА

Тождественные преобразования тригонометрических выражений

Методические указания

Редактор Т. К. Кретинина

Техн. редактор Н. М. Каленюк

Корректор Н. С. Куприянова

Сдано в набор 31.07.81 г. Подп. в печ. 26.11.81 г. Формат $60\times90^1/_{16}$.
Бумага оберточная белая. Высокая печать. Литературная гарнитура.
Усл. п. л. 2,56. Уч.-изд. л. 2,0. Тираж 300 экз. Заказ № 4561. Бесплатно.
Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени авиационный институт им. С. П. Королева, г. Куйбышев, ул. Молодогвардейская, 151.

Областная тиография имени В. П. Мяги, г. Куйбышев, ул. Венцека, 60.